SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE ȘI FIZICE DIN R.P.R.

3071 E 1426 KAT

REVISTA MATEMATICĂ și FIZICĂ

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

★ ★ ★

Toată munca de educare, de învățământ, de instrucțiune a tineretului de azi trebue să fie îndrumată spre o educare în spiritul moralei comuniste.

V. I. LENIN

(Sarcinile Uniunilor Tineretului)

★

1

EDITURA TEHNICĂ

Országos Műszaki Könyvtár TULAJDONA

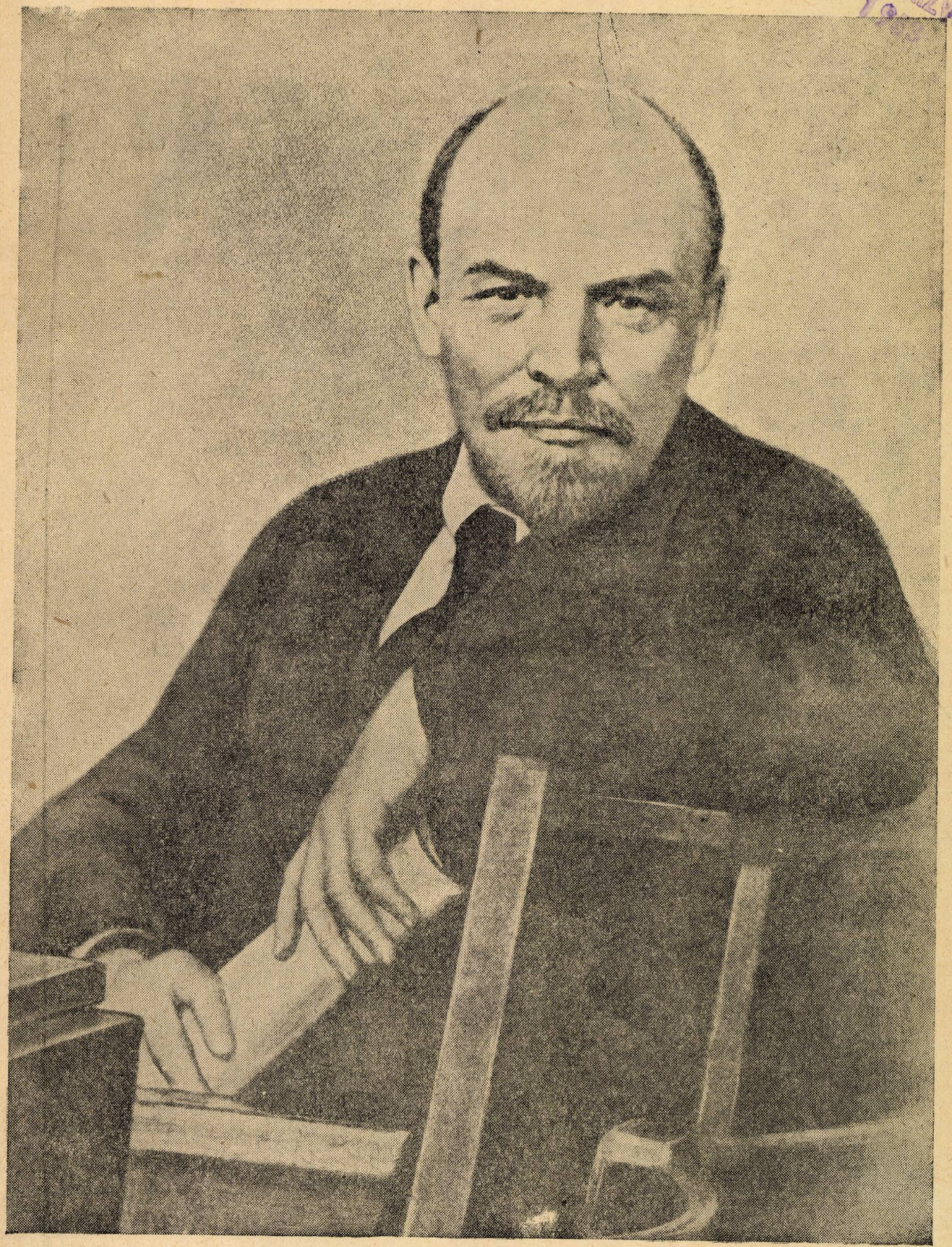
REVISTA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

SUMARUL:

		Pag.
1.	*Vladimir Ilici Lenin*	3
2.	*Distanţele cereşti de C. Popovici*	5
3.	*Ce este fenomenul Doppler-Fizeau de N. Stănescu*	9
4.	*Probleme rezolvate (204, 240, 243, 248, 258, 260, 261, 262, 266, 267, 273, 275, 277, 279, 289, 291)*...	15
5.	*Exerciţii şi Probleme propuse*	22
6.	*Pagina rezolvitorilor de probleme*	23

ANUL III 1 IAN. 1952

ELEKTRONIKA



VLADIMIR ILICI LENIN

REVISTA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

PUBLICAŢIE PENTRU TINERET A SOCIETĂŢII DE MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ DIN R. P. R.

Anul III, Nr. 1 Ianuarie 1952

VLADIMIR ILICI LENIN

La 21 Ianuarie 1952 oamenii muncii din lumea întreagă au comemorat 28 de ani dela moartea lui Lenin, marele geniu şi învăţător al omenirii muncitoare, întemeietorul Partidului Comunist Bolşevic şi al Statului Sovietic.

Lenin şi împreună cu el tovarăşul Stalin au pus bazele ideologice, organizatorice, tactice şi teoretice ale Partidului Comunist Bolşevic al Uniunii Sovietice.

Pe baza învăţăturii lui Lenin, clasa muncitoare din România şi-a creiat şi ea partidul ei de avantgardă, Partidul Comunist Român, care a organizat clasa muncitoare şi a condus-o la lupta pentru înlăturarea stăpânirii moşierilor, bancherilor şi fabricanţilor şi pentru instaurarea puterii politice a clasei muncitoare, aliată cu ţărănimea muncitoare. Pe baza învăţăturii lui Lenin şi Stalin, partidul clasei muncitoare din Republica Populară Română, Partidul Muncitoresc Român, conduce clasa muncitoare şi tot poporul muncitor pe drumul construirii socialismului.

Numele lui Lenin este slăvit pe tot întinsul globului pământesc. Nu există popor asuprit din ţările capitaliste şi coloniale unde numele lui Lenin să nu fie legat de lupta de desrobire a milioanelor de oameni ai muncii.

Lupta pentru pacea popoarelor, condusă de tovarăşul Stalin, are la bază învăţătura lui Lenin despre pace. Lenin a demascat cu vigoare politica războinică a imperialiştilor din lumea întreagă. In timpurile de faţă, când lagărul aţâţătorilor la război este condus de către imperialiştii americani, este deosebit de instructivă caracterizarea acestora de către Lenin.

Lenin a arătat că imperialismul american se amestecă neîncetat în treburile altor popoare, se amestecă prin intervenţie militară directă, le înrobeşte şi le sugrumă prin lanţul foametei. Lenin a subliniat în repetate rânduri rolul agresiv şi prădalnic al imperialismului american.

Sub conducerea lui Lenin şi Stalin, sub conducerea Partidului Bolşevic, popoarele sovietice au ridicat măreţul edificiu al socialismului, l-au consolidat învingând pe toţi duşmanii, dela gărzile albe şi intervenţioniştii străini până la zdrobirea bandelor hitleriste şi păşesc înainte spre făurirea comunismului.

Marile construcţii ale comunismului din planul stalinist de transformare a naturii; uriaşele hidrocentrale; perdelele forestiere, principalul canal turcmen, o vastă reţea de canale de irigaţie au la bază învăţăturile lui Lenin despre construcţia comunismului. Călăuzite de învăţătura lui Lenin şi Stalin popoarele eliberate prin lupta eroică a armatelor sovietice, printre care se află şi poporul nostru, şi-au luat soarta în propriile lor mâini şi cu ajutorul frăţesc al Uniunii Sovietice construiesc bazele socialismului.

Invăţătura lui Lenin şi a tovarăşului Stalin a stat la baza luptei de eliberare a poporului chinez, condus de gloriosul său partid comunist în frunte cu tovarăşul Mao Ţze Dun.

Luptele eroice pentru libertate şi independenţă naţională a poporului coreean, vietnamez etc. şi ale oamenilor muncii din ţările capitaliste, sub conducerea partidelor comuniste sunt luminate de farul călăuzitor al învăţăturilor lui Lenin şi Stalin.

Lenin şi Stalin au arătat drumul pe care trebue să-l urmeze tineretul pentru a contribui la construirea vieţii noi, a societăţii comuniste.

Sub steagul lui Lenin şi Stalin, tineretul sovietic, organizat în gloriosul Comsomol Leninist — Stalinist, a repurtat victorii măreţe, pilde vii pentru tineretul din lumea întreagă ca şi pentru tineretul nostru care participă cu avânt la lupta pentru construirea socialismului.

Ca filosof şi ca om de ştiinţă, Lenin a luptat împotriva celor care încercau să submineze bazele materialismului dialectic. Atacând pe filosofii burghezi şi concluziile lor despre o pretinsă « dispariţie a materiei », Lenin a arătat că ultimele descoperiri ale ştiinţei ca: radioactivitatea, electronul şi altele, nu desmint, ci dimpotrivă confirmă că materia există, că lumea este materială şi că legile de desvoltare ale acestei lumi pot fi cunoscute de om, că forţele naturii pot fi stăpânite şi puse în slujba intereselor sale.

Ca teoretician, Lenin a arătat caracterul de ştiinţă vie a doctrinei marxiste, îmbogăţind-o şi complectând-o cu tot ce a dat nou *experienţa mişcării muncitoreşti, cu datele noi* ale ştiinţei, cu formularea noilor legi de desvoltare a capitalismului în perioada imperialismului. Astfel, el a descoperit legea desvoltării inegale şi în salturi a capitalismului în virtutea căreia revoluţia şi victoria socialismului sunt posibile într'o singură ţară sau în câteva ţări luate aparte.

Lenin a desvoltat şi concretizat ideea dictaturei proletariatului formulată în linii generale de Marx şi Engels şi a descoperit Sovietele ca formă a noului stat.

Teoria lui Lenin despre stat şi despre dictatura proletariatului stă la baza organizării statului sovietic ca şi a statului nostru de democraţie populară.

La 30 Decembrie 1951 poporul nostru a sărbătorit patru ani dela întemeierea Republicii Populare Române. Această istorică cucerire este un rezultat al luptelor duse de poporul nostru muncitor în frunte cu Partidul său. In lupta dusă pentru doborîrea monarhiei instituită de moşierime şi burghezie pentru a asigura exploatarea şi subjugarea poporului, Partidul nostru s'a condus după genialele învăţături ale lui Lenin şi ale tovarăşului Stalin. Dacă tineretul cunoaşte azi o desvoltare nemai întâlnită a culturii noastre, dacă el are drum deschis către orice activitate creatoare, aceasta este un rezultat al luptei duse de Partidul nostru pentru doborîrea statului burghezo-moşieresc al cărui reazim principal îl constituia monarhia.

Numai după patru ani dela doborîrea monarhiei şi după primul an al cincinalului, cultura noastră a cunoscut o puternică înflorire. In regimul burghezo-moşieresc 38,2% din populaţia ţării a fost analfabetă, iar 27% semianalfabetă. Numai în ultimii ani, în Republica noastră au învăţat să scrie şi să citească 1.600.000 oameni ai muncii. In anul şcolar 1951—1952 încă jumătate milion de neştiitori de carte au fost alfabetizaţi. In decursul cincinalului vor fi alocate pentru nevoile învăţământului public 40 miliarde lei. A crescut în ţara noastră considerabil numărul diferitelor şcoli şi instituţii de învăţământ. In şcoli se predă o ştiinţă legată de viaţă, de aspiraţiile poporului muncitor.

Invăţământul nostru are un caracter realist ştiinţific. Printre studiile de bază figurează matematica şi fizica. Aceste ştiinţe cunosc o răspândire largă în masele celor ce învaţă. Privind numai către acest sector, al culturii, ne putem da seama cât datorăm lui Lenin şi Stalin întemeitorii Statului Sovietic, al primului stat socialist din lume, exemplu viu pentru Republica noastră Populară.

Nicicând dela moartea lui Marx — scria Comitetul Central al Partidului Comunist Bolşevic al U.R.S.S. la moartea lui Lenin — *istoria măreţei mişcări de desrobire a proletariatului n'a ridicat o figură atât de gigantică cum a fost defunctul nostru conducător, dascăl şi prieten. Tot ce are proletariatul cu adevărat măreţ şi eroic: gândirea neînfricată, voinţa de fier nestrămutată, îndârjită, atât învingătoare, ura sfântă, ura de moarte împotriva robiei şi asupririi, pasiune revoluţionară, care mişcă munţii din loc, credinţă nemărginită în puterea de creaţie a maselor, un uriaş geniu organizatoric; — toate acestea şi-au găsit o întruchipare măreaţă în Lenin, al cărui nume a devenit simbolul lumii noi dela Apus la Răsărit şi dela Miază-Noapte la Miază-Zi*[1]).

Lenin a murit, dar el continuă să trăiască printre noi prin operele sale, prin rezultatele practice ale luptei uriaşe dusă de el. Avem fericirea că opera sa este continuată de cel mai credincios tovarăş al său, de tovarăşul Stalin.

Sub conducerea înţeleaptă a acelui ce este Lenin al vremurilor noastre, sub conducerea tovarăşului Stalin, cresc neîncetat forţele păcii şi ale socialismului, se îmbogăţeşte neîntrerupt comoara cea mai de preţ a culturii omeneşti, marxism-leninismul.

Tineretul din fabrici, de pe ogoare şi din şcoli, care se bucură azi de o viaţă liberă datorită Marii Uniuni Sovietice creată de geniul lui Lenin şi al tovarăşului Stalin, are sarcina de cinste de a păstra şi de a contribui la consolidarea cuceririlor poporului nostru. Muncind pentru îndeplinirea şi depăşirea planului, învăţând temeinic, tineretul nostru va contribui la întărirea lagărului păcii şi socialismului, lovind în clica aţâţătorilor la un nou război.

---

[1]) Lenin — Scurtă expunere a vieţii şi activităţii sale. Editura P.M.R. 1951, pag. 333.

DISTANȚELE CEREȘTI

Călin Popovici

Astronomii nu au putut măsura distanțele până la stelele cele mai apropiate, decât începând de acum o sută de ani. Distanța până la Lună a fost apreciată just și de unii astronomi din antichitate — Aristarc din Samos, spre exemplu — cât despre distanța până la Soare, această determinare este o dobândire a astronomiei moderne. Aci nu ne vom ocupa de metodele de determinare ale distanțelor din sistemul solar, ci de acelea relative la stele și alte astre foarte îndepărtate. Totuși deoarece depărtarea Pământ-Soare, semi axa mare a orbitei pământești, este unitatea fundamentală pentru măsurat distanțele astronomice, vom spune câteva cuvinte despre ultimele măsuri ale acestei unități.

Se numește paralaxă orizontală ecuatorială a Soarelui, unghiul sub care se vede din centrul Soarelui raza ecuatorului Pământului, când Soarele se găsește la orizontul locului a cărui rază se vede sub acest unghiu *p*. (Fig. 1).

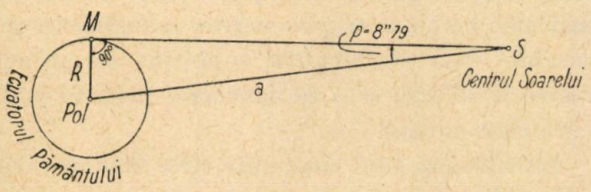


Fig. 1. — Paralaxa orizontală ecuatorială a Soarelui.

Pentru unghiuri mici avem:

$$ap'' = 206\,265\ R$$

$$a = \frac{206\,265\ R}{p''}$$

Se știe că paralaxa Soarelui se determină indirect și anume din observații ale unei planete care vine în apropierea Pământului, când se măsoară distanța la acea planetă. Din aplicarea legii a treia a lui Kepler, cunoscând orbita planetei observate, se deduce apoi distanța până la Soare. Legea a treia a lui Kepler permite să ne reprezentăm sistemul solar într'o scară arbitrară. De îndată ce am determinat o distanță între două corpuri din acest sistem în km, spre exemplu, vom putea găsi cât valorează scara arbitrară și deci toate depărtările dintre corpurile sistemului solar în km, inclusiv distanța până la Soare. (Fig. 2).

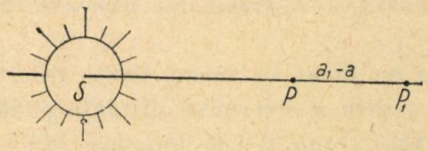


Fig. 2. — Cazul opoziției unei planete P_1 aflate în planul eclipticei, la distanța de Soare a_1 (semiaxa mare a orbitei) și de masă m_1. Datele fără indici se referă la pământ, P. - M masa Soarelui, S.

Legea III-a a lui Kepler:

$$\frac{a_1^3}{a^3} = \frac{T_1^2}{T^2}\,\frac{m_1 + M}{m + M} \qquad a_1^3 = a^3 \cdot \frac{T_1}{T^2} \cdot \frac{m_1 + M}{m + M}$$

$$a_1 - a = a\left[\sqrt[3]{\frac{T_1^2}{T^2} \cdot \frac{m_1 + M}{m + M}} - 1\right] = n \text{ km} \quad \text{și deci } a \text{ în km.}$$

Planeta mică Eros vine din 37 în 37 ani foarte aproape de pământ, până la 0,149 din distanța Soare-Pământ, sau circa 22 milioane km.

La opoziția din 1931 au participat numeroase observatoare la măsurarea distanței până la Eros și din observațiile acestea s'a dedus, după calcule care au durat 10 ani, cea mai precisă determinare a distanței Pământ-Soare. S'a găsit astfel paralaxa orizontală ecuatorială a Soarelui 8″,790. Luând raza ecuatorială a Pământului 6378,388 km, se obține pentru semiaxa mare a orbitei pământești 149 670 000 km. Această valoare diferă puțin de aceea acceptată până de curând de 8″,80 pentru paralaxa Soarelui și 149 500 000 km pentru *a*. Noua valoare este aceea care este acum general utilizată în astronomie.

Pentru a determina distanța până la Soare sunt și alte metode, asupra cărora nu insistăm aci. Apoi se pot utiliza și alte planete în felul cum a fost utilizat Eros. In 1949 a fost descoperită o mică planetă, care a primit denumirea de Icarus, după numele eroului legendar (care încercând să se înalțe cu aripi de ceară către Soare, a căzut pe Pământ), fiindcă acest corp ceresc vine cel mai aproape de

Pământ după satelitul nostru Luna. La periheliu el pătrunde înlăuntrul orbitei lui Mercur, la 0,24 unităţi astronomice de Soare, ca la afeliu să ajungă dincolo de Marte (1,68 u.a.).

Această mică planetă poate trece în condiţii favorabile la 6 000 000 km de Pământ, de 3 ori $^1/_2$ mai aproape ca Eros şi la 16 ori depărtarea Lunei. Insă numai după un studiu amănunţit al orbitei acestei mici planete se va putea utiliza apropierile ei de Pământ la determinarea paralaxei Soarelui.

Astronomii au făcut în trecut multe încercări infructuoase pentru a determina distanţa până la unele stele. Abia acum 100 de ani, mai exact în anul 1837, astronomul rus V. I. Struve a măsurat primul paralaxa unei stele şi anume a stelei Wega puţin înainte de a se fi determinat paralaxele Stelelor 61 din Lebăda şi a stelei α Centauri, de către Bessel şi Henderson respectiv. Se ştie care este principiul măsurilor de paralaxă trigonometrică a stelelor: se măsoară în cursul anului distanţa unghiulară a stelei cercetate de stelele vecine, în special de acelea care sunt foarte puţin strălucitoare şi deci probabil foarte îndepărtate. Dacă steaua cercetată este destul de apropiată, atunci în cursul anului ea va descrie o mică orbită aparentă eliptică în câmpul stelelor de reper, elipsă cu atât mai turtită cu cât steaua este mai apro ape de ecliptică unde orbita aparentă se reduce la un segment de dreaptă. Paralaxa unei stele este aşa dar unghiul sub care se vede din stea semiaxa orbitei Pământului când aceasta este normală pe direcţia Pământ-stea. (Fig. 3).

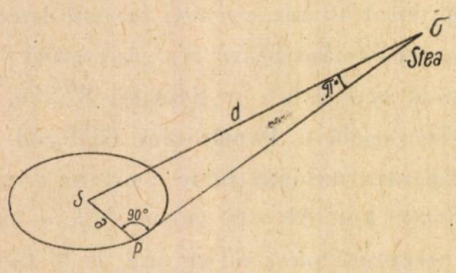


Fig. 3. — *Paralaxa π'' a unei stele*:

$$\pi'' = \frac{a}{d} 206265 \qquad d = \frac{a}{\pi''} 206265 \qquad d_{\text{parseci}} = \frac{1}{\pi''}$$

Situaţia pe bolta cerească, f ţă de stelele de reper în decursul anului, este dată de figura alăturată. (Fig. 4).

Astronomii măsoară actualmente paralaxele trigonometrice ale stelelor pe cale fotografică, făcând câteva poze anual separate două câte două la câte 6 luni interval, pozele fiind făcute ca să se determine cât mai bine elipsa paralactică şi în special axa ei mare, pentru care se aleg anume epoci ale anului pentru fiece stea în parte. Se ţine seama deasemeni de mişcarea proprie a stelei. Intrucât unghiurile de măsurat sunt foarte mici reducerea observaţiilor se face cu multă grijă, luându-se în considerare toate cauzele de erori posibile. Astfel se ţine seama de refracţia diferenţială care poate să deplaseze mai mult steaua noastră decât steaua

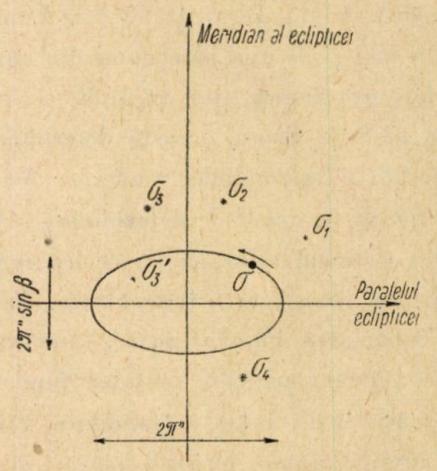


Fig. 4. — Elipsa de paralaxă descrisă de steaua apropiat de paralaxă π'' în câmpul unor stele depărtate σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 β, latitudinea stelei (mijlocie).

de reper, dacă cele două stele n'au aceeaşi înălţime deasupra orizontului, etc. Utilizând lunete cu mari lungimi focale, observând şi reducând observaţiile cu toată grija, astronomii au reuşit să determine paralaxe până la 0″,005, când eroarea de determinare este egală cu însăşi paralaxa stelei. Cele mai mici paralaxe trigonometrice actualmente măsurabile sunt cât unghiul subîntins de un milimetru la 41 km, ceea ce dovedeşte precizia măsurilor astronomice.

Actualmente sunt cunoscute circa 9000 paralaxe stelare determinate pe cale trigonometrică, majoritatea de câteva observatoare, care s'au specializat în această muncă. Cele mai îndepărtate stele la care ajunge această metodă sunt la 200 parseci, circa 652 ani lumină, însă pentru acestea eroarea este de ordinul al distanţei însăşi. In manualul de Astronomie de clasa XI medie sunt date unităţile astronomice de distanţă, aşa că nu are rost să insistăm aci prea mult asupra lor. Parsecul este distanţa unde raza orbitei pământeşti se vede sub unghiul de 1″, el valorează 206 265 raze ale orbitei pământului sau $30{,}87 \times 10^{12}$ km. Lumina face într'un an $9{,}460 \times 10^{12}$ km, ceeace reprezintă anul lumină, iar un parsec are 3,26 ani lumină.

De un deosebit interes sunt stelele cele mai aproape de noi fiindcă ele ne dau o imagine justă asupra populaţiei stelare a universului: asupra strălucirilor absolute ale stelelor, proporţia piticelor

albe, proporţia stelelor simple şi multiple, etc. Aceasta deoarece stelele pe care le vedem de o anume strălucire mijlocie aparentă sunt sau stele apropiate de strălucire mijlocie sau stele depărtate foarte strălucitoare, aşa că proporţiile sunt complect falsificate dacă ne referim la străluciri aparente. Deaceea dăm aci lista celor 12 stele, cele mai aproape de Soare, cu paralaxa mai mare sau egală cu 0″,3, deci cu distanţa mai mică ca 3,3 parseci. Această listă este dată după o compilare recentă a măsurilor de paralaxă. Se vede marea proporţie de stele pitice şi de stele duble în jurul Soarelui.

punct de convergenţă şi se cunoaşte în plus viteza radială şi mişcarea proprie a unei stele din roi se găseşte uşor depărtarea roiului. (Fig. 5).

La peste 2000 de stele duble s'au determinat paralaxele hipotetice sau paralaxe dinamice cum li se mai zice din legea III-a a lui Kepler şi din legătura care este între massele şi luminozităţile stelelor. Dacă π'' este paralaxa stelei, iar a'' semiaxa mare a sistemului în secunde şi în unităţi astronomice a aplicându-se legea 3-a a lui Kepler se are $a^3 = (M_1 + M_2) P^2$ sau

$$\pi''^3 = \frac{a''^3}{(M_1 + M_2) P^2},$$

LISTA STELELOR MAI APROPIATE

Nr.	Numele stelei	Poziţia 1900		Magnitudine aparentă vizuală	Tip spectral	Mişcare proprie	Paralaxă	Distanţa		Magnitudine absolută vizuală
		Ascensia dreaptă	Declinaţia					In parseci	In ani lumină	
1*	α Centauri	$14^h\ 32^m,8$	$-60°25'$	$0^m g,3$	G_4	3″,68	0″,761	1,31	4,3	$+ 4^m g,7$
2	α Centauri C (proxima)	$14^h\ 22^m,9$	$-62°15'$	11	M	3″,85	0″,761	1,31	4,3	15,4
3*	Steaua lui Barnard .	$17^h\ 52^m,9$	$+ 4°25'$	9,7	M_5	10″,30	0″,350	1,89	6,1	13,3
4**	Lalande 21185 . . .	$10^h\ 57^m,9$	$+ 36°38'$	7,6	M_2	4″,78	0″,411	2,43	7,9	10,7
5**	Luyten 726-8 A . .	$1^h\ 34^m,0$	$-18°29'$	11,9	MGe	3″,35	0″,41	2,44	7,9	15,6
6	Wolf 359	$10^h\ 51^m,6$	$+ 7°37'$	13,5	M_5	4″,84	0″,408	2,45	8,0	16,6
7*	Sirius	$6^h\ 40^m,7$	$-16°35'$	$-1,6$	A_0	1″,32	0″,381	2,62	8,6	1,3
8	Ross 154	$18^h\ 43^m,6$	$-23°57'$	11	M_4	0″,67	0″,350	2,86	9,3	13,7
9	Ross 248	$23^h\ 37^m,0$	$+ 43°40'$	12,2	M_6	1″,58	0″,317	3,15	10,3	14.7
10	Luyten 789-6	$22^h\ 33^m,0$	$-15°52'$	12,3	M_5	3″,27	0″,315	3,17	10,3	14,8
11	ε Eridani	$3^h\ 28^m,2$	$-\ 9°48'$	3,8	K_0	0″,97	0″,305	3,33	10,7	6,2
12*	Procyon A	$7^h\ 34^m,1$	$+ 5°29'$	0,5	F_3	1″,25	0″,295	3,39	11,0	2,9

Sunt 40 stele cu paralaxa $\pi'' > 0''$,2 parseci. Nu sunt decât circa 100 stele cunoscute cu paralaxa $\pi'' > 0''$,11. Jumătate din paralaxele trigonometrice cunoscute sunt sub $\pi'' < 0''$,02, aşa încât eroarea cu care sunt acestea determinate este procentual destul de mare şi trece de 25%. Pentru a sonda spaţiile cereşti îndepărtate, astronomii au imaginat alte metode, unele din ele aplicându-se stelelor individuale, altele grupurilor de stele, dând paralaxe mijlocii ale acestor grupe. Cu aceste metode s'a reuşit să se capete o idee justă despre mărimea şi structura universului nostru.

Una din aceste metode numită a roiurilor de stele, se bazează pe faptul că roiurile de stele deschise, cum sunt Pleadele, Hyadele, etc., ne permit să determinăm direcţia în spaţiu a vitezelor stelelor roiului, viteze toate paralele între ele. Stelele roiului au mişcări proprii care converg către un punct pe sfera cerească. Dacă se determină acest

în care M_1 şi M_2 massele celor două stele se iau la început egale cu 1, iar apoi se aproximează aceste câtimi mai bine din relaţia care leagă massele şi luminozităţile stelelor, determinându-se noile valori ale masselor din luminozităţile stelelor deduse din magnitudinile aparente şi paralaxele din prima aproximaţie.

Se determină, din prima valoare a paralaxei π'', $M'_g = m_g + 5 + 5 \cdot \log \pi''$, iar cu valoarea M' se intră în relaţia massă-luminozitate, obţinându-se $M' = f(M'_g)$. Cu M'_1 şi M'_2 se intră apoi în formula care dă paralaxa găsindu-se valoarea π'', ameliorată etc.

Se poate apoi găsi paralaxa grupurilor de stele luând ca bază nu mişcarea Pământului în jurul Soarelui, ci însăşi mişcarea Soarelui într'un an, baza de măsurare fiind astfel mult mai mare, obţinându-se aşa numitele paralaxe seculare. Aci este o dificultate în a se găsi paralaxe individuale, de-

* Stele duble, ** Stele duble cu un satelit invizibil (triple).

oarece stelele au şi ele mişcări particulare. Numai luând grupe de stele putem spune ceea ce se întâmplă în mijlociu cu mişcările lor particulare şi deci să deducem paralaxe mijlocii ale grupelor de stele.

Se mai pot determina paralaxele stelelor din fenomenul rotaţiei diferenţiale a galaxiei, după deplasarea liniilor în spectrul unor grupe de stele care participă la această rotaţie, rotaţie diferenţială cunoscută din alte măsuri. Din viteze de rotaţie teoretice şi din deplasarea observată în spectru se deduce distanţa ştiindu-se legea rotaţiei Galaxiei.

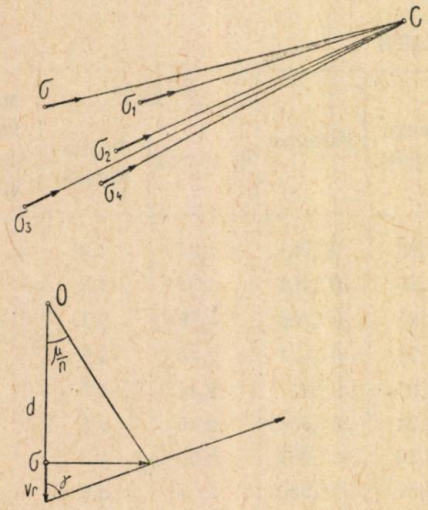


Fig. 5. — *Paralaxele roiurilor mişcătoare.* Stelele σ ale roiului au mişcări proprii convergând în C pe sfera cerească. Fie arcul σC = γ. O, observatorul, vede direcţia stelei σ, formând cu viteza stelei, unghiul γ.μ'' fiind mişcarea proprie a stelei σ pe an, *n* numărul secundelor într'un an *d* distanţa stelei, v_r viteza ei radială.

$$v_r \operatorname{tg}\gamma = d \operatorname{tg}\frac{\mu''}{n} = d\,\frac{\mu''}{n.206265}$$

$$d = \frac{n.206265}{\mu''}\, v_r \operatorname{tg}\gamma$$

Desigur cele spuse mai sus nu sunt decât schiţe foarte sumare, care trebue să fie adâncite şi desvoltate, pentru a fi înţelese, bazându-se pe date care nu sunt toate la dispoziţie elevilor de curs mediu. In manualul de astronomie se arată ce este o magnitudine absolută M_g şi cum se calculează ea dacă se cunoaşte paralaxa stelei, π'', şi magnitudinea ei aparentă m_g şi anume,

$$M_g = m_g + 5 + \log \pi''.$$

Dacă invers se cunoaşte M_g şi m_g se poate deduce π'' şi $d_{\text{parseci}} = \frac{1}{\pi''}$. Această metodă a determinării paralaxelor din magnitudini absolute este aceea care a lărgit cel mai mult cunoştinţele noastre despre distanţele din univers.

Din studiul variabilelor de tip δ Cepheu şi R R Lyrae s'a ajuns la concluzia că se poate determina M_g din perioada de variaţie a strălucirii acestor astre. Astfel s'au putut determina distanţele tuturor grupărilor de stele, îngrămădiri globulare, nebuloase spirale, unde se găseau asemenea aştri. Stelele acestea fiind foarte strălucitoare, se pot vedea până la mari distanţe în spaţiu. In propria noastră galaxie studiul distribuţiei în spaţiu a acestor variabile, ne dă informaţii preţioase asupra structurii ei. Astronomii sovietici Cucarchin şi Parenago au utilizat stelele variabile pentru studiul structurii Galaxiei cu un deosebit succes.

Din observaţii delicate ale spectrelor s'a putut deduce magnitudinea absolută a stelelor, cu o preciziune de ± 0,4 m_g, dacă steaua este pitică sau gigantă şi ce anume strălucire absolută are. Cu aceste magnitudini absolute deduse spectroscopic, s'au calculat paralaxele spectroscopice cu o eroare maximă de circa 20%, indiferent de distanţa astrului. Peste 6000 de astfel de paralaxe au fost determinate, ele au permis să se îmbogăţească mult cunoştinţele noastre despre structura universului. Fără un examen atât de amănunţit al spectrelor, se poate spune dacă steaua este gigantă, subgigantă, pitică, subpitică, etc., utilizându-se spectre de mică dispersiune luate cu prisma obiectiv. Astfel fixându-se locul stelei în diagrama spectru luminozitate în diferitele ei ramuri şi cunoscându-se şi strălucirea aparentă a stelei, se are depărtarea ei aproximativă. Această metodă deşi duce la rezultate ce pot diferi mult de realitate pentru stele individuale, pentru grupuri ea ne permite o determinare sigură a paralaxei lor. Metoda este foarte eficientă putând să fie utilizată uşor la mii de stele. Cu ajutorul ei se poate pătrunde în spaţiu până la 10—20 000 parseci, căpătându-se informaţii în massă despre structura sistemului nostru stelar.

Ar mai fi de adăogat, pentru obiectele galactice metode de determinare a distanţelor lor din intensitatea liniilor de absorbţie interstelare ca şi din culoarea obiectelor îndepărtate datorită materiei interstelare ce se interpun între ele şi noi. In fine obiectele foarte îndepărtate, ca îngrămădiri globulare şi nebuloase spirale au distanţele determinate din compararea strălucirii lor totale absolute medii şi a celei aparente observate, sau din diametrele medii lineare şi cele unghiul re observate. Toate aceste metode cer fie care în parte explicaţii mai lungi spre a fi înţeles e. Aci vrem să revenim asupra unui punct fundamental în determinările de distanţă pe cale fotometrică: ele presupun că nu există o absorbţie a luminii în

spaţiul dintre stele. Încă de acum o sută de ani, V. I. Struve a emis părerea că o astfel de absorbţie există. Ulterior alţi astronomi ruşi şi sovietici au desvoltat aceste idei, încât se poate spune că savanţii ruşi şi sovietici au o întâietate în ceeace priveşte dovedirea existenţei absorbţiei interstelare, problemă de o capitală însemnătate în astrofizică. B. A. Voronţov-Veliaminov, V. Ambarţumian şi alţi astronomi, observatoare ca cel dela Abastumani, Simeis, Pulcovo, Moscova, se ocupă în special de problemele legate de materia interstelară.

Distanţele astrelor îndepărtate sunt falsificate din cauza existenţii absorbţiei materiei interastrale, astrele părând mai îndepărtate decât sunt în realitate. Dimensiunile care au fost date Galaxiei noastre au fost treptat reduse, astăzi nemai luându-se cifra de 100 000 ani lumină ci una cu 25—30% mai mică. Absorbţia interstelară nu se produce pentru toate razele la fel: cele albastre sunt mai mult absorbite. Deaceea astrele îndepărtate par roşiatice. Dar tocmai aceasta este un avantagiu fiindcă din coloarea astrelor îndepărtate se poate deduce mărimea absorbţiei şi ţinându-se seama de ea se pot corecta distanţele deduse pe cale fotometrică. In spaţiul dintre Galaxii nu există însă absorbţie.

Astronomii n'au la dispoziţie decât licăriri deabia vizibile ale unor astre foarte îndepărtate şi totuşi ei au putut să determine atâtea particularităţi ale astrelor începând cu distanţele şi sfârşind cu compoziţia lor chimică. Cele mai îndepărtate nebuloase spirale vizibile sunt la o distanţă de un miliard ani lumină şi totuşi porţile universului nu s'au închis asupra noastră: universul este nesfârşit şi ştiinţa va deslega treptat toate tainele sale. Astronomia ne arată că lumea nu are nici început nici sfârşit, atât în spaţiu cât şi în timp, prin aceasta ea ne dă argumente ştiinţifice de necombătut împotriva teoriilor creaţioniste şi idealiste.

CE ESTE FENOMENUL DOPPLER-FIZEAU?

Conf. univ. ***N. Stănescu***

In Culegerea de «Probleme de Fizică» pentru învăţământul mediu, găsim la pag. 97 câteva probleme care ne surprind la prima citire. De exemplu problema 655: «O sirenă emite un sunet a cărui frecvenţă este de 660 vibraţii pe secundă; un observator care se apropie de ea merge cu viteza de 18 km/h. Ce frecvenţă va avea sunetul auzit de observator?». Imediat ne întrebăm: oare sunetul perceput de ureche nu este tocmai sunetul produs şi trimis urechii de către izvorul sonor?

Rezolvarea acestei probleme îndreaptă atenţia noastră către un fenomen fizic, care de obicei trece neobservat la o primă studiere a fizicii.

Uşor putem răspunde la întrebarea ce este sunetul. E o impresie acustică produsă în urechea noastră de către vibraţiile mecanice ale corpurilor elastice, vibraţii care sosesc la ureche sub forma de unde sonore ale aerului atmosferic, cu o iuţeală de 340 m/s la temperatura normală. Sunetul perceput de ureche este mai ascuţit ori mai grav după cum numărul de unde pe care le primeşte urechea pe secundă, adică *frecvenţa* ν a sunetului, este mai mare sau mai mică. Dacă frecvenţa este mai mare decât vreo 20 000 hertzi ori mai mică decât 20 hertzi, urechea nu mai percepe niciun sunet, deşi ea primeşte unde elastice. O schimbare cantitativă a frecvenţei undelor a dus la o schimbare calitativă a însuşirilor lor. Undele elastice cu frecvenţa de peste 20 000 hertzi se numesc *ultrasunete* şi, deşi ele nu impresionează urechea, au însuşiri ce sunt mult folosite de tehnică (vezî articolul corespunzător din *Revista Matematică şi Fizică* Nr. 9, 1951); iar cele cu frecvenţa sub 20 hertzi se numesc *infrasunete.*

Timpul în care se produce o vibraţie completă se numeşte *perioadă* T, iar distanţa dealungul căreia se propagă unda în timpul unei perioade poartă numele de *lungime de undă* λ. Aceste elemente mecanice ale unei unde, oricare ar fi natura ei, sunt legate între ele prin relaţia evidentă:

$$\lambda = VT = \frac{V}{\nu} \qquad (1)$$

unde V este iuţeala de propagare a undei.

In toate aceste consideraţiuni n'am adâncit o anumită latură a fenomenului acustic. Atunci când ascultăm acordurile melodioase ale unei viori nu ne îndoim un singur moment că, pentru a auzi nota la_3, coarda trebue să vibreze de 435 ori pe secundă. Dar undele sonore părăsesc coarda, se propagă prin aer şi apoi sosesc la ureche. Ce s'ar întâmpla bunăoară dacă undele sonore, după ce au părăsit izvorul sonor şi se propagă prin aer, ar putea fi îndesite ori rărite într'un fel oarecare?

In primul caz urechea ar primi impulsuri sonore cu o frecvenţă mai mare decât cea reală a sunetului emis de izvorul sonor, deci ar percepe un sunet mai înalt decât cel real produs de izvor, iar în cazul al doilea lucrurile s'ar petrece invers. Prin mişcarea observatorului, a izvorului sonor, ori a ambelor deodată, faţă de mediul prin care se propagă sunetul — aerul — se poate realiza această schimbare aparentă a frecvenţei sunetelor, iar fenomenul se numeşte efect Doppler, după numele descoperitorului său. In prezentul articol vom căuta să arătăm în ce constă acest fenomen şi la ce consecinţe duce folosirea lui.

Fenomenul a fost descoperit de către fizicianul Doppler din Praga în anul 1842. El a găsit că atunci când izvorul de unde sonore şi observatorul care le primeşte se mişcă unul faţă de altul, urechea observatorului primeşte într'o secundă *mai multe vibraţiuni* când *distanţa* dintre el şi izvor *scade*, iar când această *distanţă creşte*, urechea observatorului primeşte *mai puţine vibraţiuni* pe secundă decât atunci când ar sta pe loc. Mulţi dintre noi au observat flueratul unei locomotive care trece prin dreptul nostru. Când vine spre noi, flueratul ei pare mai ascuţit decât în realitate, iar când trece prin dreptul nostru şi se îndepărtează, sunetul coboară brusc spre unul mai grav. Să analizăm diferitele cazuri ce se pot întâmpla pentru a prinde sensul fizic al fenomenului.

Mai întâi vom cerceta cazul când *izvorul de unde I este nemişcat* în aer, iar *observatorul O se apropie de izvor*. Înălţimea sunetului perceput depinde de numărul de unde sonore ce-i sosesc urechii într'o secundă. Ca să ne dăm seama de felul cum poate varia aparent acest număr de unde, să imaginăm un fenomen mecanic analog. Să ne închipuim că prin faţa noastră defilează necontenite şiruri de biciclişti cu iuţeala constantă de 10 m/s. Dacă distanţa dintre şiruri este de 1 m, trec pe dinaintea noastră 10 şiruri de biciclişti în fiecare secundă. Dar dacă, fără ca aceştia să schimbe ceva în mişcarea lor, noi am merge în întâmpinarea lor cu o iuţeală de 4 m/s, ori în aceeaşi direcţie cu ei? Mergând în sens opus cu ei lucrurile se petrec ca şi cum noi am sta pe loc, iar bicicliştii s'ar mişca cu 14 m/s, deci am întâlni 14 şiruri pe secundă. Mergând însă în acelaşi sens cu ei, vom întâlni numai 6 şiruri de biciclişti în fiecare secundă. Lucrurile se petrec asemănător şi cu undele sonore, care sosesc la ureche în şiruri succesive aşa cum trec şirurile de biciclişti prin faţa noastră. Izvorul sonor I este nemişcat faţă de aer şi emite sunetul de frecvenţă ν ce se propagă cu iuţeala V, iar observatorul O se apropie de izvor cu iuţeala v (fig. 1). Distanţa dintre undele succesive λ rămâne aceeaşi oricum s'ar mişca observatorul. Dacă O ar sta pe loc ar primi în fiecare secundă ν unde; apropiindu-se de izvor lucrurile se petrec ca şi cum el ar sta pe loc, iar undele ar veni spre el cu iuţeala $V + v$.

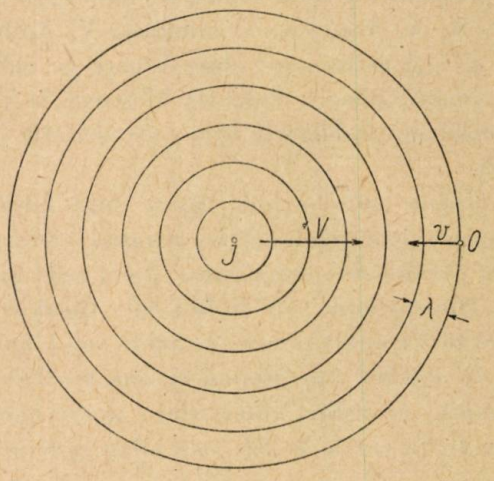


Fig. 1.

Pentru acest observator relaţia fundamentală (1) devine:

$$\lambda = \frac{V + v}{\nu'}$$

şi putem scrie:

$$\lambda = \frac{V}{\nu} = \frac{V + v}{\nu'}$$

de unde scoatem:

$$\nu' = \nu \cdot \frac{V + v}{V} \qquad (2)$$

Cu alte cuvinte frecvenţa aparentă ν' a sunetului perceput de urechea observatorului ce se apropie de izvor este mai mare decât cea reală ν. emisă de izvor. *Observatorul percepe un sunet mai înalt decât cel emis în realitate de izvorul sonor.*

Dacă observatorul s'ar depărta de izvor cu iuţeală v, el ar lăsa în urmă undele înşiruite dealungul segmentului v, aşa încât într'o secundă va primi mai puţine unde. Pentru el lucrurile se petrec ca şi cum undele i-ar sosi cu iuţeala $V - v$, el stând nemişcat. In acest caz relaţia fundamentală (1) devine $\lambda = \frac{V - v}{\nu''}$ de unde deducem ca mai sus:

$$\nu'' = \nu \cdot \frac{V - v}{V}. \qquad (3)$$

Prin urmare observatorul aude *un sunet mai grav decât este el emis în realitate de izvorul sonor.*

Relaţiile (2) şi (3) le putem contopi în una singură:

$$\nu_1 = \nu \frac{V \pm v}{V} = \nu\left(1 \pm \frac{v}{V}\right) \qquad (4)$$

unde ν_1 este *frecvenţa aparentă* a undelor primite de observator, iar ν este *frecvenţa lor reală*, aşa cum sunt produse de izvor. In concluzie, mişcarea observatorului *nu influenţează lungimea de undă* a sunetului emis, dar *se modifică iuţeala de propagare a sunetului faţă de observator*, ceea ce are ca urmare *schimbarea aparentă a frecvenţei sunetului.*

In relaţia (4) se ia semnul + când observatorul se apropie de izvor şi semnul — când observatorul se depărtează de izvor.

Înţelegem dar că numai când stăm pe loc faţă de aer auzim sunetul adevărat produs de un izvor oarecare; de îndată ce ne mişcăm sunetul pare mai subţire ori mai grav, după cum ne apropiem sau ne depărtăm de izvor. Dacă ne-am apropia cu o iuţeală egală cu iuţeala de propagare a sunetului, formula (4) ne arată că am auzi *octava superioară* a sunetului produs în realitate, căci $\nu_1 = 2\nu$. Ne dăm seama de rolul acestui fenomen astăzi când avioanele cu reacţie au iuţeli comparabile cu a sunetului.

Să analizăm acum şi celălalt caz, când *observatorul stă pe loc*, iar *izvorul sonor se mişcă cu iuţeala* u. Ne amintim că undele sunt sfere concentrice având izvorul ca centru, dacă acesta e nemişcat. Când izvorul se mişcă, lucrurile sunt ceva

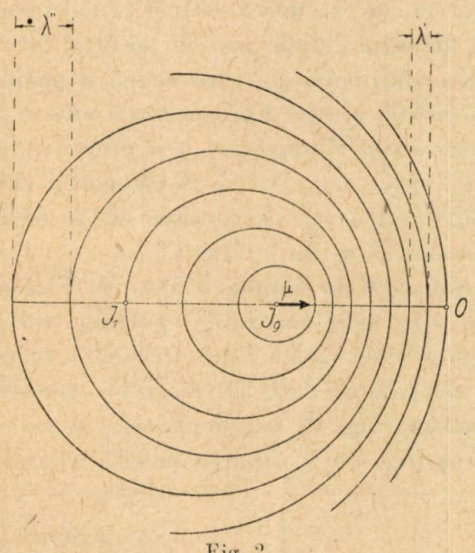


Fig. 2.

mai complicate. Faţă de o undă, cea care urmează este emisă dintr'un punct mai apropiat de prima, în direcţia mişcării izvorului şi mai depărtat în sens opus. Ca urmare undele par îndesite în direcţia mişcării izvorului sonor (fig. 2) şi mai rărite, în urma izvorului.

Diferenţa razelor undelor sferice este aceeaşi, adică λ, dar distanţa dintre undele succesive adică λ_1 e mai mică în sensul mişcării şi mai mare în sensul opus. Ca urmare, mişcarea izvorului *nu mai modifică iuţeala relativă de propagare* a sunetului, ci distanţa dintre unde, adică *lungimea de undă pentru observator şi deci frecvenţa.* Aşa dar mişcarea observatorului şi cea a izvorului au rol fizic diferit, producând schimbări diferite prin natura lor. Pentru ureche însă rezultatul este asemănător, cum vom vedea.

Izvorul sonor I se deplasează cu iuţeala u (fig. 3) spre observatorul O. A doua undă este emisă din

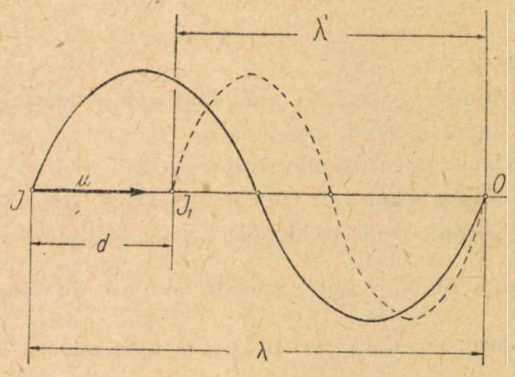


Fig. 3.

punctul I_1, căci izvorul s'a mişcat cu distanţa $d = uT$ în timpul în care prima undă a mers din I în O. Pentru observatorul O unda are o lungime λ' mai scurtă cu distanţa d. Lungimea de undă aparentă λ' va fi deci:

$$\lambda' = \lambda - d = VT - uT = \frac{V}{\nu} - \frac{u}{\lambda} = \frac{V-u}{\nu}.$$

Dar o lungime de undă aparentă λ' înseamnă şi o frecvenţă aparentă ν' dată de:

$$\lambda' = \frac{V}{\nu'}$$

şi atunci obţinem:

$$\frac{V}{\nu'} = \frac{V-u}{\nu}$$

de unde scoatem:

$$\nu' = \nu \cdot \frac{V}{V-u}. \qquad (5)$$

Frecvenţa aparentă ν' este mai mare decât cea reală ν: pentru observator *sunetul pare mai înalt decât cel emis de izvorul sonor.* Un raţionament asemănător pentru cazul când izvorul se depărtează de observator ne arată că frecvenţa aparentă ν'' este dată de:

$$\nu'' = \nu' \frac{V}{V+u} \qquad (6)$$

și este mai mică decât cea reală. Când izvorul se depărtează observatorul aude un *sunet mai grav decât este cel emis de izvor.*

Putem realiza o experiență simplă pentru a dovedi acest lucru. Introducem un fluer la capătul unui tub de cauciuc de 1,5—2 m lungime, și rotim tubul deasupra capului ca pe o praștie, suflând pe la celălalt capăt al tubului. Se aude un sunet al fluerului care este când mai înalt, când mai grav, după cum fluerul se apropie ori se depărtează de noi.

Formulele (5) și (6) le putem contopi în una singură:

$$\nu_3 = \nu \frac{V}{V \mp u} \qquad (7)$$

luându-se — dacă izvorul se apropie + dacă izvorul se depărtează de observator.

Dar ce se întâmplă când și izvorul și observatorul se mișcă unul față de altul? Dacă observatorul se apropie (sau se depărtează) cu iuțeala v frecvența reală ν este variată de un număr $\frac{V \pm v}{V}$ de ori; iar dacă izvorul se apropie sau se depărtează cu iuțeala u frecvența este variată de $\frac{V}{V \pm u}$ ori, adică în total frecvența reală ν devine ν_3 fiind variată din ambele cauze:

$$\nu_3 = \nu \frac{V \pm v}{V} \cdot \frac{V}{V \mp u}$$

sau

$$\nu_3 = \nu \frac{V \pm v}{V \mp u}. \qquad (8)$$

Se ia + la apropierea observatorului, respectiv depărtarea izvorului și — la depărtarea observatorului, respectiv apropierea izvorului.

Acum suntem în măsură să rezolvăm problema enunțată la începutul articolului. Aplicăm formula (2) în care $V = 340$ m/s, $\nu = 660$ Hz și $v = 18$ km/h $= \frac{18000}{3600} = 5$ m/s.:

$$\nu_1 = 660 \frac{340 + 5}{340} = 669{,}6 \text{ Hz}$$

adică sunetul auzit are aproape 10 vibrații pe secundă mai mult decât sunetul real.

Verificarea concluziilor de mai sus au fost făcute de Fizeau (1848) și Belopolski (1895).

Fenomenul Doppler a fost aplicat și undelor luminoase de către Fizeau. In cazul luminii însă nu mai poate fi vorba de iuțeală relativă față de mediul de propagare a undelor. Iuțeala luminii c este totdeauna aceeași. Fenomenul depinde numai de iuțeala relativă dintre observator și izvorul luminos.

Să considerăm relația (7) și să facem împărțirea $\frac{V}{V \mp u}$; obținem:

$$\frac{V}{V \mp u} = 1 \pm \frac{u}{v} + \frac{u^2}{v^2} \pm \frac{u^3}{v^3} + \ldots\ldots$$

Dacă $v \ll V$ ceeace se întâmplă în cazul luminii, deoarece iuțelile mecanice sunt mai mici decât iuțeala luminii, se pot neglija termenii începând cu $\frac{u^2}{v^2}$, adică începând cu termenul de *ordinul al doilea.* Deaceea fenomenul Doppler în optică se numește efect optic de mișcare de ordinul întâi. Se observă ușor că în asemenea condiții relațiile (4) și (7) sunt identice:

$$\nu_1 = \nu \left(1 \pm \frac{v}{c}\right) \qquad (9)$$

unde c este iuțeala luminii în vid. Fenomenul a fost verificat experimental de Belopolski (1900), Galițin (1907), Fabry (1919) și a fost găsit în acord cu deducțiile teoretice.

In Optică fenomenul Doppler-Fizeau a prilejuit aplicațiuni foarte interesante și utile. Analiza spectrală ne-a permis cercetarea compoziției chimice a astrelor și nebuloaselor, dovedindu-le ca fiind gemene ale planetei pe care o locuim. Combinată cu fenomenul Doppler-Fizeau ne-a făcut cunoscute și iuțelile cu care se mișcă astrele prin Univers.

Un element chimic are un spectru format din anumite linii colorate, care ocupă o poziție fixă. După poziția acestor linii spectrale putem ști care este elementul chimic care le-a produs (principiul analizei spectrale). Dar dacă elementul chimic se află într'o stea care se apropie ori se depărtează de Pământ ce se va întâmpla?

Răspunsul îl dă fenomenul Doppler-Fizeau; dacă steaua vine spre noi liniile spectrale vor fi ușor deplasate spre violet (spre frecvență mare) față de aceleași linii date de un izvor terestru; iar dacă steaua fuge de noi, deplasarea se va produce spre roș (fig. 4). Măsurarea precisă a acestei de-

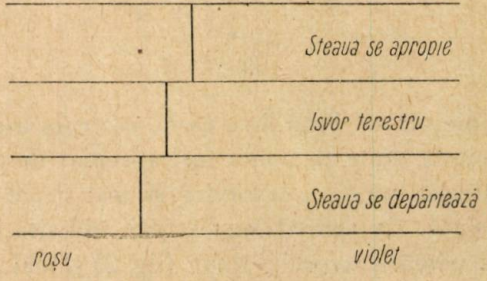


Fig. 4.

plasări va da iuţeala cu care steaua vine sau fuge de noi, *iuţeala ei radială*. Bineînţeles că această deplasare este foarte mică, fiind proporţională cu raportul dintre iuţeala radială a stelei şi cea de propagare a luminii. In adevăr, am găsit că $\lambda' - \lambda = d = vT = \frac{v}{\nu} = \frac{v}{c}\lambda$ care are o valoare foarte mică. Dacă de exemplu steaua se apropie cu $v = 30$ km/s, lungimea de undă primită va fi micşorată cu $d = \frac{\lambda}{10000}$.

Să presupunem că spectrul unei stele, comparat cu cel solar, prezintă linia F a hidrogenului deplasată spre roş cu o cantitate egală cu o şesime din distanţa ce separă cele 2 linii D ale sodiului. Deducem că steaua se depărtează de noi. Cu ce iuţeală? Deoarece linia F are $\lambda = 0{,}4861\ \mu$, iar şesimea distanţei dintre liniile D este

$$\frac{0{,}5896 - 0{,}5890}{6} = 0{,}0001\ \mu,$$

obţinem:

$$v = \frac{c.d}{\lambda} = \frac{300.000.0{,}0001}{0{,}4861} = 61{,}7 \text{ km/s}$$

adică steaua fuge de noi în adâncimile spaţiului cu aproape 62 km pe secundă. Dacă însă fenomenul Doppler-Fizeau ne dă posibilitatea să aflăm iuţeala radială a unei stele, nu ne poate spune nimic despre iuţeala totală cu care se mişcă ea în spaţiu. *Iuţeala radială* v_r este numai componenta iuţelii totale v după direcţia razei vizuale (fig. 5);

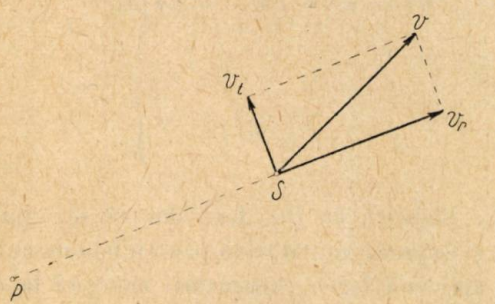


Fig. 5.

cealaltă componentă, perpendiculară pe raza vizuală, adică *iuţeala tangenţială* v_t se poate determina prin observări succesive timp mai îndelungat, ale deplasării aparente a astrului pe bolta cerească. Din compunerea acestor 2 componente putem afla iuţeala totală $v = \sqrt{v_r^2 + v_t^2}$. Pe această cale s'a găsit că stelele din marea noastră «familie» galactică aleargă în toate părţile cu iuţeli radiale cuprinse între 10 şi 50 km/s. Spre marginile căii laptelui încep a predomina iuţelile centrifuge cu valori până la 400 km/s.

Şi pentru a ilustra şi mai bine unitatea lumii materiale, menţionăm că fenomenul Doppler-Fizeau a permis şi măsurarea iuţelilor moleculare, dovedind valabilitatea fenomenului în macrocosm ca şi în microcosm.

Liniile spectrale ale gazelor sau vaporilor incandescenţi nu apar ca linii în sens geometric, ci au o oarecare lăţime, foarte mică e drept, dar măsurabilă. Cauza predominantă a lăţimii liniilor spectrale este fenomenul Doppler-Fizeau. Intr'adevăr, mulţimea de molecule ce alcătuesc gazul luminos, care sunt în mişcarea naturală de agitaţie termică, au cele mai variate direcţii de mişcare. Unele se mişcă perpendicular pe direcţia razei vizuale, altele se mişcă radial, cu diferite iuţeli, spre sau dinspre spectroscop. Ca urmare lungimea de undă a radiaţiei — riguros monocromatică emisă de fiecare atom în parte — apare mai mică pentru moleculele ce vin spre spectroscop şi mai mare pentru cele ce se depărtează de el. Moleculele gazului având cele mai variate iuţeli, e limpede că afară de moleculele ce au iuţeala radială nulă şi care vor da linia spectrală de lungime de undă λ, în jurul lui λ se vor situa foarte multe linii spectrale corespunzătoare lungimilor de undă aparente emise de fiecare din celelalte molecule. Diferenţele dintre aceste lungimi de undă fiind extrem de mici, toate liniile spectrale ce le corespund se vor suprapune în parte, încât spectrul general va fi o linie spectrală cu o oarecare lăţime. Măsurând această lăţime şi ţinând seamă de formulele fenomenului Doppler-Fizeau, se poate deduce *iuţeala cea mai probabilă* a moleculelor. Valorile astfel determinate pentru iuţelile moleculare a diferitelor gaze se potrivesc întocmai cu cele găsite prin metodele teoriei cinetico-moleculare. Fiindcă iuţeala medie moleculară a unui gaz creşte cu temperatura, cum arată teoria cinetică $v = \sqrt{\frac{2\,KT}{m}}$ (unde K este constanta lui Boltzmann, T este temperatura absolută a gazului, iar m este masa unei molecule), urmează că şi *lăţimea liniei spectrale trebue să crească cu temperatura*. Experienţa a verificat aceste consecinţe, arătând că liniile spectrale devin mai late când temperatura gazului care le produce creşte, iar această lăţime scade foarte mult când tubul cu gaz electroluminiscent este cufundat în aer lichid. Aplicarea fenomenului Doppler-Fizeau la studiul lăţimii liniilor spectrale a adus o dovadă neîndoioasă a concepţiei cinetico-moleculare a materiei, imaginată de Lomonosov şi a dat posibilitatea de a cunoaşte iuţeala moleculelor ca

atare, fără a o lega, ca în alte metode, de masă ori energie, căci în interpretarea acestui fenomen iuţeala intră sub aspectul ei cinematic.

Fenomenul Doppler-Fizeau a servit şi la măsurarea iuţelii de rotaţie a Soarelui, ca şi a altor corpuri cereşti.

Pentru aceasta se compară între ele spectrele obţinute dela 2 puncte extreme ale discului solar şi se măsoară distanţa dintre cele 2 poziţii ale aceleaşi linii spectrale. S'a găsit pentru iuţeala liniară a unui punct de pe ecuatorul solar valoarea de 2,3 km/s, pe când măsurarea ei cu ajutorul petelor solare a dat valoarea de 2 km/s.

Din aceste câteva exemple, care pot fi completate de cititor prin lectura capitolului respectiv din tratatul de *Optică a lui Landsberg*, se poate înţelege rolul important pe care-l joacă acest fenomen în desvoltarea şi înaintarea ştiinţei.

Se mai pune încă o întrebare, fenomenul Doppler-Fizeau este în acord cu teoria fotonică a luminii? Să considerăm o lampă L' de masă M care se depărtează de observator cu iuţeala u (fig. 6).

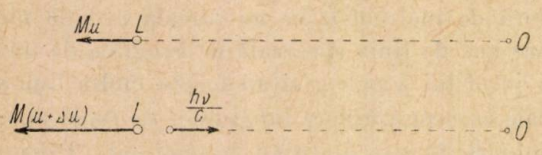


Fig. 6.

Lampa are impulsul Mu. Când lampa trimite un foton spre observator, atunci — potrivit legii a treia a mecanicii — reculul fotonului face să crească iuţeala lămpii cu o valoare foarte mică Δu şi să devină $u + \Delta u$. Fotonul are energia $h\nu$ care corespunde masei $m_f = \frac{h\nu}{c^2}$ şi deci impulsul fotonului va fi $\frac{h\nu}{c^2} \cdot c = \frac{h\nu}{c}$.

Legea conservării impulsului (a cantităţii de mişcare) ne dă:

$$Mu = M(u + \Delta u) - \frac{h\nu}{c}$$

de unde deducem

$$\Delta u = \frac{h\nu}{MC}.$$

Creşterea iuţelii u cu valoarea Δu înseamnă şi o sporire a energiei cinetice a lămpii cu o valoare foarte mică ΔW, pe care o putem scoate din relaţia:

$$\Delta W = W_{\text{finală}} - W_{\text{iniţială}}$$

adică

$$\Delta W = \tfrac{1}{2} M(u+\Delta u)^2 - \tfrac{1}{2} Mu^2 = \tfrac{1}{2} M\left(u + \frac{h\nu}{MC}\right)^2 -$$

$$- \tfrac{1}{2} Mu^2 = h\nu \frac{u}{c} + \frac{1}{2M}\left(\frac{h\nu}{c}\right)^2.$$

Deoarece M este uriaş faţă de masa fotonului, termenul $\frac{1}{2M}\left(\frac{h\nu}{c}\right)^2$ poate fi neglijat şi atunci:

$$\Delta W = h\nu \frac{u}{c}.$$

Legea conservării energiei arată că acest spor de energie cinetică nu poate apare din nimic, ci trebue să provină dintr'o fracţiune din energia fotonului emis. Cu alte cuvinte fotonul emis de lampa în mişcare are o energie mai mică cu ΔW decât fotonul trimis de lampa nemişcată. Putem dar scrie:

$$h\nu' = h\nu - h\nu \frac{u}{c} = h\nu\left(1 - \frac{u}{c}\right)$$

sau

$$\nu' = \nu\left(1 - \frac{u}{c}\right) \qquad (10)$$

relaţie identică cu (9). Iată dar că se ajunge la aceeaşi expresie cantitativă pentru fenomenul Doppler aplicând legea conservării energiei la emisia fotonilor.

Problema 204

Să se rezolve sistemul:

$$(\log x)^2 + (\log y)^2 = 2m$$

$$x^{\log x} + y^{\log y} = 2 \cdot \frac{p^2+q^2}{p^2-q^2} \cdot a^m.$$

unde a *este baza sistemului de logaritmi, iar* m, p *și* q *sunt numere reale.*

Soluție. Putem scrie

$$(\log x)^2 = \log x \cdot \log x = \log (x^{\log x}),$$

Deci

$$\log_a (x^{\log x} \cdot y^{\log y}) = 2m$$

sau

$$x^{\log x} \cdot y^{\log y} = a^{2m}$$

$$x^{\log x} + y^{\log y} = 2 \cdot \frac{p^2+q^2}{p^2-q^2} a^m.$$

Notăm

$$x^{\log x} = u \quad \text{și} \quad y^{\log y} = v.$$

Cunoscând suma $u+v$ și prdusul uv formăm ecuația de grdul doi în z cu rădăcinile u și v.

$$(p^2-q^2)z^2 - 2(p^2+q^2)a^m z + a^{2m}(p^2-q^2) = 0$$

cu rădăcinile

$$z_{1,2} = \frac{a^m(p-q)^2}{p^2-q^2} = a^m \cdot \frac{p \pm q}{p \mp q}.$$

Din enunț se observă că x și y se pot schimba între ele, deci luăm numai cazul

$$u = x^{\log x} = a^m \cdot \frac{p+q}{p-q} = A$$

$$v = y^{\log y} = a^m \cdot \frac{p-q}{p+q} = B.$$

Aplicăm logaritmii

$$(\log x)^2 = \log A \quad \text{sau} \quad \log x = \sqrt{\log A}$$

Rezultă

$$x_1 = a^{\sqrt{\log A}} \quad \text{și} \quad y_1 = a^{\sqrt{\log B}}$$

sau

$$x_2 = y_1 \quad \text{și} \quad y_2 = x_1.$$

Pentru ca soluțiile să aibă sens este necesar c $p > q$; iar pentru ca x și y să fie reali mai est necesar ca $A > 1$ și $B < 1$.

Problema 240

Fie un tetraedru $VABC$ *căruia îi desfacem fețele laterale și le așezăm prin rotație pe planul* ABC *formând triunghiurile* BCV_a, ACV_b, ABV_c.

Să se arate că perpendicularele duse din V_a, V_b, V_c *respectiv pe* BC, AC, AB *sunt concurente.*

Folosind aceiaș metodă să se arate că înălțimile unui triunghiu sunt concurente.

C. Ionescu-Țiu

Soluție. In tetraedrul VABC ducem înălțimea VV′ și înălțimile VA′ VB′, VC′ celor trei fețe laterale. Conform teoremei celor trei perpendiculare, $V'A'$, $V'B'$, $V'C'$, sunt perpendiculare respectiv pe BC, CA și AB. Planele VV′A′, VV′B′, VV′C′ sunt perpendiculare pe planul ABC.

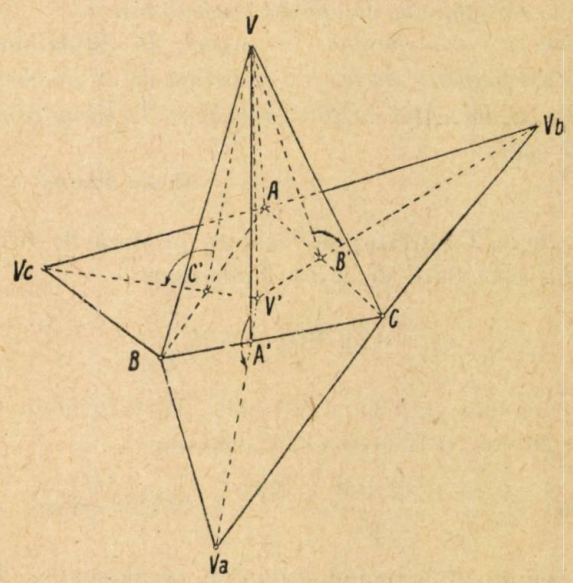


Fig. 1.

Desfăcând prin rotire fețele laterale și așezându-le în planul bazei ABC dreapta V_aA' rămâne perpendiculară pe BC, deci V_a, A', V' sunt în linie dreaptă. La fel $V_bB'V'$ și $V_cC'V'$ sunt în linie dreaptă, deci concurente în V'.

Arătăm că înălțimile unui triunghiu oarecare sunt concurente analog ca mai sus, considerând un tetraedru cu toate fețele egale (echifacial), căruia desfăcându-i fețele laterale pe planul bazei ABC obținem un triunghiu $V_aV_bV_c$ unde ABC sunt mijloacele laturilor. Dreptele $V_aA'V'$, $V_bB'V'$ și $V_cC'V'$ sunt

înălțimile triunghiului $V_aV_bV_c$ și care prelungite sunt și înălțimile triunghiului ABC. Deasemenea din orice triunghiu ABC putem forma un tetraedru cu toate fețele egale cu triunghiul median tri-

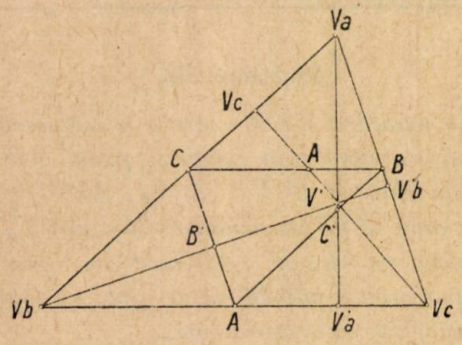


Fig. 2.

unghiului ABC prin îndoirea celor trei triunghiuri dinspre vârfuri, respectiv în jurul dreptelor ce unesc mijloacele laturilor triunghiului ABC, din care fac parte.

Problema 243

Ce cantitate de ghiață cu temperatura de -10^0 putem s'o transformăm în vapori, în 20 minute într'un fierbător electric cu rezistența de 20 de ohmi și cu randamentul de 80%, tensiunea la borne fiind 110 volți.

Ahcim Mar'nescu

Soluție. Cantitatea de căldură produsă de fierbător este dată de legea Joule-Lenz

$$Q = 0{,}24\ I^2Rt = 0{,}24\frac{U^2}{R}t$$

în care înlocuind $U = 110$ volți, $R = 20$ ohmi și $t = 20 \times 60 = 1200$ secunde, obținem

$$Q = \frac{0{,}24 \times 12\,100 \times 1200}{20} = 174200 \text{ calorii.}$$

Căldura utilă ținând seama de randament va fi

$$Q_u = 174240 \times 0{,}80 = 139392 \text{ calorii.}$$

Să notăm cu «m» massa ghieței ce se transformă în vapori. Aceasta va absorbi:

1) căldura Q_1 necesară că să treacă dela temperatura de -10^0 la 0^0. $Q_1 = cm\,(t_2 - t_1)$; unde c este căldura specifică a ghieței egală cu 0,5 cal/gram. grad

$$Q_1 = 0{,}5 \times m \times 10 = 5m \text{ calorii}$$

2) căldura necesară topirii ghieței este

$Q_2 = m\gamma$, unde γ căldura de topire a ghieței egală cu 80 cal/gram.

$$Q_2 = 80\,m \text{ calorii.}$$

3) căldura necesară pentru încălzirea a m grame de apă dela 0^0 la 100^0 este

$Q_3 = c \cdot m\,(t - t_0) = 100\,m$ calorii; pentru apă $c = 1$.

4) căldura necesară vaporizării

$Q_4 = m \cdot \lambda = 539\,m$ calorii unde căldura de vaporizare este 539 cal/gram.

Suma acestor cantități de căldură este căldura necesar celor m grame de ghiață ca să treacă în stare de vapori, ea fiind egală cu căldura utilă dată de fierbător.

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = Q_u,$$

înlocuind, avem:

$$5\,m + 80\,m + 100\,m + 539\,m = 139392 \text{ calorii}$$

de unde

$$m = \frac{139392}{724} = 192{,}5 \text{ grame}$$

Problema 248

Să se găsească patratul perfect de forma a b c d e unde ab, $a+b$, b, $c-b$ sunt patrate perfecte.

A. P. Tănăsescu

Soluție. Patratele perfecte de două cifre sunt: 16, 25, 36, 49, 64, 81. Pentru ca $a+b$ și b să fie patrate perfecte, convine numai 81. Diferența $c-b$ fiind patrat perfect adică $c-1$ patrat perfect, rezultă că c nu poate fi decât 1,2 sau 5.

Numărul este de forma: 811de, 812de sau 815de.

Incercând prin imitarea operației de extragere a rădăcinii patrate a acestor numere se constată că:

$$284^2 < N < 286^2;$$

iar soluția $285^2 = 81225$ este singura care satisface condițiile din enunț.

Problema 258

Dacă ecuația $ax^3 - 3bx^2 + 3cx - d = 0$, are ca rădăcini $\frac{b}{a}, \frac{c}{b}, \frac{d}{c}$, atunci aceste rădăcini sunt egale sau formează o progresie aritmetică. Să se exemplifice.

H. Hamzin

Soluție. Scriem relațiile între rădăcini și coeficienți.

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{d}{c} = \frac{3b}{a}, \quad \text{sau}$$

$$\frac{c}{b} + \frac{d}{c} = 2\frac{b}{a}, \tag{1}$$

ceiace înseamnă că

$$2x_1 = x_2 + x_3, \text{ adică } x_2, x_1, x_3$$

pot fi în progresie aritmetică sau egale.

Pentru ca $\frac{b}{a}, \frac{c}{b}$ și $\frac{d}{c}$ să fie rădăcini trebue să satisfacă și relațiile:

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{bc}{ab} + \frac{cd}{bc} + \frac{bd}{ac} = \frac{3c}{a}$$

sau

$$(2) \qquad \frac{d}{b} + \frac{bd}{ac} = \frac{2c}{a}$$

și $x_1\, x_2\, x_3 = \frac{b\,c\,d}{a\,b\,c} = \frac{d}{a}$, relație care este satisfăcută. Pentru exemplificare, trebue aleși coeficienții a, b, c, d, astfel ca să fie satisfăcută relațiile (1) și (2).

Pentru a se prezenta mai simplu relațiile (1) și (2) când înlocuim doi din coeficienții a, b, c, d, luăm cunoscuți b și c.

Fie $b = 1$ *și* $c = 2$. Relațiile (1) și (2) devin

$$\frac{2}{1} + \frac{d}{2} = \frac{2}{a} \quad \text{și} \quad \frac{d}{1} + \frac{d}{2a} = \frac{4}{a},$$

Notăm $\frac{1}{a} = x$ și obținem:

$$4 + d = 4x \quad , \quad 2d + dx = 8x.$$

Din prima avem $d = 4(x-1)$; iar a doua devine:

$$8(x-1) + 4(x-1)x = 8x, \qquad \text{sau}$$

$x^2 - x - 2 = 0$ cu rădăcinile $x_1 = 2$ și $x_2 = -1$.

sau $\qquad a_1 = \frac{1}{2}$ și $a_2 = -1$.

Avem tabela:

a	b	c	d
-1	1	2	-8
$\frac{1}{2}$	1	2	4

Ecuația din enunț devine:

$-x^3 - 3x^2 + 6x + 8 = 0$ cu rădăcinile:

$-1;\ 2; -4$, în progresie aritmetică

$2, -1;\ -4$, cu rația -3,

sau

$$x^3 - 6x^2 + 12\ x - 8 = 0$$

cu rădăcinile: 2, 2, 2 adică în progresie aritmetică cu rația zero, deci egale.

Problema 260

Fie un triunghiu oarecare într'un cerc. Să se arate că produsul distanțelor dela un punct oarecare de pe cerc la două laturi ale triunghiului este egal cu produsul distanțelor acestui punct la latura cea de a treia și până la tangenta dusă prin vârful opus acestei laturi.

Smernicov
(Ujgorod)

Soluția I-a. Fie M un punct pe cercul circumscris triunghiului ABC. M A_1, M B_1 MC_1 perpendicularele

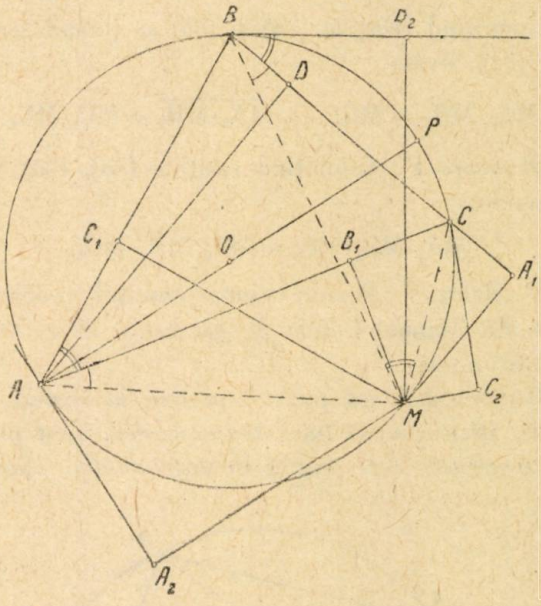


Fig. 1.

din M respectiv pe BC, CA, și AB; iar M B_2 perpendiculara din M pe tangenta în B. Din asemănarea triunghiurilor dreptunghice, BA_1M și AB_1M, avem

$$\frac{MB_1}{MA_1} = \frac{MA}{MB} \qquad (1)$$

Din asemănarea triunghiurilor dreptunghice AC_1M și BB_2M, rezultă

$$\frac{MA}{MB} = \frac{MC_1}{MB_2} \qquad (2)$$

Din relațiile (1) și (2), deducem

$$\frac{MB_1}{MA_1} = \frac{MC_1}{MB_2}$$

sau

$$MA_1 \cdot MC_1 = MB_1 \cdot MB_2.$$

Soluția II-a. Din asemănarea triunghiurilor dreptunghice MB_2B și MA_1C, rezultă

$$(1a) \qquad \frac{MB}{MC} = \frac{MB_2}{MA_1}.$$

Din asemănarea triunghiurilor dreptunghice MBA_1 și MCC_2, rezultă

$$(2a) \qquad \frac{MB}{MC} = \frac{MA_1}{MC_2}.$$

Din relațiile (1) și (2) deducem

$$(3a) \qquad MA^2 = MB_2 \cdot MC_2.$$

Analog obținem:

$$(3b) \qquad MB_1^2 = MC_2 \cdot MA_2$$

$$(3c) \qquad MC_1^2 = MA_2 \cdot MB_2$$

Inmulțind relațiile (3*a*) și (3*b*) și ținând seama de (3*c*), avem

$$MA_1 \cdot MB_1 = MC_2 \quad | \sqrt{MA_2 \cdot MB_2} = MC_1 \cdot MC_2.$$

Observare 1°. Inmulțind relațiile (3*a*), (3*b*), (3*c*) obținem:

$$MA_1 \cdot MB_1 \cdot MC_1 = MA_2 \cdot MB_2 \cdot MC_2.$$

2°. Relațiile (3) sunt tocmai enunțul problemei 328 din Manualul unic de geometrie clasa VIII-IX și anume:

Distanța dela un punct depe cerc la coardă este medie proporțională între distanțele dela acest punct la tangentele care trec prin extremitățile coardei.

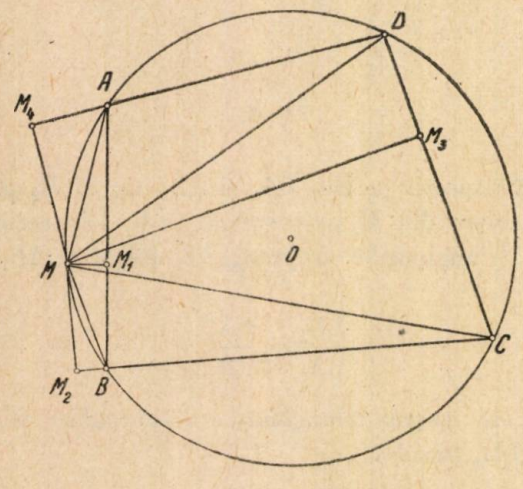


Fig. 2.

Soluția III-a și generalizare. Folosim teorema că produsul a două laturi dintr'un triunghiu este egal cu înălțimea care cade pe latura de a treia înmulțită cu diametrul cercului circumscris. Aceasta rezultă din asemănarea triunghiurilor dreptunghice ABD și APC, de unde

$$\frac{AP}{AB} = \frac{AC}{AD} \quad \text{sau} \quad bc = 2Rh_a.$$

Acum considerăm patrulaterul înscriptibil ABCD și M un punct pe cercul circumscris.

Din M ducem perpendicularele MM_1, MM_2, MM_3, MM_4, respectiv pe AB, BC, CD, DA. Putem scrie:

$$2R \cdot MM_1 = MA \cdot MB; \quad 2R \cdot MM_2 = MB \cdot MC;$$
$$2R \cdot MM_3 = MC \cdot MD; \quad 2R \cdot MM_4 = MD \cdot MA;$$

Din aceste relații rezultă:

$$MM_1 \cdot MM_3 = MM_2 \cdot MM_4$$

Dacă punctul D se confundă cu punctul A, dreapta AD devine tangenta în A la cerc; iar relația precedentă devine enunțul problemei, deci un caz particular.

Observare. Dacă facem produsul celor 4 relații, obținem:

$$16R^4 \cdot MM_1 \cdot MM_2 \cdot MM_3 \cdot MM_4 = MA^2 \cdot MB^2 \cdot MC^2 \cdot MD^2.$$

Problema 261

Pe baza BC a triunghiului ABC să se găsească punctul D așa încât cercurile înscrise în triunghiurile ABC și ADC să fie tangente.

M. Sebârșin

Soluție. Cercurile înscrise fiind tangente între ele și aceleiași drepte AD, urmează că dreapta AD este tangenta lor comună în punctul T de contact al lor. Fie E, F, G. H, punctele de contact respectiv pe segmentele BD, DC, CA, AB.

Tangentele duse dintr'un punct la un cerc fiind egale rezultă:

$$ED = DT = DF; \quad CF = CG; \quad AG = AH; \quad BH = BE.$$

Notăm $BD = x$, $CD = y$ și a, b, c, laturile triunghiului ABC. Rezultă relațiile

$$x + y = a \quad \text{și}$$

$$x - y = BE - FC = BH - CG = AB - AC = c - b$$

De unde

$$x = \frac{a + c - b}{2} = p - b, \quad \text{unde} \quad 2p = a + b + c$$

și

$$y = \frac{a - c + b}{2} = p - c.$$

Prin urmare punctul D este punctul de contact al cercului înscris în triunghiul ABC, cu latura BC.

Problema 262

Dacă x este oarecare și a este o constantă și există egalitatea

$$f(x + a) = \frac{1 + f(x)}{1 - f(x)}$$

să se demonstreze că $f(x)$ este o funcție periodică.

S. Sinachievici

Soluţie. Inlocuim pe x cu $x+a$.

$$f(x+2a)=\frac{1+f(x+a)}{1-f(x+a)}=\frac{1+\frac{1+f(x)}{1-f(x)}}{1-\frac{1+f(x)}{1+f(x)}}=-\frac{1}{f(x)}.$$

Dacă $f(x)\neq 1$; $f(x+2a)\neq -1$ şi $f(x+a)\neq \pm\infty$

$$f(x+3a)=\frac{1+f(x+2a)}{1-f(x+2a)}=\frac{1-\frac{1}{f(x)}}{1+\frac{1}{f(x)}}=\frac{f(x)-1}{f(x)+1}.$$

Dacă $f(x)\neq 0$; $f(x+3a)\neq -1$ şi $f(x+2a)\neq\pm\infty$

$$f(x+4a)=\frac{1+f(x+3a)}{1-f(x+3a)}=\frac{1+\frac{f(x)-1}{f(x)+1}}{1-\frac{f(x)-1}{f(x)+1}}=f(x).$$

Dacă $f(x)\neq -1$; $f(x+3a)\neq\pm\infty$ şi $f(x+4a)\neq 0$.

Se observă că funcţia $f(x)$ este periodică cu perioada $4a$,

$$f(x+5a)=\frac{1+f(x)}{1-f(x)}=f(x+9a)=\ldots$$

Observare. Dacă $f(x)=0$, avem $f(x+a)=1$; $f(x+2a)=\pm\infty$; $f(x+3a)=-1$, $f(x+4a)=0$, $f(x+5a)=1$, ...

Dacă $f(x)=1$, $f(x+a)=\pm\infty$; $f(x+2a)=-1$; $f(x+3a)=0$; $f(x+4a)=1$; $f(x+5a)=\pm\infty$, etc....

Se mai observă că funcţiunea $f(x)=\operatorname{tg}(x)$ cu perioada $4a=x$, adică $a=\frac{\pi}{4}$, corespunde enunţului, adică:

$$\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x};\ \operatorname{tg}(x+k\pi)=\operatorname{tg}x,$$

unde k este un număr întreg.

Problema 266

O rezistenţă electrică de crom-nichel având 0,1 mm grosime şi 0,7 mm lăţime şi cu o rezistenţă specifică de 120 microohmi/cm este legată de o sursă electrică de 110 volţi. Ştiind că această rezistenţă consumă o putere de 300 waţi şi că un kilovat oră costă 15 lei, se cere:

1. Preţul energiei electrice consumate pe oră.

2. Intensitatea curentului care traversează rezistenţa.

3. Rezistenţa panglicei.

4. Lungimea panglicei.

N. Hangea

Soluţie. 1. Energia consumată este de 0,3 kWh. Deci preţul:

$$0{,}3\times 15=4{,}5 \text{ lei.}$$

2. $I=\frac{P}{U}$, în care P e puterea în waţi şi U. tensiunea în volţi.

$$I=\frac{300}{110}\approx 2{,}727 \text{ } \textit{Amperi.}$$

3. Rezistenţa e dată de formula:

$$R=\frac{\rho\cdot l}{s},$$

dar o putem scoate prin legea lui Ohm

$$R=\frac{U}{I}=\frac{110}{\frac{30}{11}}=\frac{110.11}{30}=\frac{121}{3}=40{,}33 \text{ ohmi.}$$

4. Din formula rezistenţei putem scoate lungimea

$$l=\frac{R\cdot s}{\rho},$$

în care R, am aflat-o anterior

$s=$ grosimea $\times$ lăţimea $=0{,}1.0{,}7=0{,}07\text{mm}^2$

$$\rho=120\times 100\times 10^{-6}=0{,}012.$$

Deci vom avea lungimea în metri:

$$=\frac{\frac{121}{3}\cdot 0{,}07}{0{,}012}\approx 235{,}27 \text{ m.}$$

Problema 267

Intr'un calorimetru cu apă se introduce o rezistenţă electrică formată dintr'o spirală de constantan cu lungimea de 0,5895 m, cu diametru 0,01 cm. Valoarea totală a masei în apă a calorimetrului (calorimetru, spirală, agitator, etc.) inclusiv apa este 200 gr. Se trece un curent de 0,5 A, timp de 5 minute. Temperatura iniţială a calorimetrului este 15°, iar cea finală 18°. Lăsat să se răcească, după 50 minute calorimetrul revine la temperatura iniţială.

Temperatura exterioară este inferioară temperaturei de 15°. Admitem că pierderea de căldură a calorimetrului este direct proporţională cu timpul. Din datele de mai sus să se afle valoarea echivalentului mecanic al caloriei mici.

Se dă p constant $= 49{,}10^{-6}$ ohmi $\times$ cm.

Alex. Nedelcu

Soluţie. Cantitatea de căldură furnizată de curent este $Q=1\times 200\times 3+\frac{600\times 5}{50}=660$ calorii întrucât temperatura a crescut cu 3°, iar pierderea în 5 minute este de $\frac{600\times 5}{50}=60$ calorii.

Energia cheltuită $A = RI^2t$, unde $R = \frac{}{s}$, iar t este $5 \times 60 = 300$ secunde, $I = 0{,}5$ amperi, $S = \frac{3{,}14 \times 0{,}01}{4} = 0{,}007850\ mm^2$.

Echivalentul mecanic al caloriei E este dat de relaţia:

$$E = \frac{A}{Q} = \frac{RI^2t}{Q}.$$ Inlocuind obţinem

$$E = 49 \times 10^{-6} \cdot \frac{58{,}95 \times 0{,}25 \times 300}{0{,}0000785 \times 660} =$$

$$= \frac{75 \times 49 \times 58{,}95}{78{,}50 \times 660} = 4{,}185 \frac{\text{Jouli}}{\text{calorie}}.$$

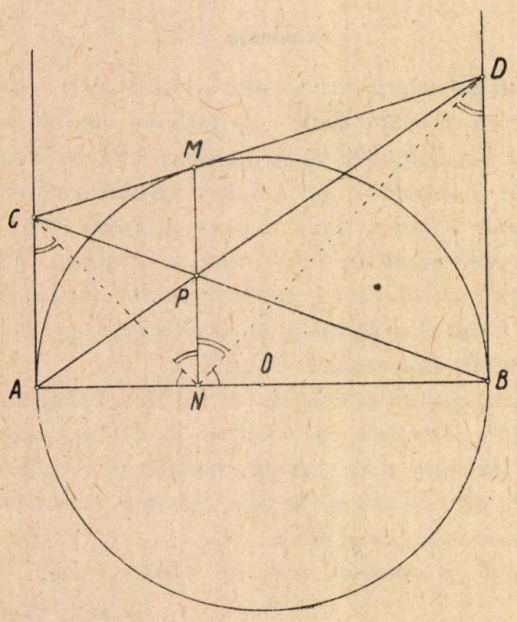
Problema 273

Intr'un cerc se duce un diametru AB. Se consideră tangentele la cerc în punctele A şi B. O a treia tangentă la cerc dusă în punctul M, întâlneşte primele tangente respectiv în punctele C şi D.

Să se demonstreze că dreptele AD, BC şi perpendiculara dusă din M pe diametrul AB sunt concurente.

I. N. Sager

Soluţie. Fie P punctul de intersecţie al dreptelor AD şi BC. Unim M cu P şi prelungim până taie pe AB în punctul N. Trebue să arătăm că MN şi AB sunt perpendiculare.



Tangentele duse dintr'un punct la cerc sunt egale, deci:

$$\overline{CM} = \overline{AC} \quad \text{şi} \quad \overline{MD} = \overline{BD}.$$

Din asemănarea triunghiurilor ACP şi DBP şi ţinând seama de egalităţile de mai sus, obţinem:

$$\frac{PC}{PB} = \frac{MC}{MD}$$

Prin urmare MP este paralelă cu BD, deci perpendiculară pe AB.

Observare. Deoarece avem succesiv:

$$\frac{AC}{BD} = \frac{CM}{MD} = \frac{AN}{NB},$$

triunghiurile ACN şi BDN sunt asemenea, deci unghiurile ACN şi BDN sunt egale. Rezultă că MN este bisectoarea unghiului CND. (Problema 313 din C. d. P. geometrie VIII-IX).

Problema 275

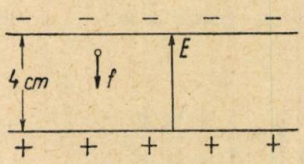
Intr'un balon în care s'a făcut vid molecular ($p < 10^{-3}$ mm Hg) se află un condensator ale cărui plăci sunt la distanţa $d = 4$ cm una de alta şi le este aplicată o tensiune de U volţi. Un electron se mişcă în câmpul condensatorului, mânat de tensiune. Se întreabă cât de mare să fie tensiunea U aplicată, pentru ca electronul să capete o iuţeală de 500 km/s după ce a parcurs o distanţă $= 6.10^{-5}$ cm? Se dă sarcina electronului $e = 4{,}8.10^{-10}$ u.e.s şi masa electronului $m = 9\ 10^{-28}$ grame.

N. Stănescu

Soluţie. Intensitatea câmpului omogen E dintre plăcile condensatorului este

$$E = \frac{U}{d}\ \frac{\text{volţi}}{\text{cm.}} = \frac{U}{300\,d}\ ue\ \text{s/cm.}$$

Electronul este supus la o forţă $f = eE$ dyne



Intrucât parcurgând distanţa $l = 6.10^{-5}$ cm, va căpăta o energie cinetică egală cu lucrul produs de câmp:

$$\frac{mv^2}{2} = f\ l = e \cdot E \cdot l \text{ ergi, sau}$$

$$\frac{mv^2}{2} = e\frac{U}{300\,d} \cdot l.$$

De unde

$$U = \frac{300\,d \cdot mv^2}{2 \cdot e \cdot l} \text{ volţi.}$$

Adică

$$U = \frac{3 \cdot 10^2 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 10^{-28} \cdot 5^2 \cdot 10^{14}}{2 \cdot 4{,}8 \cdot 10_{-10} \cdot 6 \cdot 10^{-6}} = 46{,}875 \text{ volţi.}$$

Problema 277

Un circuit cuprinde: o baterie de rezistenţă interioară neglijabilă, un galvanometru de rezistenţă interioară de 100 ohmi şi o rezistenţă necunoscută x.

Să se calculeze rezistența x știind că curentul care trece prin galvanometru produce o deviație de 20 diviziuni; iar dacă rezistența necunoscută este înlocuită printr'o rezistență de 200 ohmi, deviația galvanometrului este de 30 diviziuni.

N. Hangea

Soluție. Folosim în ambele cazuri formula $E = IR$, și ținând seama că diviziunile galvanometrului arată direct proporțional intensitatea, putem scrie

$$E = 20\ k(100+x) = 30\ k(100+200),$$

de unde rezultă

$$x = 350 \text{ ohmi.}$$

Problema 279

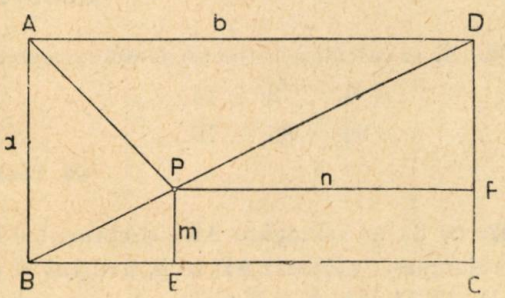
Din vârful A *al dreptunghiului* ABCD *se coboară perpendiculara* AP *pe diagonala* BD $= d$, *iar din* P *se coboară perpendiculara* PE $= m$ *și* PF $= n$ *respectiv pe laturile* BC *și* CD. *Să se arate că*

$$m^{\frac{2}{3}} + n^{\frac{2}{3}} = d^{\frac{2}{3}}.$$

Dan Gh. Ionescu
student

Soluție. Să notăm AB $= a$ și BC $= b$. Triunghiurile BEP și BCD fiind asemenea, avem

$$\frac{m}{a} = \frac{BP}{d} \qquad (1)$$



Mai putem scrie

$$a^2 = BP.d \qquad (2)$$

Eliminând pe BP între ecuațiile (1) și (2), rezultă

$$a^3 = md^2$$

sau încă

$$a^2 = m^{\frac{2}{3}} d^{\frac{4}{3}} \qquad (3)$$

analog obținem

$$b^2 = n^{\frac{2}{3}} d^{\frac{4}{3}} \qquad (4)$$

Adunăm relațiile (3) și (4) și ținem seama că $a^2 + b^2 = d^2$ obținem:

$$d^{\frac{2}{3}} = m^{\frac{2}{3}} + n^{\frac{2}{3}}$$

Problema 289

Vaporii unei locomotive îi imprimă acesteia dela început o mișcare uniform accelerată de 40 cm/s². Se întreabă:

1. După cât timp locomotiva a ajuns viteza de 24 m/s.

2. După obținerea acestei viteze, locomotiva merge cu viteza constantă timp de 7 minute, când oprindu-se admisiunea vaporilor, locomotiva mai merge 2 minute și se oprește.

Care este ecuația mișcării în timpul mișcării uniform întârziate.

3. Care este spațiul total parcurs de locomotivă?

Moru V. Mihai
elev, Beiuș

Soluție. 1. Din relația $v = at$ într'o mișcare accelerată avem:

$$t = \frac{v}{a} = \frac{24}{0{,}4} = 60 \text{ secunde.}$$

Spațiul S parcurs în acest timp este

$$S_1 = \frac{at^2}{2} = \frac{0{,}4 \times 3600}{2} = 720 \text{ metri.}$$

2. In mișcarea uniformă $S = vt$, spațiul S_2 parcurs în $t = 7 \times 60 = 420$ secunde va fi

$$S_2 = vt = 24 \times 420 = 10080 \text{ metri.}$$

3. Mișcarea devenind întârziată, accelerația este dată de relația $a = \frac{v - v_0}{t}$, unde $v = 0$, $v_0 = 24$ m/s și $t = 2 \times 60 = 120$ s.

Deci $a = -\frac{24}{120} = -0{,}2$ m/s².

Spațiul parcurs în acest timp S_3 este

$$S_3 = v_0 t + \frac{at^2}{2} = 24 \times 120 - \frac{0{,}2 \times 120^2}{2} = 1440 \text{ m.}$$

Spațiul total parcurs va fi

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = 720 + 10080 + 1440 = 12.240 \text{ m.}$$

Problema 291

O cădere de apă cu un debit de $Q = 100$ m³/s și o înălțime de cădere $H = 18{,}5$ m, mișcă o turbină, care la rândul ei pune în mișcare o mașină electrică, al cărei curent este transportat prin fire în oraș, pentru a pune în mișcare un număr de tramvaie, care consumă fiecare 50 cai putere. Știind că gradul de folosință al turbinei și mașinei este de 0,8, iar pierderea de putere pe linie este de 6% din puterea produsă de mașina electrică, se cere să se afle câte tramvaie pot fi puse simultan în mișcare de acea cădere de apă.

I. Sager

Soluţie. Puterea produsă de căderea de apă este

$$P = 8{,}5 \times 100.000 = 1.850.000 \text{ kgm/s.}$$

Puterea folosită de tramvaie este

$$P_1 = 0{,}8 \times 0{,}94\ P = 0{,}6016\ P.$$

$$P_1 = 1.850.000 \times 0{,}6016 = 1.112.960 \text{ kgm/s}$$

sau

$$P_1 = \frac{1.112.960}{75} = 14839 \text{ cai putere}$$

Numărul de tramvaie cerut va fi:

$$n = \frac{14839}{50} \approx 296 \text{ tramvaie.}$$

Exerciţii

Demonstraţi

$$\left(\frac{125}{64}\right)^{10} < 1000$$

EXERCIŢII ŞI PROBLEME PROPUSE

Probleme

A, B = puncte fixe;
Locul geometric M?

$$\frac{1}{AM} - \frac{1}{BM} = \text{const.}$$

501. O cameră de minge de foot-ball, este umflată dela o temperatură de 1°, până la presiunea de 1,2 atmosfere.

Ştiind că această cameră nu rezistă la o presiune mai mare de 1,6 atmosfere, să se determine care este temperatura maximă la care se poate supune aerul din interior.

Anastasiu E. Dinu
elev, Bucureşti

502. Să se determine numerele *abc* ştiind că diferenţa dintre ele şi răsturnatele lor ne dă tot un număr de trei cifre în care prima cifră este media aritmetică a celorlalte două (sau ultima cifră să fie media aritmetică a celorlalte două).

Istodor C. Valentin
student

503. Fie P greutatea unui corp aşezat pe un plan înclinat de unghiul α şi T_1 forţa de tracţiune egală cu Q + F, unde Q = forţa de alunecare şi F e forţa de frecare.

1. Să se exprime T_1 cu ajutorul lui P şi α.
2. Să se găsească prin calcul unghiul α pentru ca $T_1 = P$.

N. Gaiu

504. Un condensator plan cu armăturile în suprafaţă de 12,56 dm², are între armături un strat de aer în grosime de 4,5 mm.

Se cere:

a) Care e capacitatea condensatorului în μF?

b) Introducându-se între armături o lamă de sticlă, a cărei grosime este 0,25 cm, care e noua capacitate a condensatorului? ($K_{\text{sticlă}} = 5$).

c) Introducându-se, în locul sticlei, o lamă metalică de aceeaşi grosime, care e noua capacitate a condensatorului?

d) Ce concluzie putem trage asupra constantei dielectrice a unui metal?

Emil Leibovici

505. Intr'un triunghiu ABC cu toate unghiurile ascuţite ducem înălţimile AA_1 şi BB_1. Să se arate că:

$$\frac{AA_1 + AB_1}{BB_1 + BA_1} = \frac{BB_1 - BA_1}{AB_1 - AA_1}$$

şi

$$\frac{AA_1 + BB_1}{AB_1 + BA_1} = \frac{AB_1 - BA_1}{AA_1 - BB_1}.$$

C. Ionescu-Ţiu

506. Să se calculeze termenii comuni progresiilor:

4, 9, 14, ...

93, 86, 79, ...

Gh. Bazacov

507. Se dă un triunghiu ABC dreptunghic în A. Pe prelungirea înălţimii AD se ia punctul M astfel că AD = DM. Fie E şi F picioarele perpendiculare lor duse din D respectiv pe AB şi AC. Dreapta DF întâlneşte dreapta ME în punctul G, iar dreapta DE întâlneşte pe MF în H. Dreapta GH întâlneşte latura AC în N, iar AB în P. Să se arate că patrulaterele FEPN şi NBPC sunt inscriptibile; şi că $2\,\overline{PN} = 5\,\overline{AD}$.

Mihai Roşu
elev, Slatina

508. Fie cercul O şi dreptungiul ABCD înscris în acest cerc. Dintr'un punct M depe cerc ducem perpendicularele la fiecare din laturile dreptunghiului. Vom obţine 4 puncte de intersecţie, care sunt vârfurile şi ortocentrul unui triunghiu.

Boboc Nicu
elev Brăila

509. Echipa unui miner a îndeplinit planul pe anul 1951 în $6\frac{1}{4}$ luni, lucrând apoi în contul anului 1952.

a) Cu cât la sută a depăşit planul pe 1951?

b) Dacă la începutul anului 1952 norma va fi mărită cu 25%, în cât timp se va realiza planul pe anul respectiv, echipa mărindu-şi randamentul faţă de anul precedent cu 10%?

c) Cât la sută prezintă depăşirea normei pe 1952?

N. Mihăilă

510. Pentru a pune în mişcare turbina unei uzine dela o o microcentrală electrică se foloseşte apa unui râu de munte strânsă într'un lac la cota 1240 m, uzina aflându-se la cota 940 m.

Care este debitul apei necesare mişcării turbinei, şi ce forţă electrică în kw are microcentrala, randamentul ei fiind de 75%, dacă mărind debitul cu 1 m³/sec, instalând microcentrala cu 50 m mai sus şi mărindu-se randamentul la 80%, forţa electrică se măreşte cu 1075 kW.

N. Mihăilă

$x = 1 + \frac{1}{x}$

PAGINA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

S'a mai evidenţiat prin rezolvări de probleme din revista Matematică şi Fizică:

Goia Miron (Arad), *Stanciu Dorin* (Oraşul Stalin), *Lazăr Aldo* (Roman), *Radu V. Culai* (Tecuci), *Poenaru Dorin* (Oradea Mare), *Soare Ion* (Târgul Jiu) şi *Popovici Dinu* (Bucureşti).

* * *

In cursul lunii Noembrie 1951 am primit soluţii bune la cel puţin 5 probleme din Revista Matematică şi Fizică, dela următorii rezolvitori:

ALEXANDRIA (Teleorman). Clasa XI-a Guja Nicolae (269, 270, 276, 307, 432), Mirea Nicolae (289, 290, 297, 299, 303, 306, 307, 316, 317, 325, 333, 336, 351, 358, 363, 369, 371, 375, 388, 432).

ARAD. Clasa XI-a. Ardelean Traian (137, 351, 375, 404. 454, 456, 466, 468,), Catrinţa Viorica (242, 298, 351, 361, 364, 367, 368, 369, 371, 374), Goia Miron (251, 259, 271, 303, 305, 308, 310, 312, 313, 314, 316, 317, 321, 322, 323, 324, 328, 329, 341, 432, 433, 345, 348, 349, 351, 352, 353, 354, 358, 359, 360, 363, 364, 367, 368, 369, 371, 374, 375, P).

BACĂU. Clasa X-a. Cozma Mihai (168, 324, 347, 369, 375, 389, 392, 401, 404, 410, 415, 416, 422, 444).

BAIA MARE. Clasa XI-a. Cadar Ioan (317, 322, 328, 351, 456, 459), Couţi Romeo (102, 258, 260, 261, 262, 322, 339, 340, 352, 359, 456, 459, P).

BÂRLAD. Clasa X-a. Bichir Ionel (202, 325, 339, 343, 346, 348, 352, 379, 389).

BOTOŞANI. Clasa VI-a. Filip Marioara (E: 119, 124, 125, 129, 131, 133).

BUCECEA (Botoşani). Clasa VII-a. Ionescu Mihai (E: 51, 80, 85, 86, 91, 92, 105, 130, 132, 134, 135, 136, 137, 138, 139).

BUCUREŞTI. Şcoala tehnică Metalurgică Nr. 1. Anul IV. Licurg Ion (430, 434, 440, 445, E: 130). Şcoala tehnică de Statistică. Anul II. Erzaru Ioana (E: 56, 59, 115, 116, 119, 122, 124 125).

Liceul Nr. 3 băieţi. Clasa VI-a. Vasiliade Cornel (E: 83, 91, 105, 109, 114, 124, 125).

Liceul Nr. 5 băieţi. Clasa XI-a. Matei Gheorghe (242, 260, 264, 269, 290, 298, 303, 305, 306, 307, 351, 363, 369, 86, 375, 404, 443).

Liceul Nr. 7 băieţi. Clasa XI-a. Rudeanu Sergiu (195, 344 348, 433, 439, 440, 441).

Liceul Nr. 10 băieţi, Clasa X-a C. Enache Nicolae (278, 290, 351, 369, 404, E: 73), Negreţ Traian (211, 269, 278, 279, 290, 323, 325, 329, 333, 335, 339, 346, 351, 357, 367, 368, 369, 371, 379, 388, 389, 404; E: 67, 70, 72, 73, 79, 87, 96), Nicolae M. Nicolae (176, 213, 351, 367, 371, 404; E: 126), Şincan Corneliu (270, 306, 406, 436, 439), Stoicescu Teodor (370, 371, 374, 375, 379, 386, 389, 390, 392, 404, 406, 407, 432, 436, 439, 444), Vasiu Grigore (271, 278, 290, 323, 339, 346, 357, 358, 367, 368, 369, 371, 374, 375, 389, 392, 404, 432), Vintilă Virgiliu (249, 290, 317, 351, 354, 367, 369, 384, 401, 404, E: 89). Clasa XI-a. Bucur Constantin (297, 299, 300, 303, 306, 307, 367, 372, 456, 457, 466), Popovici Dinu (137, 223, 224, 238, 242, 243, 257, 259, 264, 269, 290, 299, 300, 301, 303, 305, 307, 313, 325, 363, 369, 374, 382, 386, 392, 404, 416, 440, 441, 443, P).

BUZĂU. Clasa X-a. Codreanu Irinel (298, 329, 348, 369, 375, 377, 392, 401, 416, 443, 445). Clasa XI-a. Bârliba Eugenia (137, 227, 242, 269, 270, 290, 297, 307, 351, 375, 407, 445, 456, 459, 466), Cârlan Miltiade (156, 290, 297, 317, 325, 251, 367, 369).

CALAFAT. Popescu Gh. Virgil (316, 317, 322, 324, 367, 369, 371, 375, 379, 386, 388, 390, 392), Maglaviceanu N. (312, 313, 314, 315, 316, 317, 322, 324, 327, 328, 348, 349, 352, 358, 359, 363, 364, 369, 371), Nicolescu A. Ştefan (387, 390, 432, 439, 440), Rădulescu Rodica (313, 317, 369, 371, 375).

CÂMPINA. (Prahova). Şcoala medie tehnică de Petrol Nr. 2. Florea C. Constantin (429, 432, 437, 440, 441, 443, 445).

CÂMPULUNG (Suceava). Clasa XI-a. Lateş Leonte (255, 264, 271, 276, 278, 298, 303, 313, 316, 317, 351, 358, 367, 369, 383, 386, 388, 432, 440).

CARANSEBEŞ. Ciric Ion (E: 105, 112, 114, 115, 116, 119, 130, 131, 132, 135, 137, 138, 139,).

CONSTANŢA. Şcoala hidrotehnică. Anul IV. Bondar Const. (403, 404, 407, 423, 426, 432, 434, 438, 439, 443), Emin M. Atila (269, 303, 313, 335, 386, 392, 404, 432, 440, E: 20, 53, 109, 132,), Şatropol Taşcu (123, 232, 289, 297, 307, 317, 351, 371, 386, 422, 426, 432, 439).

CRAIOVA. Clasa IX-a. Cazanacli M. (391, 398, 427, 434, 443, 444, 445).

DOROHOI. Kleiner Ionas (279, 367, 369, 365, 389, 410, 415, 416, E: 113, 132).

GHERLA Cluj). Şcoala tehnică de Cooperaţie. Anul IV. Teodor I. Fabian (244, 246, 269, 364, 369, 371, 475, 379, 385, 386).

GIURGIU. Clasa VII-a. Daia N. Elena (E: 47, 48, 51, 70, 91, 132), Ghinescu Nicolae (265, 403, 416, E: 79, 102, 105, 109, 137), Clasa XI-a. Daia N. Silviu (300, 323, 368, 386, 389, 404, 418, 444, 448, 456, 466).

IAŞI. Făclieru Moisă (369, 371, 386, 388, 392, 406).

LUGOJ. Clasa XI-a. Nahaiciuc Mihai (369, 392, 398, 426, E: 105, 138), Nicola Petre (200, 236, 336, 367, 386, 390, 426, 432, 441, 442, 443.).

MEDIAŞ. Clasa XI-a. Cândea Ioan (123, 176, 185, 200, 307, 336, 439, 451, 468).

MORENI (Prahova). Şcoala medie de Petrol. Clasa X-a. Ionescu Ariton (102, 110, 123, 156, 176).

ORADEA MARE. Clasa X-a. Petrovici Liviu (242, 243, 329, 365, 375, 383, 389, 391, 392, 398, 401, 403, 404, 406, 415, 427, 432, 434, 437, 444, 445, P), Poenaru Dorin (236, 243, 257, 264, 278, 289, 290, 291, 292, 299, 307, 335, 336, 345, 346, 347, 353, 369, 379, 386, 390, 398, 401, 404, 406, 422, P).

ORAŞUL STALIN. Clasa XI-a. Coandă Viorel (264, 289, 290, 307, 323, 351, 389, 432, 443, 461, Duţă Gheorghe (448, 453, 456, 459, 461, 465, 466, 468), Dudiţă I. Florea (229, 303, 348, 357, 367, 432, 437, 442, 444, 448, 456, 459, 461, 465, 466, 468), Stanciu Dorin (241, 244, 255, 264, 266, 268, 269, 270, 271, 275, 278, 289, 290, 291, 292, 295, 297, 298, 299, 300, 305, 306, 307, 313, 316, 317, 323, 332, 335, 336, 347, 351, 353, 354, 374, 383, 386, 387, 394, 404, P).

PETROŞANI. (Hunedoara). Iştoc Nicolae (416, E: 83, 87, 88, 96, 130, 132, P).

PITEŞTI. Clasa X-a. Petrescu I. Dorel (242, 253, 317, 321, 367, 369, 371, 274, 404, 440, 444, P). Clasa XI-a. Leonăchescu P. Nicolae (164, 176, 290, 299, 300, 303, 305, 306, 307, 351, 353, 354, 367, 369, 386), Prodan Florian (269, 270, 276, 290, 300, 306, 317, 325, 369, 371, 404, 432, 439, P).

PLOEŞTI. Clasa V-a. Manciu Claudiu (E: 67, 91, 105, 107, 125). Clasa VII-a. Ionescu A. Dan (109, 114, 115, 124, 125, 131, 136, 137), Vasilescu C. Mihai (E: 106, 107, 114, 115, 116, 124, 125, 131). Clasa XI-a. Bunea I. Ştefan (354, 367, 371, 374, 375, 379, 386, 387, 388, 389, 392, 404, 407, 415, 416, 432, 433, 441, 445, 446, 448), Bârliga A. Ion (342, 358, 359, 363, 369, 371, 374, 375, 386, 388, 389, 392, 404, 406, 407, 437, 432, 441, 442, 445, 448, 456, 466), Bordeeanu Stelian (248, 282, 375, 387, 404, 432, 444, 445, 448, 456, 466, 468), Nestor Mircea (279, 313, 339, 348, 352, 358, 359, 367, 375, 383, 386, 387, 388, 389, 390, 392, 404, 407, 416, 429, 432, 433, 441, 443, 445), Uţa B. Sergiu (245, 246, 290, 294, 297, 300, 301, 303, 306, 307, 308).

ROMAN. Clasa X-a. Petrovici Virgil (269, 278, 306, 323, 336, 353, 374, 389, 403, 406, 422, 434, 435, 437, 448, 461), Lazăr Aldo (102, 123, 200, 218, 226, 301, 314, 332, 339, 352, 353, 359, 364, 374, 377, 390, 392, 394, 400, 405, 406, 427, 430, 434, 438, 439, 445, 454, 458, 459, 462, 463, 464, P), Ciobanu Const. (375, 433, 437, 441, 443, 445), Moisini Ioan (290, 298, 306, 323, 339, 342, 348, 352, 353, 367, 368, 371, 374, 380, 381, 386, 389, 404, 448, 454, 466), Munteanu Epaminonda (229, 333, 336, 352, 369, 371, 374, 386, 416, 434, 435, 439, 448, 461, 446, 468).

SLATINA. Clasa XI-a. Mitrache Marin (269, 328, 351, 369, 3386, 389, 392, 443, 449, 461, 464, 466), Roşu Mihai (316, 317, 346, 348, 349, 371, 389, 443, 445), Voiculescu Paul (128, 329, 364, 375, 377, 379).

SUCEAVA. Rusu Dan (269, 270, 287, 297, 300, 307, 313, 336, 386, 432, 456, 466).

TÂRGOVIŞTE. Clasa XI-a. Oprea A. Nicolae (249, 263, 276, 301, 314, 324, 326, 333, 343, 362, 375, 387, 389, 390, 392), Vasile I. Andrei (261, 274, 279, 289, 328, 345, 358, 359, 363, 364, 365, 367, 368, 369, 372, 375, 377, 380, 382, 383, 386, 388, 389, 392), P. Clasa X-a. Dobrescu Andrei (261, 273, 291, 320, 326, 328, 341, 342, 343, 372, 377, 383, 385, 386, 387, 418, 419, 425, 429, 441, 443, 444, 445), Şcoala medie tehnică de Petrol. Anul IV. Toma A. Nicolae (317, 358, 369, 371, 386, 432).

TÂRGU-JIU. Clasa IX-a liceu. Neamţu I. Ioan (418, E: 136, 137, 138, 139) Clasa XI-a. Popescu Stroescu Gabriel (253, 259, 263, 269, 276, 278). Şcoala Pedagogică. Anul IV. Soare Ion (249, 266, 269, 270, 278, 289, 307, 309, 317, 322, 324, 331, 351, 353, 374, 404, 407, 416, 417, 423, 432, 444, 465, 466, P).

TECUCI. Clasa XI-a. Radu V. Culai (316, 351, 354, 360, 361, 375, 376, 377, 379, 382, 383, 386, 388, 389, 390, 392, 404, 407, 410, 416, 420, 430, 432, 436, 440, 441, 443, 444).

TIMIŞOARA. Clasa XI-a. Popov Isa (364, 367, 369, 371, 374, 386).

TURNU-SEVERIN. Clasa VIII-a. Barbu Cornel (448, E: 136, 137, 138, 139).

* * *

Redactarea problemelor. Pe aceeaş foaie de formatul caietului obişnuit, se va rezolva câte o singură problemă. Soluţia să fie însoţită de numărul şi enunţul problemei.

Se poate scrie în continuare şi pe contra-pagină; iar dacă soluţia necesită figură, se va desena cu îngrijire şi se va anexa. Nu se vor trimite soluţiile mai multor probleme pe aceeaşi foaie.

Rezolvitorul va scrie, pe fiecare soluţie, numele, şcoala, clasa şi localitatea.

Soluţiile trimise să nu fie copiate unele după altele.

Se mai primesc soluţii şi la problemele propuse în anul 1951 şi nerezolvate încă în paginile revistei (vezi tabla de materii IV. 6 din Nr. 12, anul II).

Problemele ce se propun de către colaboratorii revistei, să fie clar compuse şi însoţite de soluţii.

REVISTA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

ORGAN AL SOCIETĂŢII DE ŞTIINŢE MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R.

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

APARE SUB ÎNGRIJIREA UNUI SECRETARIAT DE REDACŢIE

REDACŢIA: B-DUL 6 MARTIE, 63 — BUCUREŞTI

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică şi fizică a şcolilor, precum şi orice material informativ care ar interesa redacţia noastră se vor trimite pe adresa de mai sus

ABONAMENTE:

Tarif general ... ... Lei 60

Tarif redus pentru elevi, studenţi şi profesori ... ... Lei 10

Abonamentele se fac numai prin:

Centrul de Difuzare a Presei

Pentru Bucureşti: Str. Const. Mille Nr. 14 — Telef. 5.28.90

Pentru Provincie: Centrul de Difuzare a Presei din Capitalele Regiunilor sau Raioanelor — Banca de Stat în Contul C.D.P. Nr. 038.068.

A APĂRUT IN

EDITURA TEHNICA

al treilea volum

LEXICONUL TEHNIC ROMÂN

Volumul al III-lea din Lexiconul Tehnic Român cuprinde o serie de noțiuni (dela literele I-M) a căror cunoaștere e de primă importanță în tehnică, și care au cerut o mare desvoltare, cum sunt: Incercare, Inducție, Infășurare electrică, Instrument, Isomerie, Laminor, Locomotivă, Măsuri, Mecanism, Motor și bineînțeles, termenul Mașină, care e desvoltat în 182 pagini.

Volumul acesta cuprinde în cele 1115 pagini 7800 termeni și 2500 figuri.

Prin acest al treilea volum Lexiconul Tehnic a dovedit că este o lucrare de mare valoare, care va fi de un important ajutor tuturor tehnicienilor noștri, ori care ar fi pregătirea lor.

Taxa poștală plătită în numerar conform aprobării Nr. 168.026/946.

C. 1442 — Centrul Poligrafic Nr. 2. Filiala 3.

Lei 1.—

7-9 81

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE ȘI FIZICE DIN R.P.R.

E/1426

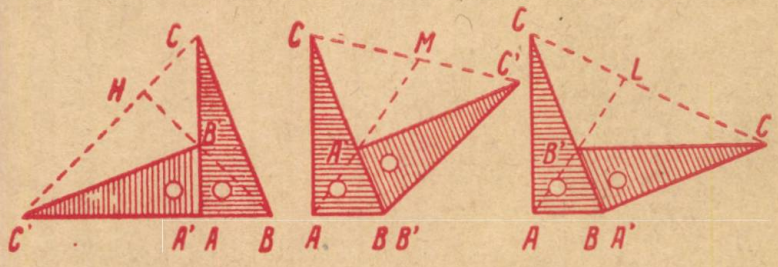
KAT

REVISTA MATEMATICĂ și FIZICĂ

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

★ ★ ★

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR



★

FEBRUARIE

1952

2

EDITURA TEHNICĂ

REVISTA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

SUMARUL:

Pag.

1. *Un nou pas înainte pe drumul asigurării unei vieți fericite celor ce muncesc în patria noastră* 25
2. *Rezolvarea unor probleme de maximum și minimum de Prof. O. Sacter* 26
3. *Avionul — o cucerire a tehnicii de Virgil Atanasiu* ... 31
4. *Probleme rezolvate (263, 293, 294, 295, 300, 304, 316, 317)* 41
5. *Exerciții și probleme propuse* 44
6. *Pagina rezolvitorilor de probleme* 46

ANUL III 2 FEB. 1952

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR

REVISTA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ
PUBLICAŢIE PENTRU TINERET A SOCIETĂŢII DE MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ DIN R. P. R.
Anul III, Nr. 2 Februarie 1952

UN PAS ÎNAINTE PE DRUMUL ASIGURĂRII UNEI VIEŢI FERICITE CELOR CE MUNCESC ÎN PATRIA NOASTRĂ

După realizarea planurilor de Stat pe anii 1949 şi 1950 şi după succesele obţinute de clasa noastră muncitoare depăşind în 1951 — primul an al planului cincinal — cu 28% nivelul de producţie atins în 1950, iar în agricultură depăşindu-se cu peste 20% recoltele anului 1950, Consiliul de Miniştri şi Comitetul Central al Partidului Muncitoresc Român au hotărît efectuarea reformei băneşti şi a reducerii de preţuri, începând cu data de 28 Ianuarie 1952.

Această Hotărîre reprezintă un act de politică economică socialistă, deoarece pe de o parte contribue la ridicarea nivelului de trai al celor ce muncesc (prin reducerile de preţuri între 5—20% care se fac la mărfurile alimentare şi industriale de larg consum), iar pe de altă parte a dat o lovitură puternică chiaburilor şi altor elemente exploatatoare (prin felul în care s'a făcut schimbul banilor vechi în bani noi pentru cei care acumulaseră importante sume de bani).

Spre deosebire de ţările capitaliste în care politica de pregătire a unui nou război de agresiune aduce după sine inflaţie, devalorizare, şomaj, în ţara noastră reforma bănească va ajuta la îndeplinirea şi depăşirea sarcinilor de plan pe anul în curs şi pe anii viitori, contribuind astfel la întărirea statului nostru, la ridicarea producţiei industriale şi a producţiei-marfă în agricultură, va ajuta la reducerea preţurilor de cost şi a preţurilor de vânzare, va întări legătura de producţie şi de schimb între oraş şi sat — temelia economică a alianţei clasei muncitoare cu ţărănimea muncitoare.

Bucurându-ne de marele ajutor al Uniunii Sovietice, de frăţescul şi multilateralul sprijin pe care-l primim în permanenţă, noi — toţi cei care prin muncă cinstită contribuim la construirea socialismului în patria noastră — vom folosi această Hotărîre a Consiliului de Miniştri şi a Comitetului Central al Partidului pentru a întări unitatea moral-politică a poporului nostru, pentru a asigura industrializarea socialistă a ţării, transformarea socialistă a agriculturii, întărirea legăturii între industrie şi agricultură, aprovizionarea mai bună şi mai ieftină cu cele necesare traiului, ridicarea nivelului de trai şi cultural al muncitorilor, ţăranilor muncitori, al intelectualilor, funcţionarilor.

Realizând planurile de şcolarizare de toate gradele învăţământului, dând în fiecare an noi şi noi serii de absolvenţi cât mai bine pregătiţi, contribuind la răspândirea culturii în rândurile maselor de oameni ai muncii, şcolile din Republica noastră îşi îndeplinesc sarcina lor de bază ajutând astfel aplicarea Hotărîrii cu privire la efectuarea reformei băneşti şi la reducerea de preţuri.

Elevii şi profesorii vor mobiliza pe părinţi şi pe toţi cei cu care vin în contact, pentru a îndeplini cu succes sarcinile trasate de partid şi guvern. Munca de lămurire poate să fie dublată de o muncă practică în domeniul economiilor, în domeniul folosirii mai raţionale a materialelor, a combustibilului şi energiei electrice.

Profesorii de matematică şi fizică pot folosi prevederile acestei Hotărîri pentru a alcătui probleme din care să rezulte creşterea nivelului de trai al oamenilor muncii, creşterea volumului schimbului între sat şi oraş, posibilităţile sporite ale statului de a mări investiţiile în sectorul socialist al industriei şi al agriculturii.

Urmând exemplul muncitorilor din întreprinderile fruntaşe care şi-au luat angajamente de a depăşi planurile de producţie individuale, de a creşte sumele înscrise în conturile de economii, de a face raţionalizări şi inovaţii, elevii şi profesorii noştri vor contribui la aplicarea cu perseverenţă a Hotărîrii guvernului şi partidului din 28 Ianuarie. Ridicarea nivelului cultural, ştiinţific al tineretului, al întregului nostru popor, numărul sporit de cadre temeinic pregătite care intră în fiecare an în rândurile puternice ale muncitorilor, tehnicienilor şi funcţionarilor, sunt formele prin care cei ce muncesc în şcoală pot şi trebue să contribue la succesele care ne vor conduce spre socialism.

Dar aceasta nu se obţine fără muncă, nu se obţine fără luptă îndârjită şi organizată. Acestea precum prevede Hotărîrea «vor face posibil într'un viitor apropiat, noi reduceri de preţuri comerciale, desfiinţarea regimului de aprovizionare pe bază de cartele şi trecerea la preţuri comerciale unice, ceeace va însemna o nouă ridicare a salariului real al muncitorilor şi funcţionarilor, cât şi a veniturilor ţărănimii muncitoare».

Ne dăm astfel seama că avem pentru ce munci, că viitorul nostru este luminos, că perspectivele deschise tineretului nostru de regimul de democraţie populară sunt nemărginite şi că ele toate vor asigura îndeplinirea visului de aur al omenirii: socialismnl şi apoi comunismul.

REZOLVAREA UNOR PROBLEME DE MAXIMUM ŞI MINIMUM

O. Sacter

I

In procesul de producţie se ivesc deseori probleme în care se cere ca într'o anumită situaţie să realizăm economii de material. Aceste probleme se cer rezolvate. Unele din ele se pot soluţiona prin folosirea cunoştinţelor elementare de matematici, pentru altele se cer însă cunoştinţe înalte. Problemele acestea au determinat desvoltarea unor teorii matematice. *Problemele de maximum şi minimum, despre acestea e vorba, au drept scop determinarea condiţiilor în care o anumită expresie de calcul, în care intră elemente variabile, să aibă valoarea cea mai mare sau cea mai mică.* Ele sunt tot atât de vechi ca şi geometria însăşi. Vreme îndelungată s'au folosit perimetrele pământurilor cultivate, pentru a măsura întinderea terenului. Insulele se măsurau după timpul în care se făcea ocolul lor cu ajutorul bărcilor sau a corăbiilor. Se credea că unui perimetru mai mare îi corespunde şi o arie mai mare Invăţaţii au arătat cât de greşită este această credinţă. Observarea acestor fapte a condus pe matematicieni la problema isoperimetrelor, o problemă veche de maximum. Se cerea linia de un perimetru dat care cuprinde în interiorul ei o arie maximă. Studiul adâncit al acestei probleme a condus la o serie de probleme de maximum şi minimum. Descoperirea calculului diferenţial şi integral a dat un avânt deosebit acestor probleme. Folosind metoda derivatelor s'a reuşit a se rezolvi o clasă mare de probleme de maximum şi minimum.

In cele ce urmează ne propunem să arătăm cum, folosind cunoştinţe de matematici căpătate în şcoala medie, putem rezolvi multe probleme de această natură.

II

Când folosim raţionamentul geometric, multe din probleme se rezolvă reducându-le la maxime sau minime cunoscute, de pildă: *a)* cea mai mică distanţă între două puncte este segmentul de dreaptă care uneşte acele puncte; *b)* drumul cel mai scurt dela un punct la o dreaptă este perpendiculara dela acel punct la dreaptă; *c)* distanţa cea mai scurtă între două puncte variabile luate pe două drepte paralele este lungimea unei perpendiculare între ele; *d)* o problemă este redusă la alta al cărui maxim sau minim e cunoscut, etc.

1. Să se stabilească locul de pe şoseaua dreaptă dealungul căreia sunt trase cabluri cu curent de înaltă tensiune, unde să fie construită o staţie de transformare a curentului care să deservească cu curent două locuri A şi B, aşezate de aceiaşi parte a şoselei, astfel ca lungimea totală a cablurilor care vor pleca dela staţie să fie minimă.

Presupunând M locul unde se va fixa staţia de transformare (fig. 1), iar A şi B locurile care trebue deservite cu curent; atunci lungimea totală a cablurilor depinde de lungimea AM+MB.

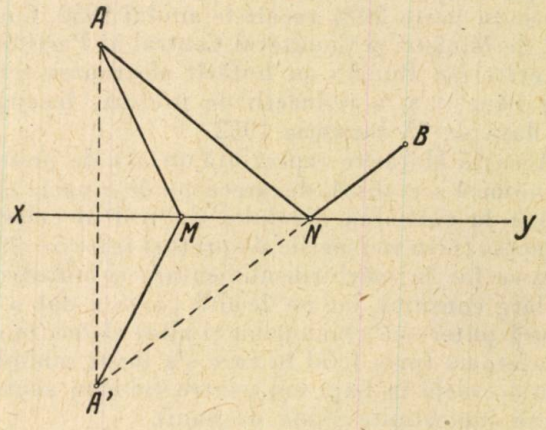


Fig. 1.

Să căutăm minimul acestei sume. Luăm simetricul A' a lui A faţă de şoseaua xy, avem: AM+MB=A'M+MB. Suma A'M+MB e minimă când M e în linie dreaptă cu A' şi B. Poziţia N a staţiei se obţine intersectând şoseaua xy cu dreapta care uneşte pe B cu simetricul A' a lui A faţă de xy.

Observare. Se mai poate spune că suma AM + MB este minimă când bisectoarea unghiului AMB este perpendiculară pe linia xy.

2. Pentru trei localităţi A, B, C se construeşte o staţie M situată în interiorul triunghiului ABC. Se cere poziţia lui M astfel ca lungimea totală a firelor telefonice care leagă pe M de cele 3 locuri A, B şi C să fie minimă. Se presupune că M e legat de A, B şi C prin acelaşi număr de fire.

Lungimea totală a firelor depinde de

$$L = MA + MB + MC.$$

Să căutăm poziţia lui M pentru care această sumă L e minimă. Presupunând pentru moment MA constantă, să vedem în ce condiţii este L minim.

M se află pe un cerc cu centrul în A şi cu raza MA=a (fig. 2)

Luăm pe cerc un punct M′ pe care-l unim cu B şi C. Dreptele M′B şi M′C taie tangenta în M în punctele S şi T. Luăm un punct M″ pe această

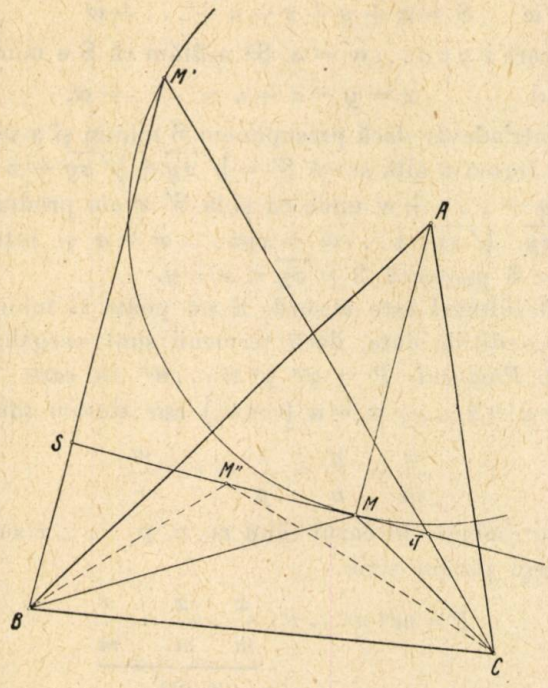


Fig. 2.

tangentă situat între S şi T; acest punct este astfel situat în interiorul triunghiului M′BC, ca atare avem

$$M'B + M'C > M''B + M''C$$

Pe de altă parte conform observării din exemplul precedent, suma BM″+M″C este minimă când bisectoarea unghiului BM″C este perpendiculară pe linia ST. Dacă AM este bisectoarea unghiului BMC şi cum ST $\perp$ AM rezultă că suma BM+MC este mai mică decât BM″+CM″ deci ea este minimă. Repetând raţionamentul succesiv presupunând MB şi MC constante, vom conclude că suma L e minimă când MA, MB şi MC devin respectiv bisectoarele unghiurilor BMC, CMA şi AMB ceeace se întâmplă după cum uşor se constată când

$$\sphericalangle BMC = \sphericalangle CMA = \sphericalangle AMB = 120^0$$

Punctul M se obţine construind pe segmentele BC şi AC arce de cerc capabile de 120^0.

Din cele două exemple, constatăm că în primul caz ne-am folosit de faptul că distanţa cea mai scurtă între 2 puncte este segmentul de dreaptă, iar în al doilea caz de observarea scoasă din primul exemplu.

III

Un mare număr de probleme de maximum şi minimum se pot rezolvi, folosindu-ne de câteva teoreme care rezultă din studiul trinomului de gradul al 2-lea şi al expresiei formată din câtul a două trinoame.

3. In trinomul $y = ax^2 + bx + c$ corespondenţa între x şi y se face numai prin numere reale, pozitive sau negative. Deaceea, presupunând x rezolvat în raport cu y, soluţiile trebue să fie reale. Discriminantul ecuaţiei:

$ax^2 + bx + c - y = 0$ trebue să fie pozitiv ceeace înseamnă că

$$b^2 - 4a(c - y) \geqslant 0$$

adică: $y \geqslant \frac{4ac - b^2}{4a}$ dacă $a > 0$

şi $y \leqslant \frac{4ac - b^2}{4a}$ dacă $a < 0$.

Trinomul $y = ax^2 + bx + c$ are un minimum când a e pozitiv, valoarea acestui minim este $\frac{4ac - b^2}{4a}$ şi el corespunde lui $x = -\frac{b}{2a}$.

Trinomul $y = ax^2 + bx + c$ are un maximum când a e negativ, şi valoarea acestui maxim este $\frac{4ac - b^2}{4a}$ care corespunde lui $x = -\frac{b}{2a}$.

4. In expresia $y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$ ca şi mai sus, legătura dintre x şi y se face numai prin numere pozitive sau negative.

In ecuaţia care dă x în funcţie de y:

$$(a'y - a)x^2 + (b'y - b)x + c'y - c = 0$$

x trebue să fie real; deaceea discriminantul

$$(b'y - b)^2 - 4(a'y - a)(c'y - c)$$

trebue să fie mai mare sau cel mult egal cu zero adică:

$$\delta' y^2 + 2Ey + \delta \geqslant 0 \qquad (1)$$

unde am notat prescurtat

$$b'^2 - 4a'c' = \delta'; \quad b^2 - 4ac = \delta$$

şi $2ac' + 2a'c - bb' = E$

Dacă discriminantul $\Delta = E^2 - \delta\delta'$ al trinomului

$$T = \delta' y^2 + 2Ey + \delta$$

este negativ sau egal cu zero, T păstrează tot timpul un semn constant pentru orice y, aceasta înseamnă că y nu are maxim nici minim.

Dacă $\Delta > 0$ şi $\delta' > 0$

atunci $y \leqslant \frac{-E - \sqrt{\Delta}}{\delta'}$ sau $y \geqslant \frac{-E + \sqrt{\Delta}}{\delta'}$

y are un maxim şi un minim egali respectiv cu

$$\frac{-E-\sqrt{\Delta}}{\delta'} \quad \text{şi} \quad \frac{-E+\sqrt{\Delta}}{\delta'}$$

şi dacă $\Delta > 0$ şi $\delta' < 0$

atunci: $\frac{-E-\sqrt{\Delta}}{\delta'} \leqslant y \leqslant \frac{-E+\sqrt{\Delta}}{\delta'}$

deci y capătă valoarea maximă $\frac{-E+\sqrt{\Delta}}{\delta'}$

şi valoarea minimă $\frac{-E-\sqrt{\Delta}}{\delta'}$.

IV

Considerând produsul $z = xy$, în care suma factorilor $x + y = a$ (const), căruia aplicându-i rezultatele obţinute sub 3, deducem:

5. *Produsul a doi factori pozitivi variabili în care suma factorilor este constantă, este maximum când factorii devin egali.*

Aplicând rezultatele obţinute sub 4 sumei $z = x + y$, în care produsul termenilor $xy = a$ (constant), conchidem:

6. *Suma a doi termeni pozitivi variabili, al căror produs este constant, este minimă când termenii devin egali.*

Teoremele 5 şi 6 pot fi generalizate.

7. *Produsul mai multor factori pozitivi variabili, a căror sumă este constantă, este maximum când factorii devin egali.*

Fie $P = x\,y\,z\,u \ldots \omega$

în care $x + y + z + \ldots + \omega = a$

să arătăm că P e maxim când

$$x = y = z = u = \ldots = \omega.$$

Presupunând P maxim şi factorii neegali, de pildă $x \neq y$, ajungem la o absurditate. Într'adevăr deşi produsul

$$P' = \frac{x+y}{2} \cdot \frac{x+y}{2} \cdot z \cdot u \ldots \omega$$

are suma factorilor

$$\frac{x+y}{2} + \frac{x+y}{2} + z + u + \ldots + \omega = x + y + z + v \ldots + \omega = a$$

ca şi P, este totuşi mai mare ca P.

Aceasta rezultă din faptul că $\frac{x+y}{2} \cdot \frac{x+y}{2} > xy$

în cazul când $x \neq y$. Rezultatul este absurd. Dacă P e maxim, nu se poate presupune în cazul când suma factorilor este constantă, că factorii sunt neegali.

8. *Suma mai multor termeni pozitivi variabili, al căror produs este constant, este minimă când termenii devin egali.*

Fie $S = x + y + z + u + \ldots + \omega$

în care $x\,y\,z\,u \ldots \omega = a$. Să arătăm că S e minim când $x = y = z = u = \ldots = \omega$.

Într'adevăr dacă presupunem S minim şi $x \neq y$ pot forma o altă sumă $S' = \sqrt{xy} + \sqrt{xy} + z + u + \ldots + \omega$ unde ca şi la S' avem produsul $\sqrt{xy} \cdot \sqrt{xy} \cdot z \ldots \omega = xyz \ldots \omega = a$ şi totuşi $S' < S$ pentrucă $2\sqrt{xy} < x + y$.

Rezultatul este absurd. S nu poate fi minim, în condiţiile date, dacă termenii sunt neegali.

9. *Produsul* $P = x^m y^n z^p \ldots \omega^r$ *în care* $x + y + z \ldots + \omega = a$ (const.) *este maxim când:*

$$\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p} = \ldots \frac{\omega}{r}$$

Într'adevăr în cazul când $m, n, p, \ldots, r$ sunt întregi putem scrie

$$P = m^m n^n \ldots r^r \cdot \underbrace{\frac{x}{m} \cdot \frac{x}{m} \ldots \frac{x}{m}}_{m \text{ ori}} \underbrace{\frac{y}{n} \cdot \frac{y}{n} \ldots \frac{y}{n}}_{n \text{ ori}} \ldots \underbrace{\frac{\omega}{r} \cdot \frac{\omega}{r} \ldots \frac{\omega}{r}}_{r \text{ ori}}$$

şi deoarece

$$\underbrace{\frac{x}{m} + \frac{x}{m} + \ldots + \frac{x}{m}}_{m \text{ ori}} + \underbrace{\frac{y}{n} + \frac{y}{n} + \ldots + \frac{y}{n}}_{n \text{ ori}} + \ldots + \underbrace{\frac{\omega}{r} + \frac{\omega}{r} + \ldots + \frac{\omega}{r}}_{r \text{ ori}}$$

$= x + y + z \cdots + \omega = a$ (constant), produsul este maxim când

$$\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \ldots = \frac{\omega}{r}$$

ceeace trebuia dovedit.

10. *Suma* $S = x + y + z + \ldots + \omega$ în care $x^m y^n \ldots \omega^r = a$ (constant) *este minimă când:*

$$\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p} = \ldots = \frac{\omega}{r}$$

Presupunând $m, n, \ldots, r$ întregi putem scrie:

$$S = \underbrace{\frac{x}{m} + \frac{x}{m} + \ldots + \frac{x}{m}}_{m \text{ ori}} + \underbrace{\frac{y}{n} + \frac{y}{n} + \ldots + \frac{y}{n}}_{n \text{ ori}} + \ldots + \underbrace{\frac{\omega}{r} + \frac{\omega}{r} + \ldots + \frac{\omega}{r}}_{r \text{ ori}}$$

In această sumă produsul termenilor este:

$$\frac{x^m}{m^m} \cdot \frac{y^n}{n^n} \cdots \frac{w^r}{r^r} = \frac{a}{m^m \cdot n^n \cdot r^r} = \text{constant}$$

deci conform teoremei 8, S este minimă când

$$\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p} = \ldots = \frac{w}{r}$$

V

Aplicaţiile practice ale teoremelor 5; 6; 7; 8; 9 şi 10 sunt multe. Vom ilustra prin exemple afirmaţia noastră.

11. Ni se cere să scoatem, dintr'o tablă triunghiulară de zinc, un dreptunghiu în aşa fel ca să avem cât mai puţine deşeuri. Cum trebuesc făcute tăieturile?

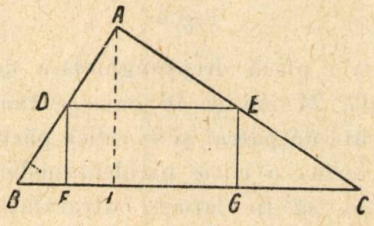


Fig. 3.

Soluţie. Pentru a avea pierderi minime de material înseamnă să scoatem un dreptunghiu de arie maximă.

Dacă notăm baza BC = a, înălţimea AI = h şi DE = x, iar EG = y (fig. 3) deducem:

$$\text{aria DEFG} = xy = \frac{a}{h} y\,(h - y).$$

Produsul $y(h-y)$ având suma factorilor

$$y + (h - y) = h$$

(constant) rezultă că e maxim când factorii devin egali (teorema 5), adică

$$y = h - y; \quad \text{ceea ce dă} \quad y = \frac{h}{2}.$$

Se face economie de material dacă tăiem triunghiul la jumătatea înălţimii.

12. Dintr'o buturugă de formă aproximativ

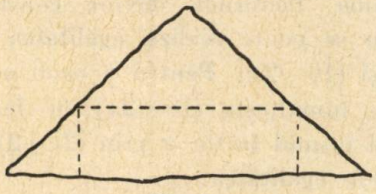


Fig. 4.

conică, voim să scoatem o piesă cilindrică. Cum trebuie procedat pentru a avea cât mai puţine deşeuri?

Soluţie. Buturuga având o formă aproximativ conică, aşa cum se arată în figura 4, pentru a putea aplica teoremele noastre de maxim sau minim vom înlocui figura printr'una exactă ca în figura 4 bis.

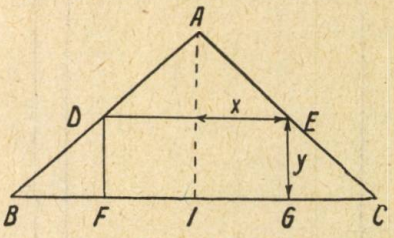


Fig. 4 bis.

Raţionamentul se face pe această din urmă figură.

Fie ABC secţiunea axială în conul circular drept de rază R şi înălţime H. Dacă x este raza cilindrului şi y înălţimea sa, volumul cilindrului este $V = \pi x^2 y$.

Pentru a avea, prin tăiere, cât mai puţine deşeuri va trebui ca V să aibă valoarea maximă.

Din asemănarea triunghiurilor ADE şi ABC rezultă

$$\frac{H - y}{H} = \frac{x}{R} \quad \text{sau} \quad x = \frac{R}{H}(H - y)$$

deci

$$V = \pi \frac{R^2}{H^2}(H - y)^2 y.$$

In produsul $(H-y)^2 y$ suma factorilor

$$(H - y) + y = H$$

este constantă; deci conform teoremei 9 produsul devine maxim când

$$\frac{H - y}{2} = \frac{y}{1}$$

adică atunci când $y = \frac{H}{3}$

Deducem că pentru a obţine din buturugă cilindrul maxim, e necesar să facem o tăietură paralelă cu baza la o treime din înălţime, socotită dela bază.

13. Pentru depozitarea a o sută de vagoane de petrol se construeşte din tablă de fier un rezervor cilindric. Se cer dimensiunile rezervorului, aşa încât să rezulte o cât mai mare economie de material.

Soluţie. Notând cu x raza cilindrului şi cu y înălţimea sa, se pune problema aflării lui x şi y astfel ca suprafaţa totală să fie minimă. Realizând această suprafaţă minimă facem cea mai mare economie de material.

Cunoaştem că: $\pi x^2 y = 10^6\ dm^3$ (un vagon socotit 10000 litri, adică $10^4 dm^3$). Suprafaţa totală are valoarea

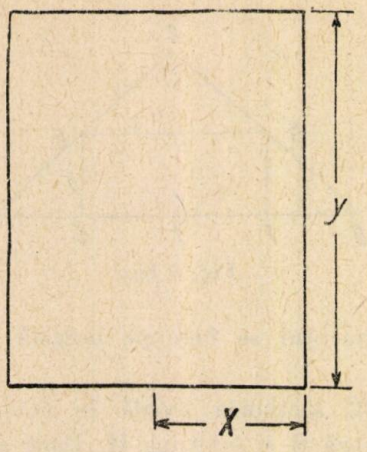


Fig 5.

$$z = 2\pi x^2 + 2\pi xy$$

sau după înlocuirea lui y prin $\frac{10^6}{\pi x^2}$, obţinem:

$$z = 2\pi\left(x^2 + \frac{10^6}{\pi x}\right)$$

Deoarece

$$(x^2) \cdot \left(\frac{10^6}{\pi x}\right)^2 = \text{constant, suma } x^2 + \frac{10^6}{\pi x}$$

devine minimă când $\frac{x^2}{1} = \frac{\frac{10^6}{\pi x}}{2}$ (teorema 10)

sau

$$x = \sqrt[3]{\frac{10^6}{2\pi}} = \frac{100}{\sqrt[3]{2\pi}}\text{ dm} \quad \text{şi} \quad y = 100\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}\text{ dm.}$$

Calculând raportul dintre y şi x găsim $y = 2x$; adică rezervorul are suprafaţa totală minimă când secţiunea axială a cilindrului devine un patrat cu latura de 10,83 m.

14. Intr'o fabrică se confecţionează 10000 oale cilindrice smălţuite, fiecare cu capacitatea de 4 litri. Ce dimensiuni trebuie să aibă o oală pentru a realiza maximum de economie.

Soluţie. Maximum de economie se poate realiza folosind minimum de fier şi smalţ; ceea ce înseamnă că trebue să realizăm un cilindru cu volumul de 4 dm, care să aibă aria laterală împreună cu aria fundului minimă.

Avem $\pi x^2 y = 4\ dm^3$ şi aria

$$z = \pi x^2 + 2\pi xy = \pi(x^2 + 2xy)$$

sau dacă se înlocueşte y cu $\frac{4}{\pi x^2}$ revine să calculăm minimul expresiei:

$$x^2 + \frac{8}{\pi x}$$

Observând că $(x^2) \cdot \left(\frac{8}{\pi x}\right)^2 = \text{constant}$, rezultă că minimul se realizează când:

$$\frac{x^2}{1} = \frac{8}{2\pi x}$$

adică atunci când

$$x = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}} \text{ şi } y = x = 1{,}083 \text{ dm.}$$

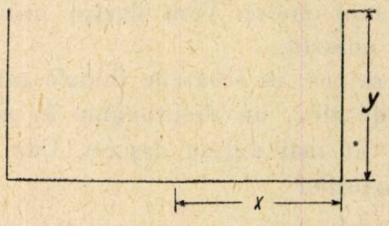


Fig. 6.

15. Dintr'o placă dreptunghiulară de zinc cu dimensiunile 24 cm şi 16 cm, se taie din cele 4 colţuri câte un patrat şi se ridică părţile laterale pentru a forma o cutie paralelipipedică. Cât de mare trebue să fie latura patratului pentru a obţine o cutie cât mai încăpătoare?

Soluţie. Paralelipipedul va avea fundul cu dimensiunile

$24 - 2x$ şi $16 - 2x$, iar înălţimea sa va fi x.

Volumul paralelipipedului este în acest caz:

$$V = x(24 - 2x)(16 - 2x)$$

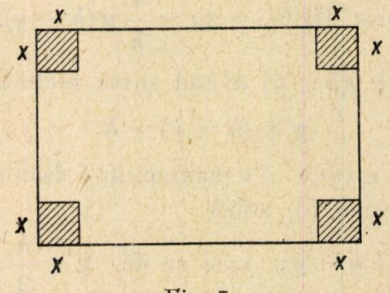


Fig. 7.

Suma factorilor nu e constantă, deci nu se poate aplica teorema 7. Dacă înmulţim ambii membri cu 4, suma factorilor devine constantă, în schimb nu se poate realiza egalitatea factorilor $(24-2x)$ şi $(16-2x)$. Pentru a ocoli aceste dificultăţi, se înmulţeşte $(16-2x)$ cu factorul arbitrar k şi primul factor x prin $(2k+2)$, în acest caz obţinem egalitatea:

$$k(2k+2)\ V = (2k+2)x\ (24 - 2x)(16k - 2kx)$$

Acum suma factorilor este

$$(2k+2)x + 24 - 2x + 16k - 2kx = 24 + 16k,$$

adică o constantă. Maximul are loc când:

$$(2k+2)x = 24 - 2x = 16k - 2kx$$

Din egalitatea primelor două expresii obţinem $x = \frac{12}{k+2}$, care înlocuită în egalitatea ultimelor două ne dă:

$2k^2 - 2k - 3 = 0$ din care reţinem $k = \frac{1+\sqrt{7}}{2}$

iar $x = \frac{4(5-\sqrt{7})}{3} = 3{,}13$ cm, pentru care volumul cutiei devine maxim.

Aplicaţiile prezentate în acest articol ne arată suficient de clar importanţa pentru practică a problemelor de maximum şi minimum. Exemplele tratate sunt câteva din mulţimea de probleme de acest gen. Elevii vor avea prilejul să adâncească teoria maximelor şi minimelor atunci când vor studia calculul diferenţial şi integral. Studiul lor va ilustra şi mai mult legătura adâncă dintre teorie şi practică.

AVIONUL — O CUCERIRE A TEHNICII

Virgil Atanasiu

Incă din antichitate, oamenii au sperat să înveţe să sboare, au sperat să supună voinţei lor spaţiile aeriene.

Multe poveşti şi legende vorbesc despre diferiţi eroi care ar fi isbutit să supună forţa aerului. Covorul fermecat, căluţul cocoşat, Tugarin, fiul de balaur cu aripi de hârtie şi multe altele, exprimă această năzuinţă de a sbura a omului.

Letopiseţele ruseşti arată că la asediul Ţarigradului, adică în anul 906, Cneazul din Kiev, Oleg, a încercat să folosească smeul în lupta contra duşmanilor, iar Criacutnoi, dascălul voevodului din Riazani, în anul 1731 a construit un burduf mare, pe care l-a umflat cu fum, i-a făcut apoi dedesubt nişte legături în care s'a aşezat, izbutind să se ridice mai sus ca un mesteacăn. Purtat de vânt, Criacutnoi a fost izbit de o clopotniţă, şi reuşi să se salveze agăţându-se de funia clopotului.

Aceasta a fost prima ridicare a omului în aer şi nu a fraţilor Montgolfier cum mi se spunea în trecut în cărţile de fizică. Fraţii Montgolfier, abia în anul 1783, adică cu 52 de ani mai târziu au sburat cu un aerostat de tipul celui construit de Criacutnoi.

Primul pas în studierea straturilor superioare ale atmosferei, se datoreşte genialului savant rus M. V. Lomonosov, descoperitorul legii conservării materiei, întemeietorul a numeroase ştiinţe, care printr'o serie de lucrări ca: «Cercetarea teoriei forţei elastice a aerului», «Despre circulaţia liberă a aerului observată de mine», etc., a pus bazele meteorologiei şi aerodinamicei ştiinţifice. Pentru a putea întreprinde aceste studii, Lomonosov a inventat şi a construit în 1754, primul elicopter din lume, cu două elici orizontale, care se roteau în direcţii opuse, realizând astfel un aparat mai greu decât aerul, capabil să se menţină în aer.

Către sfârşitul secolului al XIX-lea, problema centrală a aeronauticei, era construirea aparatelor de sburat mai grele decât aerul. O mare contribuţie la rezolvarea noilor probleme ale sborului a adus genialul savant rus D. I. Mendeleev, creatorul sistemului periodic al elementelor, care era convins că inventarea avionului va constitui o epocă nouă în evoluţia ştiinţei şi tehnicii şi că această invenţie va aparţine ruşilor. In 1880 Mendeleev publică lucrarea sa clasică «Cu privire la rezistenţa lichidelor şi la aeronautică», care a constituit un manual de bază pentru cei ce se ocupau cu construcţiile navale, aeronautica şi balistica.

Rezolvarea cu succes a problemelor sborului cu aparate mai grele decât aerul, aparţine savantului şi inventatorului rus A. F. Mojaischi, înfăptuindu-se astfel previziunea lui Mendeleev.

Mojaischi s'a bazat în lucrările sale pe cercetările lui D. I. Mendeleev, M. A. Râcaciov şi a altor savanţi ruşi. Mojaischi s'a ocupat timp îndelungat cu construcţiile navale, studiind acţiunea elicelor de vase, a aripilor morilor de vânt şi a studiat de asemenea cu multă atenţie sborul păsărilor. Ideea construirii unui aparat de sburat — a avionului — i s'a înfiripat însă din anul 1855. In acest scop Mojaischi construieşte diferite smee, iar în 1876 face primul sbor din lume cu un smeu remorcat de o troică. El a ajuns să stabilească pentru prima oară legăturile reciproce dintre greutatea aparatului de sburat, viteza de sbor şi dimensiunile aparatului. După aceste minuţioase pregătiri Mojaischi a elaborat proiectul unui aparat de sburat în Ianuarie 1877, pe care l-a prezentat în două rânduri Comisiei Ministerului de Război, care a făcut însă totul pentru a da uitării şi pentru a împiedica realizarea acestei geniale creaţii, şi în cele din urmă a respins

proiectul primului avion din lume. Mojaischi însă, sprijinit de opinia publică, a continuat lucrările pentru realizarea proiectului. La 3 Noemvrie 1881, Mojaischi a obţinut brevetul pentru invenţia sa dela Departamentul Comerţului şi al Manufacturilor — primul brevet de avion din lume — iar în vara anului 1882 avionul a fost gata. Avionul construit de Mojaischi avea înfăţişarea unui monoplan cu un profil de aripă subţire, cu fuzelaj, tren de aterizaj, ampenaj orizontal şi vertical şi mecanism de tracţiune.

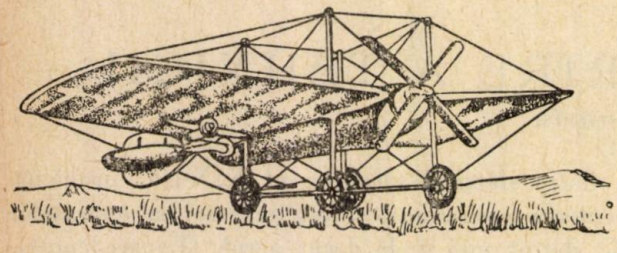


Fig. 1. Avionul construit de Mojaischi.

După schiţele lui Mojaischi au fost construite şi folosite pentru avionul său două motoare cu abur, precum şi instrumentajul special: busolă, un clinometru care indica poziţia avionului în aer, un altimetru pentru indicarea înălţimii sborului, un vitezometru pentru măsurarea vitezei de sbor şi un vizor special de bombardament In August 1882 la Crasnoe Selo (Rusia) pentru prima oară în lume a avut loc decolarea unui avion, iar mecanicul I. N. Golubev care l-a ajutat pe Mojaischi la construirea avionului, a fost primul aviator din lume; distanţa parcursă prin aer a fost de aproximativ 200 m.

Fraţii Wright care erau la curent cu construcţia avionului lui Mojaischi au construit avionul lor abia cu 21 de ani mai târziu, adică în 1903. Avionul construit de ei era cu mult inferior celui construit de Mojaischi, avionul lor având doar două din cele cinci părţi componente de bază: aripa şi instalaţia de forţă, iar stabilitatea lui era redusă.

In ţara noastră Vuia şi Vlaicu sunt precursori ai aviaţiei.

In 1903 inginerul Traian Vuia, care lucra la o întreprindere de morărit din Franţa, a prezentat Academiei de Ştiinţe din Paris, un proiect pentru construirea unui avion, dar proiectul lui nu a fost aprobat. Totuşi, Vuia izbuti să construiască aparatul pe propria lui cheltuială şi în primăvara anului 1906 el efectuă primul său sbor, lângă Paris. Avionul lui Vuia, spre deosebire de avioanele celorlalţi constructori, ca Voisin, Bleriot, Wright, avea tren de aterisaj şi datorită acestui adaus el a putut decola prin mijloace proprii, iar nu fiind lansat pe plan înclinat sau tras de automobil, cum a fost cazul celorlalţi constructori. Dar Vuia nu a fost susţinut în munca sa nici de străini, nici de cei din ţara lui, şi de aceea el a fost nevoit să părăsească aceste năzuinţi şi să se reîntoarcă la vechile îndeletniciri.

Cel de al doilea mare inventator aeronautic român, Aurel Vlaicu, a întâmpinat de asemenea mari greutăţi până când în urma multor refuzuri, a obţinut permisiunea să-şi construiască avionul în atelierele Arsenalului Armatei.

In Iunie 1910, Vlaicu a reuşit să sboare cu aparatul construit de el, înregistrând prima izbândă. A urmat apoi o serie de sboruri efectuate cu succes în ţară, iar în anul 1912 la Aspern lângă Viena. Faima de mare constructor şi pilot a lui Vlaicu era consacrată. Avionul construit de el era superior celorlalte aparate construite în acel timp în Occident. Firma «Marconi» din Londra, îi trimise comanda pentru două aparate.

Moartea l-a surprins însă pe Vlaicu înainte de a putea termina această comandă. Din cauza unui viraj greşit deasupra regiunii Câmpina, el se prăbuşi în August 1913, tocmai când voia să realizeze acel sbor de mare performanţă: trecerea Carpaţilor.

Moartea lui Vlaicu a îndurerat întregul popor român.

In Octomvrie 1948, la propunerea Partidului Muncitoresc Român, Academia R.P.R. a proclamat pe Aurel Vlaicu membru de onoare post mortem.

Fundamentarea ştiinţifică desvoltată a sborului avioanelor este dată în lucrările «părintelui aviaţiei ruse» N. E. Jucovschi, ale renumitului om de ştiinţă C. F. Ţiolcovschi şi S. A. Ceaplâghin. Lui N. E. Jucovschi îi aparţine cinstea creării aerodinamicei ca ştiinţă, lui C. E. Ţiolcovschi crearea bazelor racheto-dinamice ştiinţifice iar lui S. A. Ceaplâghin expunerea bazelor teoretice ale aripii, de diferite profile precum şi previziunile ştiinţifice ale sborurilor cu viteza sunetului.

N. E. Jucovschi a scris peste 180 lucrări de ştiinţă desvoltând legile sborului cu aparate mai grele decât aerul. Lucrările sale: «In legătură cu teoria sborului», «Despre planarea păsărilor», «Despre aeronautică», «Despre turbioanele care se formează pe partea superioară a aripii», «Teoria turbionară a elicei tractive», etc. sunt lucrări care nu şi-au pierdut importanţa nici astăzi, iar construcţiile ruse de avioane au avut o influenţă imensă asupra desvoltării construc

ţiilor de avioane din lumea întreagă. Cu toate acestea, datorită servilismului şi ploconirii claselor dominante exploatatoare faţă de «cuceririle» tehnicii aviatice din Apus, datorită corupţiei şi putreziciunii cercurilor conducătoare, peste 90% din avioanele şi motoarele necesare Rusiei erau importate din străinătate. Inovaţiile tehnice româneşti erau folosite făţiş de către constructorii străini şi după aceea se întorceau în patria celor care le inventaseră.

In urma victoriei Marei Revoluţii Socialiste din Octombrie, s'au deschis însă mari posibilităţi muncii creatoare a savanţilor, a constructorilor, inventatorilor. Partidul Bolşevic şi genialii lui conducători Lenin şi Stalin au acordat o atenţie deosebită desvoltării aeronauticei. N. E. Jucovschi, prin sprijinul multilateral al Statului Sovietic, S. A. Ceaplâghin, A. N. Tupolev, N. N. Policarpov şi mulţi alţi savanţi şi constructori au putut să-şi desăvârşească cercetările şi să aducă strălucite contribuţii în domeniul aviaţiei. Savanţii sovietici ocupă astăzi un loc de frunte în revoluţia tehnică prin care trece aviaţia, aflată în lupta pentru vitezele sonice şi supersonice. Cercetările savanţilor sovietici C. A. Hristianovici, V. G. Halperin, I. P. Gorschi, A. P. Covaliov, cărora li s'a acordat premiul Stalin, au întrecut cu mult cercetările făcute de savanţii străini.

Noţiuni despre mecanica sborului.

După ce am văzut cum s'a născut ideea minunată a omului pentru sbor, care au fost primele realizări în acest domeniu, şi rolul covârşitor al oamenilor de ştiinţă, a constructorilor şi inventatorilor ruşi şi sovietici în desvoltarea ştiinţei şi

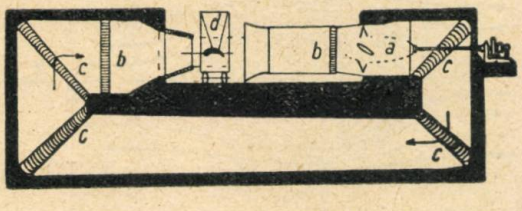


Fig. 3. Tunelul aerodinamic cu circuit închis: a—elicea (ventilatorul); b—grătar pentru regularizarea curentului; c — grătar pentru orientarea aerului în tunel; d—cabina de experienţe

tehnicii aviatice, să analizăm acum câteva probleme de aerodinamică pentru a ne explica sborul avionului.

In explicarea acestui fenomen, rezistenţa aerului este factorul esenţial.

Să considerăm un plan care înaintează în aer. El va întâmpina o rezistenţă ce creşte pe măsură ce viteza de înaintare a planului creşte. Studiile făcute în această direcţie cu ajutorul tunelului aerodinamic au arătat că această rezistenţă este proporţională cu pătratul vitezei, depinzând în acelaşi timp de mărimea suprafeţei pe care planul o prezintă la înaintare, de forma şi exteriorul suprafeţei şi de densitatea aerului.

In tunelul aerodinamic se realizează fenomenul invers de cum se întâmplă în realitate, adică în loc să se deplaseze corpul în aer cu o anumită viteză, se deplasează aerul asupra şi în jurul corpului cu viteza dorită. Rezultatele ce se obţin sunt identice acelora pe care le-am fi obţinut dacă s'ar fi mişcat corpul în aer, dar în schimb experimentarea se face cu mult mai mare uşurinţă.

Dacă se notează prin R mărimea rezistenţei aerului, prin S suprafaţa pe care o prezintă corpul la înaintare, prin V viteza de deplasare a acestui plan — ceea ce este tot una cu viteza de curgere a aerului — poziţia planului fiind perpendiculară pe direcţia deplasării aerului, şi prin K un coeficient în care sunt înglobaţi ceilalţi factori care influenţează asupra valorii rezistenţei, putem reprezenta mărimea rezistenţei prin relaţia:

$$R = K.S.V^2 \qquad (1)$$

Această relaţie este cunoscută sub numele de

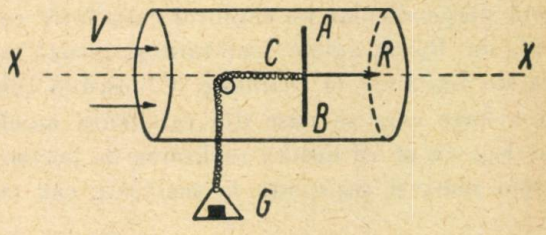


Fig. 3. Un plan perpendicular pe direcţia curentului, întâmpină o rezistenţă R.

«legea pătratului» şi este valabilă numai pentru viteze mai mici decât viteza sunetului.

Dacă notăm:

$$K = \frac{\rho}{2} C$$

unde $\frac{\rho}{2}$ este jumătatea densităţii aerului, iar C un coeficient aerodinamic care nu mai depinde decât de forma şi de exteriorul corpului, atunci relaţia (1) devine:

$$R = \frac{\rho}{2} C \cdot S \cdot V^2 \qquad (2)$$

Dacă planul este înclinat de un unghi *i*, numit unghi de atac, pe direcţia mişcării, rezultanta R a rezistenţei aerului nu va mai fi paralelă cu

direcţia mişcării, ci va fi înclinată puţin înspre înapoi.

Descompunând forţa R după două axe rectangulare, una fiind paralelă cu direcţia de mişcare şi cealaltă axă perpendiculară pe ea, vom avea forţele R_y şi R_x care, conform legii patratului, vor putea fi exprimate prin:

$$R_x = \frac{\rho}{2} C_x \cdot S \cdot V^2 \qquad (3)$$

$$R_y = \frac{\rho}{2} C_y \cdot S \cdot V^2 \qquad (4)$$

în care: C_x este coeficientul de rezistenţă la înaintare; C_y — coeficientul de portanţă.

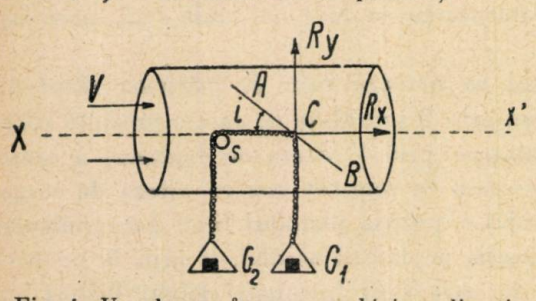


Fig. 4. Un plan ce face un unghi *i* cu direcţia curentului.

Componenta R_y se numeşte forţă portantă sau *portanţă*, şi este situată în planul de simetrie al corpului în jurul căruia se scurge aerul, fiind dirijată perpendicular pe curentul care întâlneşte corpul, iar R_x se opune înaintării şi poartă numirea de *rezistenţă la înaintare*. Cunoscând rolul acestor forţe care se nasc din rezistenţa aerului se înţelege că se va urmări realizarea de portanţe cât mai mari şi rezistenţe la înaintare cât mai mici.

Pentru a înţelege mai uşor variaţia valorilor lui R_y şi R_x este destul să cunoaştem variaţia coeficienţilor aerodinamici C_y şi C_x în funcţie de unghiul de atac (bineînţeles aceşti coeficienţi mai depind de forma şi starea suprafeţei). şi deci să vedem când valoarea lui C_y este maximă şi când valoarea lui C_x este minimă. In acest scop se foloseşte tunelul aerodinamic în care se aşează macheta de studiat, montată cu un sistem de suspensie special care este în legătură cu o balanţă aerodinamică, aşa cum se vede în fig. 3 şi fig. 4.

Cu această balanţă se pot măsura precis valorile forţelor aerodinamice care acţionează asupra modelului, pe care apoi le introducem în formulele (3) şi (4) pentru a afla valorile corespunzătoare pentru C_x şi C_y. Se consideră apoi două axe rectangulare şi se ia pe abscisă valorile lui C_x şi pe ordonată, valorile lui C_y, când unghiul de atac variază dela 0° până la 180° şi apoi dela 180° până la 360°.

Curba rezultată poartă denumirea de polară. Cercetându-se polara se constată că C_y este maxim când unghiul de atac este de aproximativ 15°, iar C_x este minim pentru un unghi de atac de 0° sau 180°.

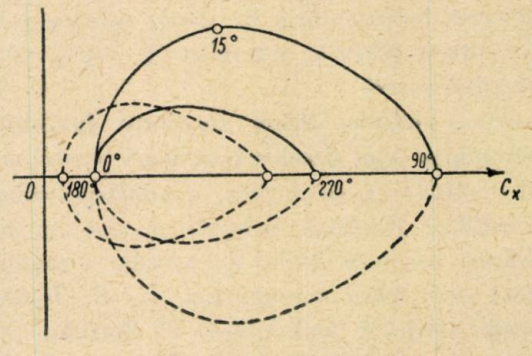


Fig. 5. Polara planului.

Fotografiindu-se spectrul aerodinamic pentru plane şi corpuri de forme diferite (prin colorarea aerului, de exemplu, cu fum) s'a constatat existenţa unor regiuni de vârtejuri.

Fig. 6. Formarea vârtejurilor (spectru aerodinamic)

Eliminând aceste regiuni prin umplerea lor cu material s'a ajuns la profilul pe care trebue să-l aibă o suprafaţă ce înaintează în aer, pentru a întâmpina cea mai mică rezistenţă la înaintare şi pentru a da o portanţă maximă.

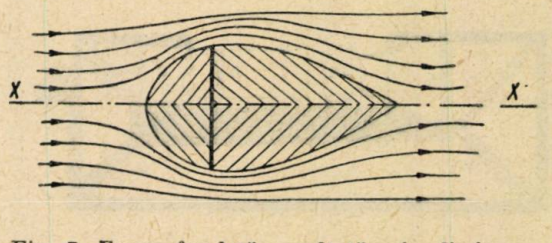


Fig. 7. Forma fuzelată, rezultată prin eliminarea regiunei turbionare.

In acest mod s'a determinat atât profilul aripei cât şi forma tuturor celorlalte organe ale avionului.

Studiindu-se în tunelul aerodinamic macheta unui profil simetric de aripă, s'a constatat că el va da o portanţă numai în cazul când unghiul lui de atac este diferit de zero. Deci dacă unghiul de atac este nul, nu ia naştere nicio portanţă, deoarece curentul care se prelinge de-a-lungul

aripei, este perfect simetric. Dacă aripa prezintă un oarecare unghi de atac, simetria curentului dispare şi apare o portanţă. La unghiuri de atac mai mici ca zero, portanţa devine negativă. Aceasta înseamnă că ea nu va fi dirijată spre faţa superioară a aripei (extrados) ci înspre faţa inferioară (intrados).

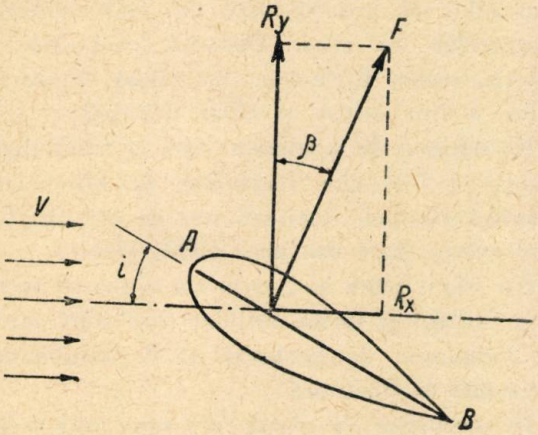


Fig. 8. Apariţia portanţei la aripă când unghiul de atac e diferit de zero.

Deoarece pentru calculul calităţilor de sbor trebue să se cunoască la fiecare unghi de atac în acelaşi timp valorile lui C_y şi C_x, este foarte răspândită metoda prin care se dau caracteristicele aerodinamice ale profilului cu ajutorul

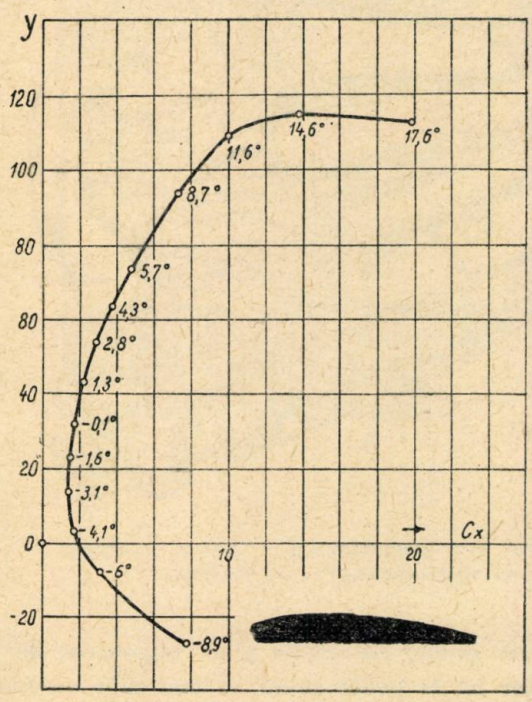


Fig. 9. Aspectul unei polare determinate asupra unui profil subţire. Se va da atenţie mărimilor: Cx minim şi Cy maxim.

polarei. Rolul aripii fiind acela de a crea forţă portantă şi pentrucă în acelaşi timp cu portanţa (F_y) se produce şi rezistenţa la înaintare (R_x), fenomen nedorit dar care nu se poate înlătura, un indice important pentru aripă este raportul $\frac{C_y}{C_x}$, numit *finețea* ei. Cu cât finețea unei aripi este mai mare, cu atât aripa îşi îndeplineşte mai bine rolul ei. Cu ajutorul polarei se poate determina finețea la orice unghi de atac.

Am văzut că rolul aripei este să creeze forţă de sustentaţie; această sustentaţie este dată 2/3 de depresiunea care ia naştere pe partea de deasupra aripei şi o treime de presiunea ce se

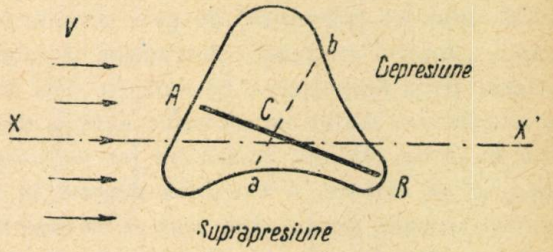


Fig. 10. Graficul de suprapresiune şi depresiune

formează dedesubtul aripei. Datorită însă acestei distribuţii a presiunilor, se produc vârtejuri la marginea aripei şi apare încă o rezistenţă suplimentară pe care o creăm sau o provocăm noi căci ea este inseparabilă de forţa de sustentaţie de care avem nevoie. Această rezistenţă suplimentară pe care o provocăm se numeşte rezistenţă indusă (adică provocată).

Rezistenţa indusă a aripei este cu atât mai mică cu cât anvergura aripilor, viteza de sbor şi densitatea aerului sunt mai mari.

S'a văzut de asemenea că sustentaţia este direct proporţională cu patratul vitezei, aceasta înseamnă că pentru a putea sbura, avionul trebue să dispună de o anumită viteză. In acest scop, avionul este prevăzut cu un grup motopropulsor. Motorul transformă energia calorică (circa 30%) în energie mecanică (mişcare de rotaţie) iar propulsorul transformă energia mecanică în tracţiune sau în propulsiune. Mijoacele de propulsie sunt elicea sau reacţiunea de gaze.

Elicea joacă la avion un dublu rol: pe de o parte ea asigură mişcarea de translaţie a avionului, creând tracţiunea necesară înaintării iar pe de altă parte, ea este regulatorul funcţionării motorului. La viteze mari randamentul şi deci şi tracţiunea elicei scade. Aceasta are loc dacă viteza vârfurilor palelor elicei ajung sau depăşesc viteza sunetului. Avioanele moderne dispun de elice cu pas reglabil, adică elici cu pale ce pot fi răsucite în sbor pentru a se asigura cea mai mare valoare a randamentului.

Tracţiunea pe care o desvoltă elicea se naşte datorită respingerii neîncetat înapoi a unei vine

puternice de aer. Respingând aerul către spate, elicea capătă o tracţiune către înainte, adică elicele împing aerul şi sunt concomitent împinse de el. Avionul cu elice însă nu se poate numi cu reacţie, deoarece reacţiunea aerului necesară pentru mişcare, nu este creată de către motoarele lor, ci de către elementul auxiliar, elicea.

Un motor cu reacţie este acel motor care singur, fără ajutorul unor elemente intermediare, dă naştere unei reacţiuni care este singura sursă a mişcării. Această reacţiune apare deobicei datorită unui jet (ţâşnitură) de gaze dirijate către înapoi. Motorul cu reacţie întruneşte şi motorul propriu zis şi propulsorul. Se numeşte deci motor cu reacţie acel motor care folosind energia desvoltată în el de căldură, crează un jet puternic de gaze, şi ca urmare, o tracţiune dirijată în sens contrar sensului jetului. Dar cum se creează acest jet? Aceasta este simplu. Dacă într'un rezervor oarecare se găseşte aer, sau gaz în general sub o presiune mai mare decât cea înconjurătoare, diferenţa de presiune sileşte gazul să se scurgă afară. Cu cât această diferenţă este mai mare, cu atât mai intens este jetul. Este necesar să se asigure o presiune constantă în rezervor, cu toate că gazul se scurge afară neîncetat. Acest lucru se poate realiza făcând să ardă în rezervor, anumite cantităţi de combustibil. Pentru determinarea forţei de tracţiune a oricărui motor cu reacţie (statoreactor, turboreacor, pulsoreactor, etc.), în primul rând trebue să se studieze jetul său. Motoarele cu reacţie au căpătat o utilizare largă în aviaţia modernă, datorită vitezei mari pe care pot să o imprime aparatului. Realizarea propulsiei prin reacţie, a dat posibilitate constructorilor pe de o parte, să înlăture piedica ce o prezentau avioanele cu elice când viteza lor se apropia de viteza sunetului, iar pe de altă parte, puterea motorului cu reacţie este cu mult superioară motoarelor cu elice. Datorită propulsiei prin reacţie, vechea barieră pentru viteză, viteza sunetului, a fost atinsă şi chiar depăşită.

Necesitatea de a trece aviaţia la tracţiunea cu reacţie a fost clar formulată de întemeietorul tehnicei reacţiei, distinsul om de ştiinţă, C. E. Tiolcovschi, încă din anul 1930.

S'a văzut până aici, cum s'a ajuns să se realizeze profilul şi forma aripilor care sunt capabile de maximum de portanţă şi de minimum de rezistenţă la înaintare.

De asemenea s'a văzut care sunt mijloacele de propulsie pentru a da sistemului viteza necesară.

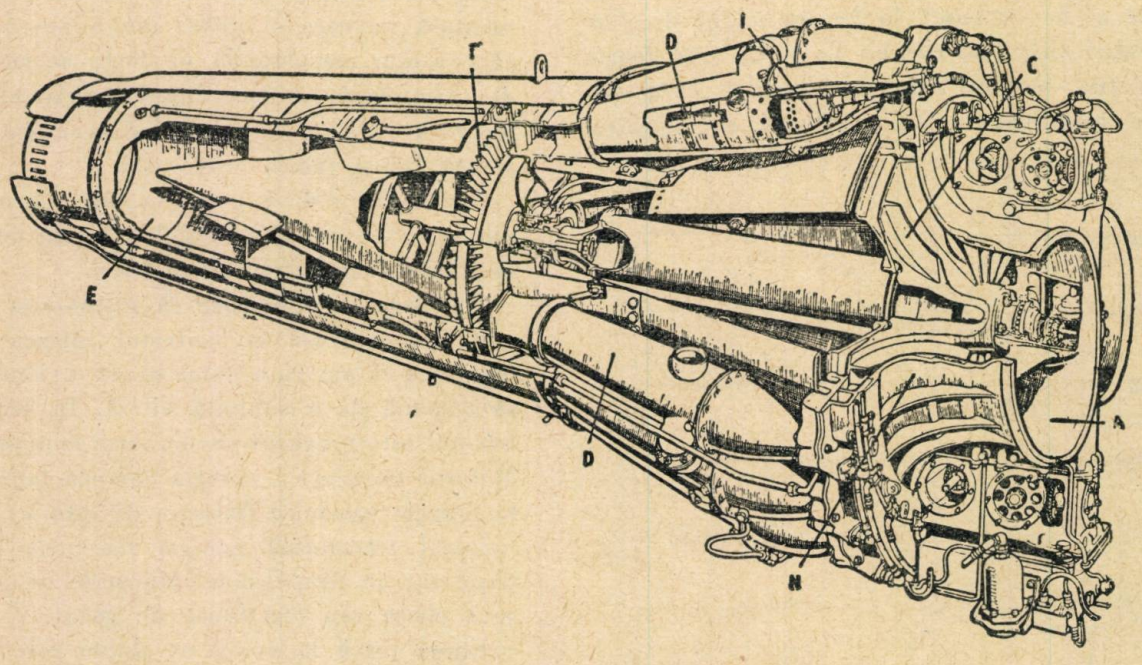


Fig. 11 Secţiunea printr'un turboreactor: a. — Priza de aer; c. — Compresor; d. — Camere de ardere; e. — Con de evacuare; i. — Injector; n. — Carcasa compresorului; t. — Turbină.

Dar numai cu aripile şi cu mijloacele de propulsie nu se poate sbura, ci mai sunt necesare şi alte organe ajutătoare strict indispensabile avionului. La un avion trebue să avem înafară de aripi care asigură sustentaţia, înafară de motor — elice sau reactor care asigură propulsia, şi organe care să asigure stabilitatea şi maniabilitatea şi anume ampenajele precum şi un organ de legătură şi amenajamente, — fuzelajul — şi de

susţinere pe teren, — trenul de aterizaj — precum şi diferite aparate de bord.

La fel cum s'a studiat în tunelul aerodinamic planul, aripa şi s'a determinat polarele, şi în cazul avionului complet, redus însă la o machetă [1]) se studiază şi se stabileşte polara respectivă.

identificăm valoarea forţei de rezistenţă la înaintare a aripei cu aceea a avionului. Forţa de rezistenţă la înaintare a avionului este mai mare decât aceea a unei aripi, deoarece ea este provocată şi de alte organe: fuzelajul, trenul de aterizaj, radiatorul, etc. Nu este greu însă de calculat forţa de rezistenţă la înaintare a fiecărui

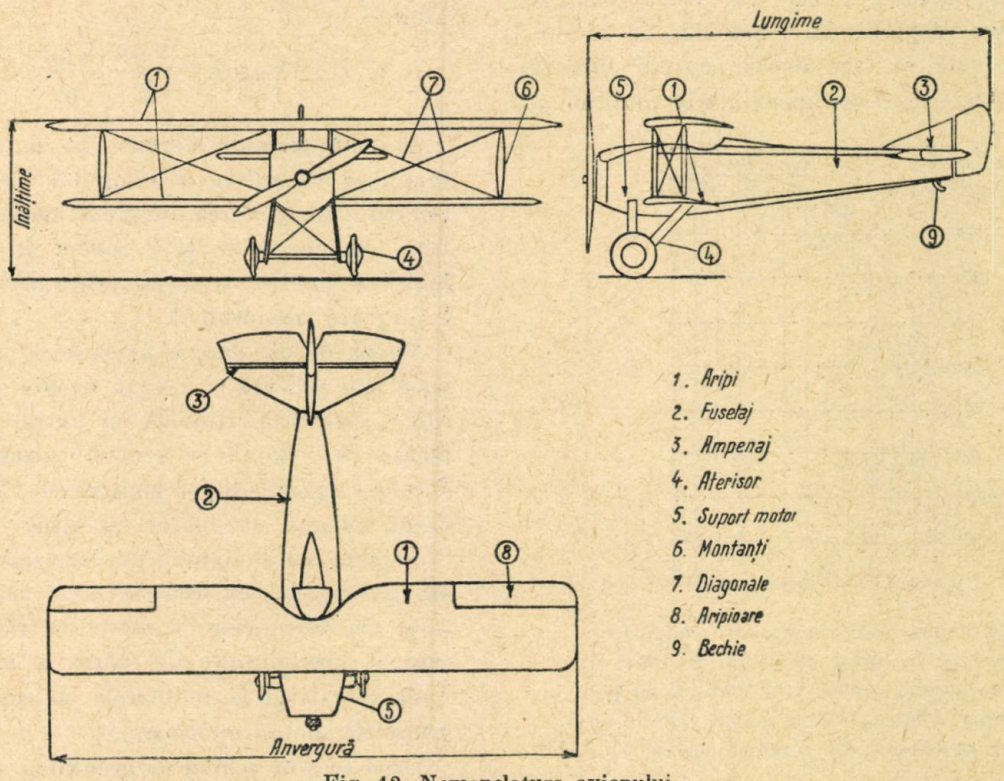


Fig. 12. Nomenclatura avionului.

Pentru calculul calităţilor de sbor ale avionului trebue determinate forţele care acţionează asupra lui. Principalele forţe sunt: forţa de sustentaţie (portanţa), forţa de rezistenţă la înaintare şi forţa de tracţiune a elicei (găsirea forţei gravităţii care acţionează asupra avionului, evident nu prezintă nicio dificultate).

Putem considera că portanţa avionului este produsă numai de aripă. Deaceea nu se face niciun fel de deosebire între termenii de «portanţa aripei» şi «portanţa avionului». In consecinţă:

$$R_y = \frac{\rho}{2} C_y \cdot S \cdot V^2 \qquad (5)$$

Valoarea lui C_y se ia din încercările aripei în tunelul aerodinamic, iar suprafaţa S este suprafaţa portantă a aripei. Nu este însă posibil să

[1]) Sunt astăzi tunele aerodinamice ale căror dimensiuni permit să se încerce avioanele în mărime naturală cu anvergură până la 15 m. Toate comenzile şi înregistrările indicaţiilor instrumentelor sunt complect mecanizate.

element component al avionului: radiator, fuzelaj etc. Practic însă forţa de rezistenţă la înaintare a întregului avion se află introducând, pentru evaluarea rezistenţei la înaintare a organelor neportante ale avionului, adică a tuturor organelor cu excepţia aripilor, un coeficient de rezistenţe pasive $C_{x\,pas}$. Cu ajutorul acestui coeficient se calculează rezistenţa la înaintare a avionului astfel:

$$R_{x\,av} = \frac{\rho}{2} C_{x\,av} S V^2.$$

Aici S este suprafaţa aripei, iar coeficientul de rezistenţă la înaintare care intră în această formulă se găseşte făcând suma lui $C_{x\,ar}$ şi $C_{x\,pas}$:

$$C_{x\,av} = C_{x\,ar} + C_{x\,pas}$$

deci $C_{x\,av}$ cuprinde coeficientul de rezistenţă al aripei, ($C_{x\,ar}$) şi încă un supliment ($C_{x\,pas}$) care ţine seama de rezistenţa celorlalte organe ale avionului.

Din tot ceea ce s'a spus, urmează că, având ca date de plecare rezultatele încercărilor în tunel, se poate obţine polara avionului.

Pentru ca avionul să poată sbura trebue să posede o anumită viteză, numită viteză de sbor. Pentru a dobândi această viteză el trebue să ruleze mai înainte pe sol. Prima mărime care trebue să fie determinată când se face calculul rulării, este viteza la care avionul se poate ridica de pe pământ, adică viteza de decolare.

Să notăm această viteză cu V_{dec}. Valoarea acestei viteze depinde fără îndoială de unghiul de atac la care se face decolarea, dar întrucât acest unghi este deobicei aproximativ determinat,

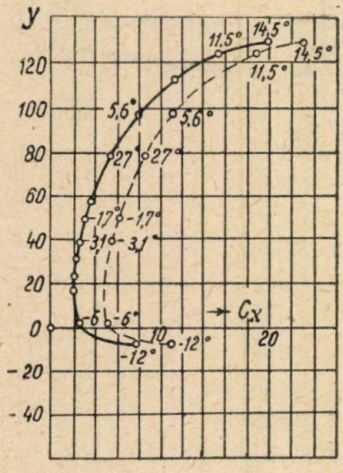


Fig. 13. Polara unui avion a cărei aripă este reprezentată de curba punctată. Se observă că forma acestei polare este identică cu polara aripei. Pentru aceasta numai valorile de Cx au crescut, Cy a rămas acelaşi.

se poate deduce o anumită formulă pentru calculul lui V_{dec}. Vom considera că valoarea medie a lui C_y în timpul decolării este de circa 80—85% din $C_{y\,max}$. Apoi putem calcula pe V_{dec} din considerentul că după ce a decolat avionul trebue să-şi echilibreze greutatea (G) cu portanţa sa. Deoarece greutatea (G) este echilibrată de portanţă, putem spune că:

$$G = R_y = \frac{\rho}{2} C_y \cdot S \cdot V^2 \quad \text{sau}$$

$$G = \frac{\rho}{2} C_y \cdot S \cdot V^2,$$

de unde scoţând valoarea lui V^2, avem:

$$V^2 = \frac{2G}{\rho \cdot C_y \cdot S} \quad \text{sau} \quad V = \sqrt{\frac{2G}{\rho \cdot C_y \cdot S}}.$$

Această formulă permite să se calculeze viteza de decolare. Cunoscând acceleraţia medie în timpul rulării pe sol şi amintindu-ne că acceleraţia este creşterea vitezei într'o secundă, putem calcula imediat câte secunde va dura decolarea şi anume:

$$t = \frac{V_{dec}}{a}.$$

După aceea nu este greu să găsim lungimea (L) de rulare pe sol, înmulţind viteza medie cu timpul t; dacă avionul a început să ruleze cu o viteză egală cu zero, viteza medie în etapa de rulare pe sol va fi:

$$V_{med} = \frac{0 + V_{dec}}{2} = \frac{V_{dec}}{2}$$

atunci

$$L = V_{med} \cdot t = \frac{V_{dec}}{2} \cdot \frac{V_{dec}}{a} = \frac{V^2_{dec}}{2a}.$$

Această formulă permite să se calculeze deci lungimea de rulare a avionului pe sol. Desigur, pentru determinarea lungimii terenului de decolare, trebue să se ţină seama şi de luarea de înălţime pentru trecerea peste obstacolele care înconjoară aerodromul.

Viteza de decolare a avioanelor cu reacţie este ceva mai ridicată şi atunci, deoarece lungimea de rulare este proporţională cu pătratul vitezei, urmează ca avionul cu reacţie rulează înainte de decolare mai mult, şi anume cu 15% mai mult decât avionul cu motor cu elice.

Aceasta nu înseamnă că însuşirile de decolare ale avioanelor cu reacţie sunt mult inferioare celor ale avioanelor cu motor cu elice. Fapt cert este că posibilităţile de mărire a tracţiunii sunt mult mai largi la motoarele cu reacţie decât la grupurile motopropulsoare.

Dacă se ţine seama de greutatea elicelor, radiatoarelor, ţevilor de eşapament şi altor organe care nu sunt necesare la avioanele cu reacţie se găseşte că la avioanele cu reacţie modernă pentru tracţiuni de decolare egale, instalaţia reactorului poate da avionului o greutate specifică mai mică. Acest lucru are desigur repercusiuni favorabile asupra decolării. Trebue deci subliniat că părerea că avioanele cu reacţie au nevoie de aerodroame mult mai mari este nefondată. Deobicei această părere se bazează pe experienţa de exploatare a unor avioane cu motoare imperfecte.

Savanţii şi constructorii sovietici, conduşi de partidul lui Lenin şi Stalin au rezolvat înaintea altora, atât în teorie cât şi în practică, problema trecerii calitative a aviaţiei la o treaptă nouă. Începând din anul 1937, constructorul sovietic A. M. Liulica lucrează cu succes la construirea motoarelor cu reacţie. O activitate rodnică în elaborarea teoriei şi practicei avioanelor cu reacţie desfăşoară savanţii sovietici: V. F. Bolotnikov, B. S. Stecichin, A. A. Cosmodemianschi şi alţii. In primii ani ai Marelui Război pentru Apărarea Patriei, a fost construit primul avion cu reacţie din lume. Deci Uniunii Sovietice îi aparţine de

asemenea și cinstea de a fi construit și încercat primul avion cu reacție din lume.

Apariția tehnicei reactive a deschis o treaptă nouă în desvoltarea aviației. Dela primele motoare de 40—50 CP și viteză de 40 km/h s'a ajuns la peste 4.000 CP și o viteză de peste 750 km/h în cazul avioanelor cu elice, iar pentru avioanele cu reacție la o putere echivalentă de 15.000 CP și o viteză ce a depășit viteza sunetului. Trebue să menționăm că avioanele clasice propulsate prin elice, n'ar fi putut ajunge la vitezele sonice deoarece pe măsură ce se caută a se apropia de această viteză, randamentul elicei devine din ce în ce mai slab din cauza compresibilității aerului, iar puterea motorului ar trebui să fie extrem de mare pentru a se putea provoca o creștere a vitezei într'o mică măsură. De exemplu, pentru ca viteza să crească dela 600 la 1.200 km/h, puterea motorului ar trebui să crească dela 2.000 CP la 16.000 CP, ceea ce nu poate să constitue o soluție. In schimb, avioanele cu reacție, dau un randament cu atât mai bun, cu cât lucrează la viteze mai mari, apropiate de viteza sunetului. Totuși, avioanele cu elice vor rămâne și mai departe însă, pentru viteze mijlocii, avioanele cu reacție fiind rezervate pentru vitezele sonice și supersonice.

Astăzi, problema propulsiei cu reacție care permite sborul cu viteza sunetului a ieșit din stadiul experiențelor de laborator, avioanele cu reacție fiind fabricate în serie.

Dar nu numai în ce privește puterea motorului și viteza de sbor s'au putut realiza creșteri într'o așa de mare măsură, ci și alte performanțe cum ar fi capacitatea de transport precum și raza de acțiune au crescut de asemenea în mod uimitor. Există astăzi avioane care pot transporta peste 30.000 kg, adică pot avea pe bord peste 400 de pasageri, cum există avioane ce pot face peste 18.000 Km fără escală și fără alimentare în sbor, iar cu alimentare în sbor s'a realizat și ocolul pământului.

Viitorul ne rezervă însă realizări și mai mari dacă se ține seama de posibilitatea folosirii energiei atomice pentru punerea în mișcare a motoarelor cu reacție.

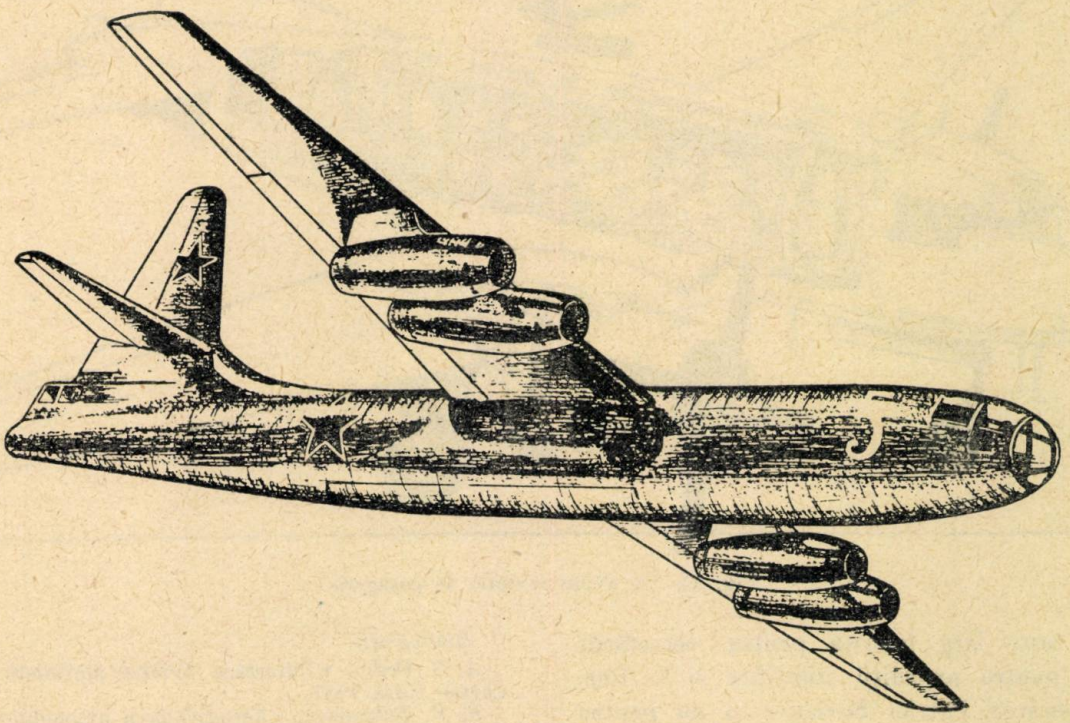


Fig. 14. Avion sovietic cu reacție.

Rolul și importanța aviației

In U.R.S.S., rolul și importanța aviației crește din an în an. Liniile aeriene străbat Uniunea Sovietică în toate direcțiile. Transportul aerian deservește sute de localități. Numai de pe aerodromul central din Moscova pleacă zilnic sute de avioane care transportă în diferite orașe ale Uniunii Sovietice mii de pasageri, zeci de tone de poștă și mărfuri, și sosesc alte sute de avioane zilnic pe acest aerodrom.

Pentru ocrotirea sănătății există aviație sanitară înzestrată cu aparate Röntgen, farmacii, cabinete dentare. Aceste avioane se pot deplasa în regiunile greu accesibile, putând transporta bolnavi sau medici.

De asemenea, aviaţia este folosită în agricultură pentru combaterea paraziţilor agricoli, a lăcustelor, pentru împrăştierea îngrăşămintelor minerale pe suprafeţe întinse de teren; practica arată că un singur avion poate împrăştia într'o zi îngrăşăminte minerală pe o suprafaţă de 90—100 ha.

Perspectivele folosirii aviaţiei în economia naţională sunt nelimitate. Pentru U.R.S.S. aviaţia devine din zi în zi un factor tot mai important în desvoltarea forţelor de producţie.

Sub conducerea Partidului Comunist (b) al Uniunii Sovietice, şi a tovarăşului Stalin, sprijiniţi de superioritatea orânduirii socialiste, savanţii şi inventatorii sovietici desvoltă cu succes ştiinţa şi tehnica aviatică.

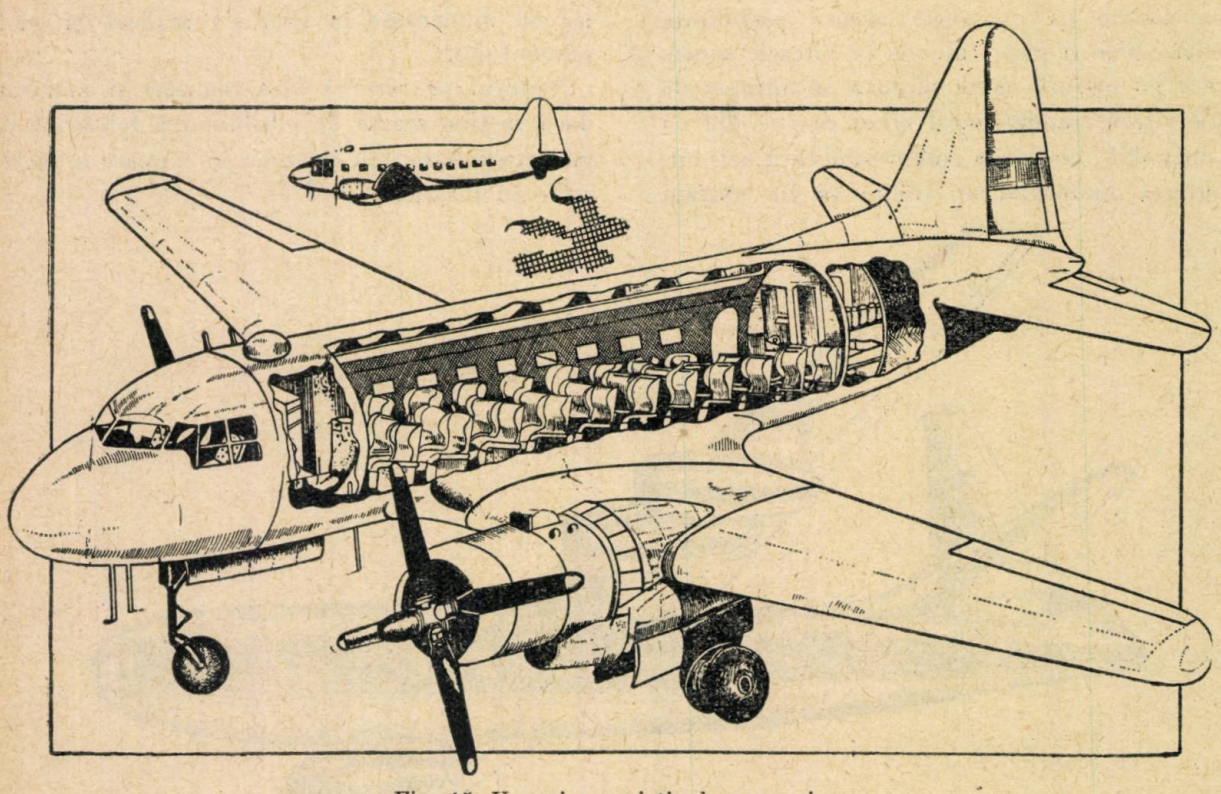


Fig. 15. Un avion sovietic de pasageri.

Aviaţia este larg folosită pentru cercetările geologice, pentru expediţii ştiinţifice şi în fine, pentru apărarea Patriei Sovietice şi nu pentru acţiuni agresive împotriva popoarelor paşnice, cum fac imperialiştii americani.

Bibliografie

A. G. Ordin. «Puternica aviaţie stalinistă» Editura Cartea Rusă 1951.

F. V. Bolotnicov. «Aerodinamica avionului» Moscova 1950. (în l. rusă).

T. B. Cojevnicova. «Ţara noastră, patria aviaţiei» (stenogramă) Editura Pravda–Moscova.

$i^i = x$

PROBLEME REZOLVATE

$x = e^{-\frac{\pi}{2}}$

Problema 263

Intr'un triunghiu oarecare ABC se duce înălţimea AD. Se notează cu H ortocentrul triunghiului, iar cu E mijlocul laturei AB. Să se demonstreze că:

$$\overline{HA} \times \overline{HD} = \overline{AE}^2 - \overline{HE}^2.$$

A. Hollinger

Soluţie. Centrul cercului circumscris triunghiului ADB este punctul E. Prelungind pe EH în ambele părţi până întâlneşte cercul în M şi N şi aplicând puterea punctului H faţă de cerc, avem:

$$\overline{AH} \times \overline{HD} = \overline{MH} \times \overline{HN} = (\overline{AE} + \overline{EH})(\overline{AE} - \overline{EH}) = \overline{AE}^2 - \overline{EH}^2.$$

Observare. Punctul H poate fi orice punct pe $\overline{AD}$, relaţia rămânând aceiaşi.

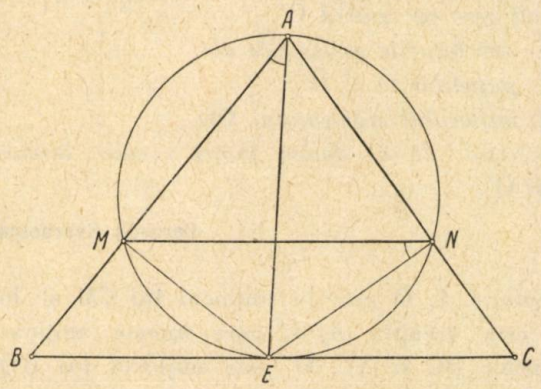
Problema 293

Fie D, E, F *mijloacele laturilor* AB, BC, CA *ale unui triunghiu oarecare* ABC, K *şi* L *picioarele perpendicularelor coborîte din* D *pe* BC *şi* AC; M *şi* N *picioarele perpendicularelor din* E *pe* AB *şi* AC, P *şi* Q *din* F *pe* AB *şi* BC. *Dacă notăm* $\overline{MN}$, $\overline{PQ}$, $\overline{KL}$ *respectiv cu* d_a, d_b, d_c, *iar cele trei înălţimi cu* h_a, h_b, h_c *şi cele trei mediane cu* m_a, m_b, m_c *să se arate că avem relaţia:*

$$a\ b\ c\ d_a\ d_b\ d_c = h_a\ h_b\ h_c\ m_a\ m_b\ m_c.$$

Istodor C. Valentin

Soluţie. Patrulaterul AMEN este inscriptibil fiindcă unghiurile din M şi N opuse sunt drepte.



In triunghiul MEN avem:

$$\frac{d_a}{\sin(B+C)} = \frac{ME}{\sin N}$$

Patrulaterul AMEN fiind inscriptibil avem $\sphericalangle MNE = \sphericalangle MAE$.

Din triunghiul dreptunghic MAE rezultă:

$$\sin N = \sin(MAE) = \frac{\overline{ME}}{m_a}$$

Inlocuind

$$d_a = m_a \sin A; \quad d_b = m_b \sin B; \quad d_c = m_c \sin C$$

şi

$$h_a = b \sin C; \quad h_b = c \sin A \text{ şi } h_c = a \sin B.$$

relaţia din enunţ este satisfăcută.

Problema 294

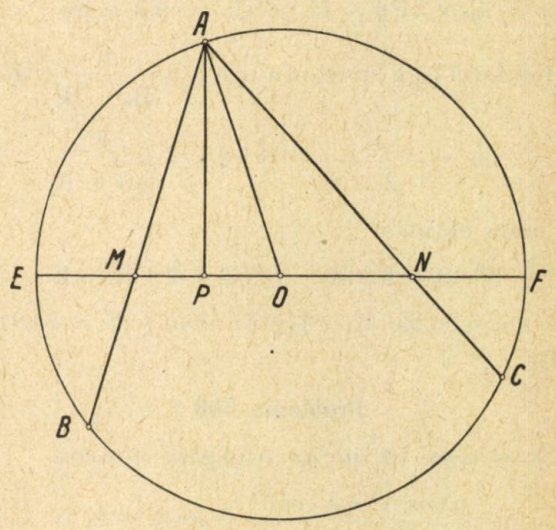
Unind un punct mobil A *luat pe o circumferinţă cu două puncte* M *şi* N *fixe egal depărtate de centru aşezate pe acelaşi diametru* EF *şi ducând coardele* AMB *şi* ANC, *să se arate că suma* $\frac{1}{MB^2} + \frac{1}{NC^2}$ *este constantă,*

L. Mănescu

Soluţie. Notăm $OM = ON = d$.

Avem relaţiile: $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = R^2 - d^2$ şi

$$\overline{NA} \cdot \overline{NC} = R^2 - d^2$$



Ţinând seama de aceste relaţii obţinem

$$\frac{1}{\overline{MB}^2} + \frac{1}{\overline{NC}^2} = \frac{\overline{MA}^2 + \overline{NA}^2}{(R^2 - d^2)^2} \qquad (1)$$

In triunghiurile OAM și OAN avem:

$$\overline{AM}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{AO}^2 - 2\,\overline{MO}\cdot\overline{OP}$$

$$\overline{AN}^2 = \overline{ON}^2 + \overline{AO}^2 + 2\,\overline{NO}\cdot\overline{OP}$$

Prin adunare obținem:

$$\overline{AM}^2 + \overline{AN}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{ON}^2 + 2\,\overline{AO}^2 = 2\,(R^2 + d^2) \qquad (2)$$

Prin urmare, relația (1) devine

$$\frac{1}{\overline{MB}^2} + \frac{1}{\overline{NC}^2} = \frac{2\,(R^2 + d^2)}{(R^2 - d^2)^2} = \text{constant.}$$

Problema 295

Se leagă cei doi poli ai unei pile electrice printr'un fir metalic de 60 m lungime. Curentul care trece prin fir are intensitatea de 0,9 Amperi. Dacă firul ar avea numai 15 metri lungime, intensitatea curentului ar fi 2,1 A. Să se calculeze rezistența interioară și forța electromotrice a pilei știind că rezistența firului metalic întrebuințat este de 31 de ori mai mare decât a cuprului; iar un fir de cupru de aceeași secțiune și de 100 m lungime are o rezistență de 2 ohmi.

N. Hangea

Soluție. Rezistența firului de cupru de 60 metri lungime este $x = \frac{4 \times 60}{100} = 1{,}2$ ohmi, iar pentru 15 metri lungime este $y = \frac{2 \times 15}{100} = 0{,}3$ ohmi.

Rezistențele firelor metalice întrebuințate sunt respectiv

$$x_1 = 31\,x = 31 \times 1{,}2 = 37{,}2 \text{ ohmi}$$

$$y_1 = 31\,y = 31 \times 0{,}3 = 9{,}3 \text{ ohmi}$$

Conform legii lui Ohm avem $I = \frac{E}{R_e + R_i}$, deci:

$$0{,}9 = \frac{E}{37{,}2 + R_i} \quad \text{și} \quad 2{,}1 = \frac{E}{9{,}3 + R_i}$$

de unde obținem:

$$33{,}48 + 0{,}9\,R_i = 19{,}53 + 2{,}1\,R_i = E$$

și avem soluțiile $R_i = 11{,}625$ ohmi și $E_i = 43{,}9425$ volți.

Problema 300

Să se arate că într'un triunghiu oarecare

$$\frac{a\cos A - b\cos B}{a\cos B - b\cos A} + \cos C = 0$$

$$\frac{a\sin A - b\sin B}{a\cos A - b\cos B} + \operatorname{tg} C = 0$$

C. Ionescu-Țiu

Soluție. Folosim relațiile $a = 2R\sin A$; $b = 2R\sin B$. Prima relație devine:

$$\frac{2R\sin A\cos A - 2R\sin B\cos B}{2R\sin A\cos B - 2R\sin B\cos A} + \cos C = 0.$$

Simplificând, cu R și ținând seama de relațiile: $\sin 2A = 2\sin A\cos A$ și $\sin(A-B) = \sin A\cos B - \sin B\cos A$, obținem

$$\frac{\sin 2A - \sin 2B}{2\sin(A-B)} + \cos C = 0, \text{ sau}$$

$$\frac{\sin(A-B)\cos(A+B)}{\sin(A-B)} + \cos C = \cos(A+B) + \cos C = 0,$$

deoarece $\cos(A+B) = -\cos C$.

Relația a doua devine succesiv:

$$\frac{2(\sin^2 A - \sin^2 B)}{\sin 2A - \sin 2B} + \operatorname{tg} C =$$

$$= \frac{(\sin A + \sin B)(\sin A - \sin B)}{\sin(A-B)\cos(A+B)} + \operatorname{tg} C =$$

$$= \frac{4\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}{\sin(A-B)\cos(A+B)} + \operatorname{tg} C =$$

$$= \frac{\sin(A+B)\sin(A-B)}{\sin(A-B)\cos(A+B)} + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg}(A+B) + \operatorname{tg} C = -\operatorname{tg} C + \operatorname{tg} C = 0.$$

Problema 304

Fie M *un punct variabil pe latura* AB *a unui triunghiu* ABC *și fie* AA', BB', CC' *și* H, *înălțimile și ortocentrul acestui triunghiu. Din* M *se coboară perpendicularele* MN *și* MP *respectiv pe* BC *și* AC. *Perpendiculara în* M *pe* AB, *taie pe* AC *în* Q.

Punctele M, N, C, P, C' se *găsesc pe un cerc cu centrul* O, *iar punctele* M, Q, B', B *se găsesc pe alt cerc cu centrul* O'.

Se cer locurile geometrice ale:

1. *punctelor* O *și* O',
2. *mijlocului segmentului* OO',
3. *celui de al doilea punct comun cercurilor* O *și* O'.

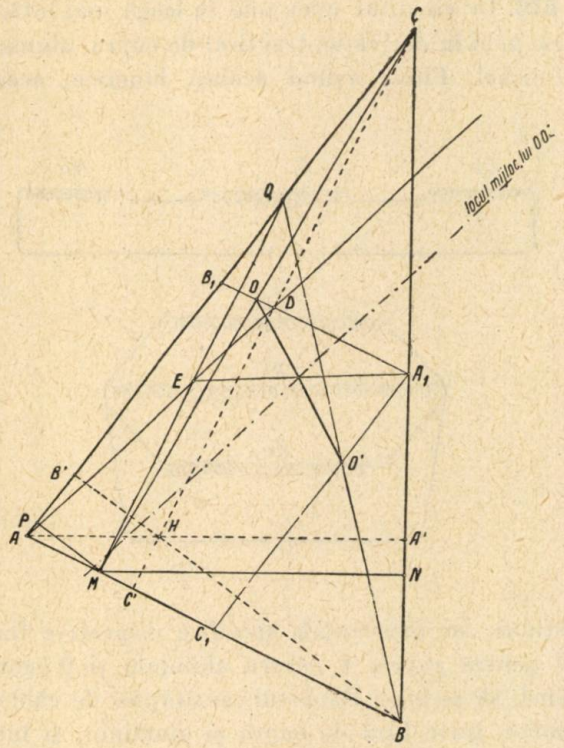
Corneliu Georgescu

Soluție. 1. O este în mijlocul lui CM și locul lui este dreapta A_1B_1 care unește mijloacele laturilor BC și AC. O' este mijlocul lui BQ și locul lui este dreapta A_1C_1 care unește mijloacele laturilor BC și AB.

2. Dreapta OO' unind mijloacele diagonalelor patrulaterului MBCQ, mijlocul ei este și mijlocul

segmentului A_1E, E fiind mijlocul lui MQ. Când M se mișcă pe AB, E se deplasează pe AD (D fiind mijlocul lui C'C), iar mijlocul lui A_1E descrie o paralelă la AD, trecând prin mijlocul lui A_1D.

3. Se știe că ortocentrul împarte o înălțime în două segmente al căror produs este același pentru toate cele trei înălțimi, adică $\overline{HC} \cdot \overline{HC'} = \overline{HB} \cdot \overline{HB'}$



deci puterea punctului H față de cercurile O și O' fiind aceiași, rezultă că H se află pe axul radical al acestor cercuri, adică pe dreapta MM' (M' fiind al doilea punct comun cercurilor O și O'); cu alte cuvinte, dreapta MM' trece printr'un punct fix, H. Cum $\overline{CM}$ este diametru în cercul O, CM' este perpendiculară pe MM' și deci locul lui M' este cercul cu diametrul CH.

Problema 316

Să se arate că:

$$\cos 11a + 3\cos 9a + 3\cos 7a + \cos 5a =$$

$$= 16\cos^3 a \cos\left(4a + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(4a - \frac{\pi}{4}\right).$$

Dan Gh. Ionescu

Soluție. Folosind relația

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2},$$

avem:

$$\cos 11a + \cos 5a = 2\cos 8a \cos 3a$$

și

$$3(\cos 9a + \cos 7a) = 6\cos 8a \cos a.$$

Prima parte a relației din enunț devine succesiv

$$2\cos 8a(\cos 3a + \cos a + 2\cos a) =$$

$$= 2\cos 8a(2\cos 2a \cos a + 2\cos a) =$$

$$= 4\cos a \cos 8a(\cos 2a + 1) = 8\cos^3 a \cos 8a.$$

Se observă că mai trebue arătată relația

$$\cos 8a = 2\cos\left(4a + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(4a - \frac{\pi}{4}\right),$$

care este justificată deoarece $\cos\frac{\pi}{2} = 0$,

și

$$\cos 8a = \cos 8a + \cos\frac{\pi}{2} =$$

$$= 2\cos\left(4a + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(4a - \frac{\pi}{4}\right).$$

Problema 317

Să se rezolve ecuația:

$$\frac{1 + 2\cos 2a}{\sin(x+a)\sin(x-a)} = 4.$$

Vuap Negimet

Soluție. Ecuația se mai poate scrie

$$\frac{1 + 2\cos 2a}{\cos 2a - \cos 2x} = 2,$$

sau

$$1 + 2\cos 2a = 2\cos 2a - 2\cos 2x$$

deci

$$\cos 2x = -\frac{1}{2}.$$

De unde rezultă

$$x = (2k+1)\frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{6}.$$

Exerciţii

Demonstraţi

$$\left(\frac{125}{64}\right)^{10} < 1000$$

EXERCIŢII ŞI PROBLEME PROPUSE

Probleme

A, B = puncte fixe;
Locul geometric M?

$$\frac{1}{AM} - \frac{1}{BM} = \text{const.}$$

511. Să se rezolve sistemul de ecuaţii

$$\begin{aligned} bz - cy + b'z' - c'y' &= d \\ cx - az + c'x' - a'z' &= e \\ ay - bx + a'y' - b'x' &= f \\ yz' - y'z &= l \\ zx' - xz' &= m \\ xy' - yx' &= n \end{aligned}$$

unde $a, b, c, a', b', c', d, e, f, l, m, n$ sunt constante date.

M. Ghermănescu

512. Un tren merge cu 72 km/oră. El se apropie fluerând şi apoi trece de un om care se află lângă şine. Ştiind că sirena locomotivei emite un sunet cu frecvenţa $\nu = 392$ Hz, se întreabă care este diferenţa între frecvenţele sunetelor percepute de observator când trenul se apropie şi când trenul se depărtează. (Se dă $V = 340$ m/s).

N. Stănescu

513. Un motociclist aleargă cu 90 km/oră după un automobil şi percepe clacsonarea acestuia ca un sunet de frecvenţă $\nu_1 = 481{,}1$ Hz. După ce depăşeşte automobilul îi aude clacsonarea ca un sunet de frecvenţă $\nu_2 = 391{,}5$ Hz. Cu ce iuţeală se mişcă automobilul şi ce sunet emite clacsonul său? (Se dă $V = 340$ m/s).

N. Stănescu

514. Să se stabilească identitatea:

$$\frac{\cos 3x}{\cos x} - \frac{\sin 3x}{\sin x} = \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x - 4 \operatorname{cosec}^2 2x,$$

şi să se arate că valoarea fiecărui membru al egalităţii este independentă de x.

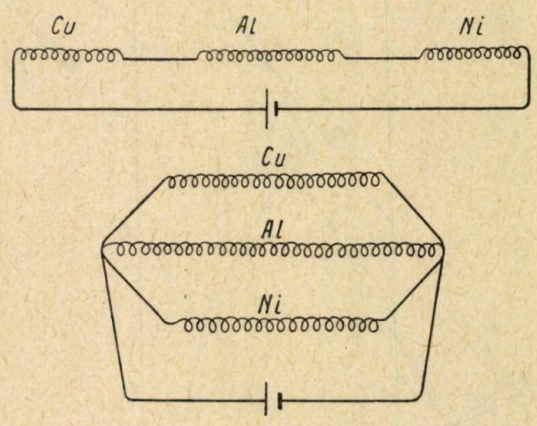
Petre Diaconescu
elev, Bucureşti

515. Intr un cilindru metalic se află un lichid la temperatura θ, până la înălţimea h. Coeficientul de dilatare al metalului din care este făcut cilindrul este α, iar al lichidului β.

Care va fi înălţimea lichidului în cilindru la temperatura t°.

Simon Şt. Petre

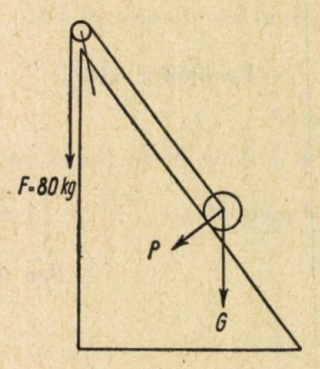
516. In circuitul unei pile se leagă mai întâi în serie apoi în derivaţie, trei fire: de cupru, aluminiu şi nichel. Firele având aceiaşi lungime, aceiaşi



secţiune, iar rezistenţele specifice respective fiind 1,7 pentru cupru, 4 pentru aluminiu şi 9 pentru nichel, să se afle: Raportul cantităţilor de căldură primite, între firul de cupru şi aluminiu, şi între cupru şi nichel, în ambele feluri de legături.

Virgil Atanasiu

517. Ştiind că trebue să tragem cu o forţă de 80 kg de capătul unei funii adusă pe după un scripete fix, montat la un plan înclinat, se cere



greutatea G a corpului atârnat de celălalt capăt al funiei şi apăsarea lui P pe plan, dacă lungimea planului este de 10 m, iar înălţimea lui de 8 m.

Virgil Atanasiu

Exerciţii

Demonstraţi

$$\left(\frac{125}{64}\right)^{10} < 1000$$

EXERCIŢII ŞI PROBLEME PROPUSE

Probleme

A, B = puncte fixe;
Locul geometric M?

$$\frac{1}{AM} - \frac{1}{BM} = \text{const.}$$

511. Să se rezolve sistemul de ecuaţii

$$\begin{aligned} bz - cy + b'z' - c'y' &= d \\ cx - az + c'x' - a'z' &= e \\ ay - bx + a'y' - b'x' &= f \\ yz' - y'z &= l \\ zx' - xz' &= m \\ xy' - yx' &= n \end{aligned}$$

unde $a, b, c, a', b', c', d, e, f, l, m, n$ sunt constante date.

M. Ghermănescu

512. Un tren merge cu 72 km/oră. El se apropie fluerând şi apoi trece de un om care se află lângă şine. Ştiind că sirena locomotivei emite un sunet cu frecvenţa $\nu = 392$ Hz, se întreabă care este diferenţa între frecvenţele sunetelor percepute de observator când trenul se apropie şi când trenul se depărtează. (Se dă $V = 340$ m/s).

N. Stănescu

513. Un motociclist aleargă cu 90 km/oră după un automobil şi percepe clacsonarea acestuia ca un sunet de frecvenţă $\nu_1 = 481{,}1$ Hz. După ce depăşeşte automobilul îi aude clacsonarea ca un sunet de frecvenţă $\nu_2 = 391{,}5$ Hz. Cu ce iuţeală se mişcă automobilul şi ce sunet emite clacsonul său? (Se dă $V = 340$ m/s).

N. Stănescu

514. Să se stabilească identitatea:

$$\frac{\cos 3x}{\cos x} - \frac{\sin 3x}{\sin x} = \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x - 4 \operatorname{cosec}^2 2x,$$

şi să se arate că valoarea fiecărui membru al egalităţii este independentă de x.

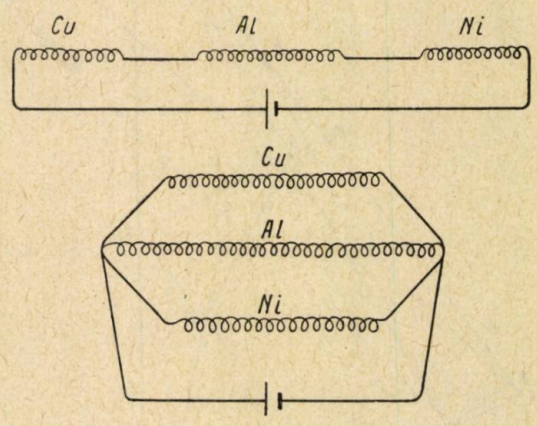
Petre Diaconescu
elev, Bucureşti

515. Intr un cilindru metalic se află un lichid la temperatura θ, până la înălţimea h. Coeficientul de dilatare al metalului din care este făcut cilindrul este α, iar al lichidului β.

Care va fi înălţimea lichidului în cilindru la temperatura t°.

Simon Şt. Petre

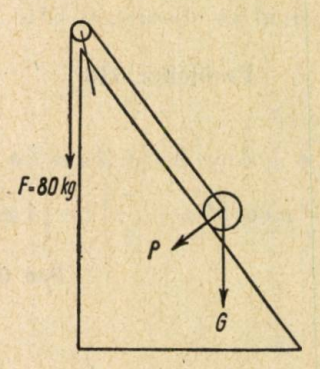
516. In circuitul unei pile se leagă mai întâi în serie apoi în derivaţie, trei fire: de cupru, aluminiu şi nichel. Firele având aceiaşi lungime, aceiaşi



secţiune, iar rezistenţele specifice respective fiind 1,7 pentru cupru, 4 pentru aluminiu şi 9 pentru nichel, să se afle: Raportul cantităţilor de căldură primite, între firul de cupru şi aluminiu, şi între cupru şi nichel, în ambele feluri de legături.

Virgil Atanasiu

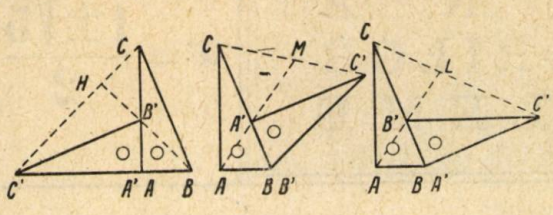
517. Ştiind că trebue să tragem cu o forţă de 80 kg de capătul unei funii adusă pe după un scripete fix, montat la un plan înclinat, se cere



greutatea G a corpului atârnat de celălalt capăt al funiei şi apăsarea lui P pe plan, dacă lungimea planului este de 10 m, iar înălţimea lui de 8 m.

Virgil Atanasiu

518. Două echere dreptunghice egale ABC și A'B'C' se așează în pozițiile următoare:



Să se demonstreze că:

a) HB' este înălțime în triunghiul CC'B'.

b) MA' este mediană în triunghiul CC'A'.

c) LB' este bisectoare în triunghiul B'C'C.

Gh. Bazacov

519. Se dă un cerc O de rază R înscris într'un unghiu.

Se construesc două cercuri O' și O'' tangente lui O și laturilor unghiului și două cercuri O_1 și O_2 tangente la cercurile O' și O respectiv O și O'' și la una din laturile unghiului.

Să se arate că avem relația

$$\sqrt{r} + \sqrt{r'} = \sqrt{R}$$

r și r' fiind razele cercurilor O_1 și O_2.

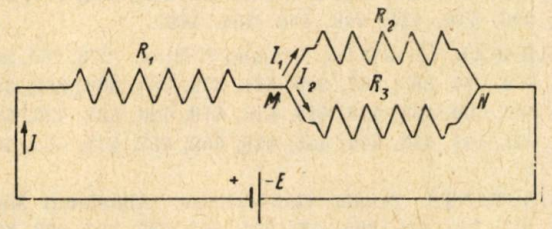
Dan Popescu
elev

520. Să se rezolve ecuația

$$x^4 + 4x^3 + x^2 - 6x + 2 = 0.$$

Klaus Fissgus
elev, Petroșani

521. Se constituie următorul circuit în care:



$E = 6v$, $R_1 = 2\Omega$, $R_2 + R_3 = 4\Omega$, $V_M - V_N = 2v$,

$R_i = 0{,}5\Omega$.

1. Se cere să se calculeze: I (intensitatea curentului principal), I_1 și I_2 (intensitățile curenților derivați) R_2 și R_3.

2. Să se arate ce condiție trebue să îndeplinească suma $R_2 + R_3$ pentru ca problema să fie posibilă.

Octav Florescu

522. Se dă un triunghiu echilateral ABC. Prin A se duce perpendiculara pe BC. Pe această dreaptă se ia un punct oarecare M care se unește cu cele 3 vârfuri A, B, C. Să se arate că:

$$MA \leqslant MB + MC.$$

N. Gaiu

523. Să se construiască numai cu rigla și compasul, expresia:

$$\sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{3 + \sqrt{\sqrt{\sqrt{5}}}}}$$

Paraschiv V. Titus
elev, București

524. Se consideră fracțiile:

$$f_1 = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - x - 2} \qquad f_2 = \frac{x^2 - x - 12}{x^2 - 3x - 4}$$

$$F_1 = \frac{x^2 - (1 + a^2)\,x + a^2}{x^4 - (1 + a^4)\,x^2 + a^4}$$

unde a este un număr real.

Se cere:

1. Să se afle fracția algebrică F_2, care să îndeplinească condiția:

$$\frac{f_1 - F_1}{f_2 - F_1} : \frac{f_1 - F_2}{f_2 - F_2} = -1.$$

2. Dacă $0 < a < 1$, să se demonstreze că

$$\frac{f_1 - F_2}{f_2 - F_2} < 0,$$

când x nu este cuprins în intervalul $(-3,2)$.

3. Facem notația: $E(a) = \dfrac{f_1 - F_1}{f_2 - F_1}$ și considerăm fracția algebrică:

$$F(x) = \frac{(x^2 + 3x - 1)\,E(0) + 2}{(x^2 + 3x - 1)\,E(0) - 2x^2 + 2x + 3}.$$

Dintre toate valorile pozitive ale fracției $F(x)$, să se afle valoarea cea mai mică.

[Explicație: $E(a)$ este o fracție, care conține cantitatea a; $E(0)$ înseamnă fracția obținută prin înlocuirea lui a cu 0 în fracția $E(a)$].

Gh. Dumitrescu

525. Intr'un vas înfundat cu un dop, la temperatura t', presiunea aerului este de 72 cm coloană de mercur. Incălzind vasul la temperatura t'', dopul sare, iar presiunea ajunge de 96 cm de mercur. Să se afle cele 2 temperaturi, suma lor fiind 140°.

N. Gaiu

$x = 1 + \frac{1}{x}$

PAGINA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

S'au evidențiat prin rezolvări de probleme din Revista Matematică și Fizică: Iosifescu V. Marius (clasa IX-a, Pitești), *Ciolac Ioan* (Timișoara), *Abdulamit Mutlu* (Constanța), *Muedin Sureia* (Constanța), *Ionescu Dragoș* (Craiova), *Gioncu Victor* (Arad), *Mihăilescu N. Ștefan* (clasa X-a L.b. 3, București), *Olteanu I. Mihail* (Caracal), *Mihăescu I. Alexandru* (Turnu-Severin), *Torjescu Florin* (clasa IX-a, Ploești), *Silișteanu Mihail* (clasa X-a, Orașul Stalin), *Dogaru T. Mihail* (clasa IX-a, Ploești), *Scurtu E. Florin* (Orașul Stalin), *Oprea A. Aureliu* (clasa VII-a, Târgoviște), *Mirea Nicolae* (Alexandria), *Grigorescu Ligia* (Pitești), *Didilescu Sergiu* (Vaslui), *Raicu Alexandru* (Turnu-Măgurele), *Coman Marcel* (Vaslui) și *Veștemeanu Dumitru* (Sibiu).

* * *

In cursul lunii Decembrie 1951 *am primit soluții bune la cel puțin* 5 *probleme dela următorii rezolvitori:*

ALEXANDRIA. Clasa XI-a Mirea Nicolae (123, 176, 200, 226, 229, 231, 242, 249, 255, 279, 287, 294, 305, 308, 310, 320, 323, 342, 343, 349, 354, 359, 364, 367, 386, 389, 404, 415, 416, 448, 457, 466).

ARAD. Clasa XI-a. Pigli Traian (290, 297, 298, 299, 300, 303, 306, 307, 310, 313, 314, 316, 317, 323), Gioncu P. Victor (226, 237, 249, 260, 268, 279, 301, 322, 324, 339, 345, 349, 360, 367, 382, 386, 388, 390, 391, 400, 404, 407, 414, 415, 419, 420, 429, 432, 436, 437, 440, 443, 444, 445, 448, 456, 457, 463, 465, 466, P). Weisz Ana (367, 317, 374, 447, 453, 454, 455, 450, 461). Scoala Pedagogică băieți. Anul IV. Stanca I. Teodor (242, 269, 279, 300, 307, 317, 324, 369, 392, 404, 432, 440, 456, 466).

BAIA MARE. Cadar Ioan (270, 306, 312, 324, 461, 466, 468, E: 138, P).

BISTRIȚA. Verveagă Th. (449, 450, 456. 463, 465, 466, 468).

BOTOȘANI. Clasa VI-a Filip Mariana (E: 51, 55, 70, 136, 139).

BUCECEA (Botoșani). Clasa VII-a. Ionescu Mihai (E: 47, 48, 50, 54, 55, 93, 98, 99, 109, 113).

BUCUREȘTI. *Liceul* 1 *fete*. Clasa VIII A. Filimon Rodica (279, 369, 448, E: 115, 116, 137, 138), Clasa XI A. Buzenchi Josette (375, 404, 406, 407, 418). *Liceul* 3 *băieți*. Clasa X B. Mihăilescu N. Ștefan (71, 75, 277, 295, 353, 356, 370, 374, 393, 399, 400, 401, 403, 404, 405, 408, 410, 418, 420, 422, 424, 426, 427, 428, 432, 434, 435, 438, 439, 440, 443, 444, 445, 454, 461, 466, 467, 468), Clasa XI D. Matei I. Nazarie (274, 316, 348, 351, 363, 364, 367, 368, 369, 386, 390, 392, 443, 444, 445). *Liceul* 4 *băieți*. Clasa X-a. Stoenescu Șerban (406, 407, 443, 459, 466), Clasa XI-a. Polinu Barbu (382, 386, 404, 406, 432, 456, 466), *Liceul* 6 *băieți*. Clasa X-a B. Oprea Constantin (323, 353, 354, 375, 386, 389, 404, 406, 407, 448, E: 69, 79, 83, 132, P). *Liceul* 7 *băieți* Clasa XI-a. Oprișescu Doru (446, 447, 454, 455, 456, 461, 462, 466). *Liceul* 10 *băieți*. Clasa IX-a. Popovici C. Ștefan (305, 322, 325, 369, 370, 374, 383, 386, 404). Clasa X-a. C. Mândru Anatolie (313, 329, 349, 383, 394, 415), Șincan Corneliu (E: 137, 138, 139, 140, 142, 147), Clasa XI-a: Barabancea M. (200, 270, 317, 374, 386, 388, 432, 466), Bucur M. Constantin (241, 358, E: 53, 95, 132), Popovici Dinu (316, 351, 353, 356, 370), Vasiliu Dumitru (200, 317, 386, 404, 432, 466). *Școala medie tehnică de Statistică*. Anul I. Huștiu Virginia (133, 135, 136, 137, 138). Anul II. Bondel Bianca (404, E: 131, 132, 133, 135). *Școala tehnică medie Metalurgică Nr.* 1 Anul IV Licurg Ion (432, 448, 449, 454, 456, 459, 466).

BUZĂU. Badea N. Alexandru (222, 264, 289, 307, 317, 322, 351, 368, 369, 374, P), Bârliba Eugenia (263, 366, 313, 348, 349, 358, 371), Clasa IX-a: Codreanu Irinel (200, 260, 264, 268, 273, 278, 280, 283, 299, 208, 323, 351, 353, 358, 368, 374, 400, 415, 438, 357, 468), Dihoru N. Valentin (325, 338, 351, 367, 369, 406, 434, 440, 448, 459, 466, 468) Negulescu Paul (279, 348, 375, 383, 386, 392, 437, 439), Tigănuș Gheorghe (367, 369, E: 99, 121, 130).

CĂLĂRAȘI. Clasa XI-a. Marinache Gh. (179, 176, 185, 227, 229, 386, 390, 398, 404, 416, 444).

CÂMPINA. Școala medie tehnică de Petrol Nr. 2. Florea C. Constantin (303, 321, 328, 383, 407, 439, 457, 466, 468). Școala tehnică de utilaj petrolifer. Anul IV. Ciocoiu I. Niculae (403, 404, 407, 422, 429, 433, 439, 466).

CÂMPULUNG (Muscel). Popescu Sanda (404, 406, 416, 443, 445).

CÂMPULUNG (Suceava). Clasa XI-a. Lateș Leonte (257, 266, 295, 300, 306, 308, 322, 323, 349, 354, 368, 371, 389, 390, 416, 426, 448, 456, 464, 466).

CARACAL. Clasa XI-a. Olteanu I. Mihai (276, 260, 301, 312, 368, 364, 365, 367, 369, 371, 379, 380, 386, 388, 389, 390, 392, 400, 404, 410, 414, 416, 419, 420, 429, 430, 433, 436, 437, 441, 443, 444, 445, 449, 456, 457, 458, 463, 466, 468, P).

CONSTANȚA. Școala Hidrotehnică. Abdulamit Mutu (236, 241, 243, 246, 266, 278, 291, 292, 295, 297, 298, 300, 313, 316, 317, 325, 331, 333, 335, 336, 343, 347, 348, 349, 354, 359, 364, 369, 371, 375, 386, 390, 398, 401, 403, 422, 426, 427, 429, 432, 434, 436, 438, 439, 441, 442, 454, 455, 456, 457, 460, 466, 468), Bondar Constantin (278, 295, 298, 306, 346, 350, 394, 401, 410, 427, 435, 436, 440, 441, 446, 447, 449, 454, 456, 460, 462), Constantinescu I. Nicolae (236, 243, 257, 266, 295, 335, 347, 353, 374, 401, 422, 426, 447, 466), Mușat Ruști (E: 70, 106, 109, 121, 132), Muedin Sureia (123, 182, 263, 271, 273, 285, 296, 299, 300, 303, 308, 310, 311, 312, 313, 315, 316, 339, 345, 348, 362, 364, 369, 371, 372, 375, 382, 386, 389, 403, 404, 407, 416, 426, 429, 432, 433, 436, 437, 438, 440, 441, 443, 445, 461, 466, 468, P), Petrovici Cornelia (E: 63, 109, 115, 119, 123, 325, 375, 404, 466, 468). Anul III. Miron Ilie (E: 115, 121, 122, 124, 125, 134, 137, 139, 398, 422, 439, 446, 449, 454, 455, 461, 464, 468), Tașcu Șatrapel (223, 270, 280, 367, 392, 401, 427, 429, 441, 443, 466, 468), Clasa 10 liceu.

Ionescu N. Nicolae (290, E: 70, 72, 109, 114, 115, 138), Clasa XI-a. Călinescu Paul (243, 278, 290, 307, 335, 367, 388).

CRAIOVA. Şcoala Medie Tehnică Metalurgică. Anul IV. Ionescu Dragoş (P. 310, 311, 315, 317, 321, 323, 324, 332, 333, 337, 341, 342, 348, 351, 363, 365, 367, 371, 372, 375, 377, 389, 390, 401, 404, 406, 408, 410, 415, 416, 427, 428, 429, 432, 438, 434, 435, 438, 439, 440, 441, 442, 443, 446, 457, 460, 462, 466, 468, P).

CURTEA DE ARGEŞ. Boncea Vasile (348, 364, 379, 401, 404, 422). Clasa X-a. Matei T. Gheorghe (263, 269, 278, 351, 378, 364, 369, 427, 441, 443, 448). Clasa XI-a Dragomir Eremia (351, 356, 369, 371, 456), Duţă Mihail (269, 270, 369, 371, 416, 454, 461, 466), Florea N. Puiu (263, 269, 270, 316, 317, 325, 342, 347, 401, 403, 422, 466) Rucă D. Stavăr (269, 270, 316, 317, 325, 367, 369, 416, 446, 458, 461, 468).

GALAŢI. Clasa VIII-a. Ivan Dumitru (E: 109, 113, 120, 121, 137), Micu Petre (E: 99, 109, 113, 120, 121, 132, 137), Clasa IX-a. Fişterman Dorel (375, 383, 386, 392, 404, 443, 445, 449), Petre I. Gheorghe (363, 375, 386, 404, 416, 443, 449), Ursu Mircea (363, 375, 404, 416, 443, 445), Clasa 11 A. Tihan Alexandru (244, 377, 379, 411, 413, 414, 420, 422, 432, 443, 444, 448).

IAŞI. Domb Betty (E: 51, 73, 91, 99, 116, 125). Şcoala Tehnică Metalurgică. Leib Sorel (368, 369, 392, 432, 439, 468), Şcoala Tehnică medie Textile. Turcuman Maria (289, 303, 307, E: 69, 87, 91, 121).

IBĂNEŞTI. REGHIN (Mureş). Clasa VI-a. Sasu I. Emil (E: 69, 91, 134, 136, 139).

LUGOJ. Clasa XI-a: Nahaiciuc T. Mihai (331, 377, 449, 454, 466, 474, 484, E: 68, 73, 79, 92, 139).

ORADEA. Clasa X-a. Boitoş Dumitru (123, 200, 202, 227, 233, 242, 245, 259, 263, 269, 270, 278, 280, 290, 294, 297, 298, 299, 307, 321, 323, 328, 349, 351, 353, 354, 389, 466), Crucereanu Laurenţiu (200, 202, 227, 229, 233, 236, 242, 243, 245, 246, 255, 259, 263, 266, 269, 270, 273, 277, 280), Pântea Alexandru (muncitor) (333, 456, 464, 465, 466, P), Petrovici Liviu (200, 202, 266, 271, 289, 310, 314, 382, 388, 456, 457, 466), Poenaru Dorin (200, 202, 241, 242, 246, 255, 259, 263, 266, 269, 270, 277, 295, 297, 298, 337, 348, 364, 394, 426, 427).

ORAVIŢA. Clasa XI-a. Cârdu Mircea (270, 336, 439, 461, 466, 468).

ORAŞUL STALIN. Clasa XI-a: Coandă Viorel (297, 298, 306, 426, 443, 459, 466), Scurtu E. Florin (245, 300, 301, 305, 320, 328, 337, 357, 377, 387, 388, 398, 399, 401, 403, 404, 415, 416, 423, 433, 439, 443, 449, 446, 448, 457, 459, 461, 466, 468, P), Stanciu Dorin (185, 237, 243, 257, 274, 277, 303, 320, 321, 324, 345, 346, 350, 367, 369, 377. 379, 416, 420, 422, 426, 432, 439, 443, 446, 454, 461, 468, P), Clasa XI-a B. Dudiţă I. Florea. (256, 257, 295, 297, 350, 426, 433, 445, 449, 457), Silişteanu Mihail (258, 303, 310, 329, 339, 346, 380, 382, 400, 410, 429, 432, 433, 437, 439, 440, 443, 444, 445, 448, 449, 456, 457, 458, 459, 461, 465, 466, 468, P).

PETROŞANI. Clasa VIII-a. Fissgus Klaus (363, 369, 374, E: 75, 79, 83, 87, 88, 91, 100, 116, 119, 121, 123, 124, 125, 135, 136, 138, 139).

PITEŞTI. Şcoala Medie Tehnică Metalurgică. Anul II. Anghelescu I. Florian (229, 242, 269, 276, 278, 290, 307), Andrei P. Anghel (242, 269, 276, 290, 307), Badea N. Ion (290, 242, 269, 276, 278, 290, 299), Bălăşan Gh. (242, 269, 276, 278, 299, 307, 386), Bărbulescu T. Alexandru (242, 249, 269, 278, 290, 299, 307, 432), Chiriţă Ion (242, 269, 276, 278, 290, 307), Dinescu I. Gheorghe (242, 269, 276, 299, 307), Ioniţă Gheorghe (242, 269, 276, 290, 307), Ivaşcu T. Alexandru (242, 245, 269, 276, 290, 299, 307), Pană Constantin (242, 269, 276, 290, 307), Stretenic I. Vasile (242, 269, 276, 290, 307), Şerb N. Constantin (242, 269, 290, 299, 307), Văidescu Nicolae (242, 269, 272, 276, 278, 299, 307). Liceul de băieţi. Clasa 9 A. Iosifescu V. Marius (59, 134, 178, 200, 216, 244, 257, 310, 353, 358, 359, 361, 363, 364, 365, 367, 368, 369, 370, 371, 372, 374, 375, 376, 377, 379, 380, 382, 383, 384, 386, 388, 389, 390, 392, 396, 398, 408, 410, 411, 413, 415, 416, 417, 422, P). Clasa X-a. Roceanu Rozalia (269, 307, 367, 369, 370, 374, 448), Clasa XI-a. Berianu I. Nicolae (290, 294, 297, 299, 300, 303, 305, 306, 307, 308, 317, 321, 325, 331, 336. 353, 354, 367, 369, 371, 374, 386, 389, 404, 406, 440, 444, 466), Constantinescu Iuliana (156, 176, 185, 242, 316, 325, 374), Florea Elena (185, 227, 242, 269, 290, 286, 387, P), Grigorescu Ligia (123, 176, 185, 200, 227, 229, 242, 249, 264, 269, 276, 290, 307, 313, 316, 317, 325, 353, 354, 368, 369, 371, 374, 386, 387, 389, 404, 416, 432, 448, 461), Mateescu I. Mihai (123, 229, 270, 307, 317, 323, 325, 367, 448, 466), Niculescu I. Constantin (242, 276, 278, 290, 299, 307), Păunescu I. Cornelia (156, 176, 185, 242, 264, 325, 454), Petrescu I. Dorel (269, 270, 271, 294, 298, 299, 300, 303, 313, 314, 316, 324, 426, 439, 443, 454, 461, 466, 468), Ştefănescu I. Elena (156, 176, 185, 242, 316, 325, 374), Ştefănescu V. Elena (185, 290, 269, 307, 317, 325, 353, 369, 370, 386, 392, 404, 406, 448), Trujanu Tamara (176, 227, 278, 369, 461, 464, 465).

PLOEŞTI. Clasa VII-a. Ţanovici C. Adrian (156, 307, E: 51, 70, 109, 137, 176), Clasa VIII-a. Bageac Alexandru (307, E: 107, 109, 114, 125, 137, 138), Dogaru Iulian (156, 307, 325, 367, 369, 379, 390, E: 20, 25, 41, 50, 54, 68, 70, 71, 74, 79, 80, 82, 83, 87, 88, 99, 100, 108, 109, 121, 126), Georgescu Gabriel (156, 176, 307, E: 109, 119), Horoiu Dan (176, E: 49, 68, 108, 130, 132), Herişan Ionel (156, 307, E: 49, 51, 59, 70, 109, 122, 137), Grosescu C. Florian (156, 176, 307, E: 109, 131, 138), Ionescu Crişan (156, 176, 307, E: 109, 137), Klepsch Gelbert (156, 176, 307, E: 70, 83, 109, 126), Marinescu C. Emil (156, 176, 307, E: 70, 83), Nicolăescu F. Gheorghe (156, 176, 307, E: 109, 113, 114, 122, 137), Odobescu Alexandru (156, 176, 307, E: 91, 109, 125), Popescu C. Gheorghe (156, 176, 307, E: 109, 115), Rădulescu G. Const. (176, 307, E: 81, 87, 109, 113, 122, 137), Schip Harry (156, E: 68, 69, 70, 137), Stanciu Toma (156, 176, 307, E: 109, 122). Clasa IX-a: Căpraru D. Gheorghe (176, 227, 241, 242, 307), Căpraru V. Vasile (155, 156, 369, 468, E: 119), Chiriţă Gheorghe (176, 227, 241, 242, 307), Cioltei I. Adrian (156, 176, E: 119, 125, 137), Dăscălescu Gheorghe (222, 229, 278, 306, 353, 366, 369, 388, 389, 466), Dogaru T. Mihai (165, 208, 235, 263, 266, 270, 272, 292, 296, 300, 306, 345, 349, 358, 371, 372, 386, 390, 403, 404, 407, 413, 416, 439, 444, 454, 458, 468), Falk Eugen (229, 324, 325, 335, 369, 455, 468), Ghiga Dan (137, 156, 176, 457, 468), Ionescu Virgil (260, 294, 358, 383, 390, 439, 446, 484, 485), Grigore A. Emil (156, 176, 307, E: 49, 59), Jiloveanu Gh. Mircea (176, 242, 367, 390, 466), Mangu I. Ştefan (155, 324, 325, 369, 375, 455, 468), Mihai T. Iulian (229, 244, 263, 266, 290, 307, 367, 369, 368, 386, 443, E: 25, 53, 69, 70, 87, 88, 90, 91, 99, 109, 114). Negulescu I. Mihai (324, 325, 455, 468, 469), Popescu Şt. Dan (229, 324, 325, 329, 335, 401, 403, 404,

455, 458, 459, 460, 468), Popescu Constantin (296, 379, 413, 416, 468), Puşcaşu A. Alexandru (227, 306, 386, 404, 416, 449), Torjescu Florin (235, 242, 245, 269, 270, 278, 279, 289, 290, 297, 299, 307, 317, 325, 353, 354, 358, 364, 369, 371, 375, 386, 389, 390, 404, 432, 439, 444, 456, 466, 468), Mihalcea S. Constantin (156, 229, 241, 269, 351, 369, 371, 386, 388, 404, 432).

PREDEAL Clasa IX-a. Budin I. Constantin (375, 379, 386, 390, 463, E: 110, 113), Pricâ Gh. Constantin (375, 377, 379, 390, 449. 459, E: 93, 107, 109, 110, 113, 114), Pricâ M. Constantin (375, 379, 390, 392, E: 110, 113), Pugăzan V. Nicolae (375, 376, 379, 390, E: 110, 113), Racoţi Eugen (375, 379, 390, 392, E: 113), Uţă Marin (375, 377, 379, 386, 390, 392, 408, 449, 463, E: 110, 113),

RĂDĂUŢI. Clasa IX-a. Lazăr D. (404, 416, E: 51, 69. 70, 72, 95, 99, 109), Clasa X-a. Buliga T. Teodor (375, 377, 386, 389, 410, 413, 415, 441).

RÂMNICUL-VÂLCEA. Bădulescu Nicoleta (279, 422, 427, E: 110, 113).

ROMAN. Clasa X-a. Vulpe Ioan (242, 249, 263, 315, 333, 348, 363, 364, 371, 374, 401, 416, 443, 465, 466).

SIBIU. Clasa XI-a. Veştemeanu Dumitru (123, 242, 251, 259, 260, 263, 273, 278 297, 298, 306, 307, 308, 316, 351, 353, 358, 368, 367, 369, 371, 374, 375, 388, 401, 416, 429 432, 443, 445, 466).

SLATINA. Cochinţoiu Şt. Ioan (313, 314, 316, 324, 339, 358, 386, 388, 426, 432, 466, P), Drăghici D. Ilie (369, 386, 391, 392, 432, 480, 484, P), Voiculescu Paul (245, 249, 257, 263, 270, 276, 278, 300, 305, 348, 363, 378, 448, 449, 456, 461, 464, 466, P).

TÂRGOVIŞTE. Clasa VII-a. Oprea A. Aureliu (290, 369, E: 67, 70, 73, 76, 79, 83, 87, 88, 91, 95, 97, 99, 100, 104, 105, 106, 107, 109, 114, 115, 116, 119, 124, 125), Clasa X-a. Andreescu Constantin (364, 367, 375, 418, 426, 427, 443, 445, 450, 460, 461, 464, 466), Andrei I. Vasile (218, 276, 289, 299, 340, 352, 371, 374), Bălescu Gr. Eftimie (260, 261, 263, 264, 268, 448), Oprea A. Nicolae (229, 279, 293, 295, 298, 321, 331, 336, 383, 404, 405, 413, 419, 420, 426, 429, 432, 437, 441, 443, 445), Sofia Gheorghe (259, 260, 287, 294, 298, 308, 323, 343, 352, 354, 357, 375, 376, 379, 389, 429, 441, 443, 445, 458, 460).

TÂRGUL-JIU. Clasa VIII-a. Clonda Ovidiu (E: 47, 51, 58, 60, 62, 70, 91), Clasa XI-a. Bănică P. Emil (290, 297, 298, 307, 351, 354, 367, 369, 386, 443, 448), Dicuescu M. Sabin (290, 307, 317, 325, 367, 369, 386), Moraru I. Mihai (290, 307, 317, 325, 363, 367), Popescu I. Valeriu (290, 307, 325, 358, 367, 369, 390, E: 70), Stoicoiu C. Emil (271, 290, 298, 307, 316, 317, 323, 325, 354, 358, 367, 369, 371, 375, 386, 432, 443, 448).

TECUCI. Clasa XI-a. Corciovă Ionel (375, 377, 379, 386, 428, 432, 439, 43r4, 443, 444).

TIMIŞOARA. Clasa XI-a. Ciolac Ioan (312, 317, 321, 322, 323, 326, 328, 329, 340, 343, 348, 354, 358, 359, 360, 363, 369, 371, 374, 375, 377, 379, 380, 382, 383, 386, 388, 389, 392, 400, 404, 410, 412, 413, 414, 415, 416, 419, 420). Ivanov L. Deian (335, 351, 353, 369, 374), Popov Isa (351, 392, 406, 416, 466).

TULCEA. Beluri Constantin (279, 350, 386, 401, 416, 426, 427, 461), Toma Temistocle (159, 176, 218, 227, 242, 243, 257, 331, 333, 335, 337, 346, 347, 350, 386, 394, 426, 444, 460).

TURDA. Clasa XI-a Şabău V. Mircea (227, 235, 241, 247, 394, 426, 427).

TURNU-MĂGURELE. Clasa XI-a: Mihăescu I. Alexandru (218, 234, 298, 303, 314, 322, 333, 336, 342, 347, 364, 367, 369, 371, 372, 375, 379, 386, 388, 390, 392, 401, 404, 406, 416, 422, 427, 429, 432, 433, 437, 443, 445, 456, 461, 463, 466), Raicu M. Alexandru (195, 200, 243, 255, 257, 259, 281, 290, 299, 309, 335, 336, 346, 347, 351, 364, 367, 369, 372, 386, 388, 401, 427, 431, 439, 443, 455, 466, 468), Vişănescu M. Alexandru (364, 367, 386, 388, 429, 432, 443).

TURNU-SEVERIN. Clasa X-a. Vâţă Florea (416, 429, 432, 449, 463, 468), Racoveanu C. Constantin (364, 367, 406, 416, 457, 464, 466, 468, P), Clasa XI-a. Axinescu Benedict (449, 458, 459, 463, 466, 468), Ionăşcuţ N. Arion (376, 377, 379, 406, 426, 429, 457, P).

VASLUI. Ardeleanu Eduard (227, 229, 257, 263, 290, 297, 308), Clasa XI-a. Adrian Vasilache (227, 229, 242, 264, 274, 290, 297, 306, 307, 317, 351, 386, 388, 406), Coman Marcel (227, 257, 263, 269, 336, 348, 354, 358, 363, 368, 374, 375, 377, 379, 382, 386, 388, 389, 392, 404, 406, 415, 416, 432, 443, 445, 461, 466, E: 41, 62, 70, 95, 96, 107, 109, 119, 122, 137, P), Didilescu Sergiu (237, 257, 263, 269, 308, 336, 348, 358, 359, 363, 375, 377, 379, 386, 389, 404, 406, 415, 416, 432, 443, 445, 448, 461, 479, 484, E: 14, 41, 70, 95, 107, 109, 119, 120, 115, 121, 137, P), Eisenfeld Jak (166, 178, 185, 206, 227, 289, 461), Popescu C. Ion (E: 52, 62, 95, 109, 138).

REDACTAREA PROBLEMELOR. Pe aceiaşi foaie de formatul caetului obişnuit, se va rezolva câte o singură problemă. Soluţia să fie însoţită de numărul şi enunţul problemei. Se poate scrie în continuare şi pe contrapagină; iar dacă soluţia necesită figură, se va desena cu îngrijire şi se va anexa. Nu se vor trimite soluţiile mai multor probleme pe aceiaşi foaie.

Rezolvitorul va scrie, pe fiecare soluţie, numele, şcoala, clasa şi localitatea.

Soluţiile trimise să nu fie copiate unele după altele.

Se mai primesc soluţii şi la problemele propuse în anul 1951 şi nerezolvate încă în paginile revistei (vezi tabla de materii IV 6 din Nr. 12, anul II).

Problemele ce se propun de către colaboratorii revistei să fie clar compuse şi însoţite de soluţii, să fie personale, şi nu luate din cărţi sau reviste.

REVISTA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

ORGAN AL SOCIETĂŢII DE ŞTIINŢE MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R.

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

APARE SUB ÎNGRIJIREA UNUI SECRETARIAT DE REDACŢIE

REDACŢIA: B-DUL 6 MARTIE, 63 — BUCUREŞTI

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică şi fizică a şcolilor, precum şi orice material informativ care ar interesa redacţia noastră se vor trimite pe adresa de mai sus

ABONAMENTE:

Tarif general ... ... Lei 60

Tarif redus pentru elevi, studenţi şi profesori ... ... Lei 10

Abonamentele se fac numai prin:

Centrul de Difuzare a Presei

Pentru Bucureşti: Str. Const. Mille Nr. 14 — Telef. 5.28.90

Pentru Provincie: Centrul de Difuzare a Presei din Capitalele Regiunilor sau Raioanelor — Banca de Stat în Contul C.D.P. Nr. 038.068

A APĂRUT IN

EDITURA TEHNICA

al treilea volum

LEXICONUL TEHNIC ROMÂN

Volumul al III-lea din Lexiconul Tehnic Român cuprinde o serie de noțiuni (dela literele I-M) a căror cunoaștere e de primă importanță în tehnică, și care au cerut o mare desvoltare, cum sunt: Incercare, Inducție, Infășurare electrică, Instrument, Isomerie, Laminor, Locomotivă, Măsuri, Mecanism, Motor și bineînțeles, termenul Mașină, care e desvoltat în 182 pagini.

Volumul acesta cuprinde în cele 1115 pagini 7800 termeni și 2500 figuri.

Prin acest al treilea volum, Lexiconul Tehnic a dovedit că este o lucrare de mare valoare, care va fi de un important ajutor tuturor tehnicienilor noștri, ori care ar fi pregătirea lor.

Taxa poștală plătită în numerar conform aprobării Nr. 168.026 946.

C. 74 — Centrul Poligrafic Nr. 2. Filiala 8.

Lei 1.—

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE ȘI FIZICE DIN R.P.R.

729
E1126
KAT
Str. Gabriel Peri

REVISTA MATEMATICĂ și FIZICĂ

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

★ ★ ★

RESTITUIT
ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR

Trăiască săptămâna mondială a tineretului democrat, prilej de trecere în revistă a forțelor de luptă ale tineretului progresist din lumea întreagă

★

MARTIE

1952 3

EDITURA TEHNICĂ

REVISTA
MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

SUMARUL:

		Pag.
1.	*Concurs pentru elevii şcolilor medii din ţara noastră.*	49
2.	*Extinderea cadrului teoremelor de geometrie de Prof. N. N. Mihăileanu*	51
3.	*Interferenţa luminii de Conf. Univ. Dr. C. Rabega.*	57
4	*Chestiuni de examen*	64
5.	*Probleme rezolvate (257, 259, 276, 306, 308, 309)*	65
6.	*Exerciţii şi probleme propuse*	67
7.	*Exerciţii şi probleme propuse pentru învăţământul elementar*	69
8.	*Pagina rezolvitorilor de probleme*	70

3

ANUL III MARTIE 1952

ORSZÁGOS MUZEUM KÖNYVTÁR

REVISTA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

PUBLICAŢIE PENTRU TINERET A SOCIETĂŢII DE MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ DIN R. P. R.

Anul III, Nr. 3 Martie 1952

5108

BUCUREŞTI
Str. Gabriel Peri, 3 - Raion Stalin

CONCURS PENTRU ELEVII ŞCOLILOR MEDII DIN ŢARA NOASTRĂ

Aducem cetitorilor noştri o ştire care va însemna o deosebită bucurie pentru toţi acei care se interesează de învăţământul din ţara noastră, pentru profesorii, elevii şi elevele din şcolile medii, licee, şcoli pedagogice, şcoli medii tehnice şi şcoli speciale de doi ani. In cursul lunilor Aprilie şi Mai se va desfăşura Concursul pentru elevii şcolilor medii.

In scopul adâncirii cunoştinţelor elevilor la materiile de bază, Ministerul Invăţământului Public în colaborare cu Comitetul Invăţământului Superior şi U.T.M. şi cu sprijinul A.R.L.U.S., U.S.I. şi Societatea de Stiinţe Matematice şi Fizice au lărgit concursul de anul trecut.

Concursul din acest an şcolar se va da la Limba Română, Limbile materne, Limba Rusă, Matematică şi Fizică.

Desfăşurându-se ca şi în anul trecut pe mai multe etape, unde probele vor fi din ce în ce mai grele, concursul va da elevilor prilejul să se afirme, potrivit gradului lor de pregătire şi va constitui o uriaşă întrecere între elevii şcolilor medii din ţara noastră.

Probele pentru concurs vor fi adaptate fiecărui tip de şcoală, astfel încât elevii care şi-au însuşit bine materia din programa şcolii vor putea face faţă cu succes.

Lucrările cele mai bune vor fi premiate şi publicate în revistele de tineret şi în Revista de Matematică şi Fizică.

Faptul că matematica este unul dintre obiectele la care se dă concurs are o semnificaţie deosebită. Partidul şi Guvernul consideră că matematicii îi revine un rol covârşitor în formarea tineretului. Pe de o parte, acest obiect contribue în mare măsură la formarea gândirii dialectice, pe de altă parte înzestrează tineretul cu cunoştinţele indispensabile pentru a deveni un bun tehnician, un bun inginer, şi prin aceasta un factor activ pentru desvoltarea ţării noastre pe drumul socialismului. Elevii noştri au dovedit prin numărul şi avântul cu care au participat la concursul de anul trecut că au înţeles importanţa acestui obiect. Suntem siguri, că anul acesta concursul va stârni un interes şi un entuziasm sporit. Dar aceasta nu este suficient. Candidaţii trebue să se pregătească temeinic şi din vreme.

Nu poate reuşi la concurs, mai ales la etapele superioare, cine se mărgineşte să facă numai temele care se fac şi se dau în clasă, oricât de conştiincios le-ar face.

Un tânăr cu adevărat pasionat pentru matematică şi fizică trebue să folosească cele mai felurite mijloace de a se perfecţiona. El trebue să studieze din manual sau din alte cărţi chestiunile care se tratează mai sumar în clasă, să-şi lărgească orizontul prin studiu individual, să aplice cunoştinţele pe care le are la rezolvarea celor mai variate probleme, pentru a-şi desăvârşi măestria în mânuirea lor.

Revista Matematică şi Fizică se străduieşte să vină în ajutorul elevilor prin articolele pe care le publică şi prin problemele pe care le propune. Numărul mare al abonaţilor noştri şi numărul mereu în creştere al celor care ne trimit soluţii la probleme, este pentru noi un fapt extrem de încurajator. Indrumat de Partid, tineretul din R.P.R. păşeşte din ce în ce mai mult pe calea însuşirii temeinice a ştiinţei. El ne va da mâine cadrele de care va fi nevoie pentru construirea socialismului.

Pentru adâncirea studiului diferitelor obiecte, elevii pot întrebuinţa formele variate pe care ni le arată experienţa şcolii sovietice. Astfel, elevii care au predilecţie pentru matematică, găsesc în cercurile de matematică o formă de activitate deosebit de utilă pentru adâncirea cunoştinţelor.

Sub conducerea unui profesor şi cu sprijinul organizaţiei locale U.T.M. se pot crea în aceste cercuri condiţii prielnice desvoltării muncii creatoare a elevilor. Un cerc de matematică bine organizat şi bine condus ridică nivelul de cunoştinţe al elevilor, poate creşte elemente dintre care se vor recruta mai târziu specialişti destoinici.

In cercul de matematică să fie abordate chestiuni mai interesante, mai ample și mai variate, care să scoată în evidență legături noi. Aceasta face ca elevii să participe intens și activ și să se simtă crescuți după fiecare ședință a cercului.

Concursul trebue să fie un prilej de a activa cercurile de matematică, de a le determina să-și intensifice munca în suprafață și în adâncime: să crească numărul elevilor care participă la cerc, să se țină ședințele mai des, să se lucreze mai cu spor. Concursul este un prilej de a se face bilanțul acestei munci, bilanț care, dacă este pozitiv, dă satisfacție în egală măsură profesorilor și elevilor.

Desigur că munca în cercurile de matematică vine să completeze cunoștințele, obținute cu prețul unei munci sistematice, dusă zi de zi. Bucuria de a fi reușit la concurs va fi deplină, ca o frumoasă completare a bucuriei de a munci.

Intre munca dusă în cadrul cercului de matematică și munca individuală, există o formă intermediară deosebit de rodnică; munca în colective reduse de doi-trei elevi. Un elev cunoaște o problemă frumoasă și o propune unui coleg sub formă de provocare; acesta la rândul lui răspunde la provocarea lui, propunându-i o altă problemă. Incă în aceeași zi, în recreația următoare, pe drum dela școală spre casă sau în timpul mesei la internat, fiecare dintre ei pot propune probleme câte unui coleg ș.a.m.d. Se creează astfel o frământare care stimulează o muncă vie, plină de interes.

Tot în colective reduse, dar mai organizat, se poate lucra la rezolvarea sistematică a unor probleme din culegerea de probleme sau din orice altă publicație. A apărut un număr nou din Revista Matematică și Fizică, doi sau mai mulți elevi se strâng la unul din ei acasă sau într'o sală a internatului și lucrează împreună la rezolvarea lor: unul scrie pe tablă și ceilalți îl urmăresc și intervin unde este cazul.

Cercurile de Fizică, prin specificul obiectului, pot întrebuința forme și mai variate pentru lărgirea și adâncirea cunoștințelor. Se pot face la cerc experiențe de laborator deosebite, elevii pot lua cunoștiință de unele creații noi, sau aplicații ale fizicii în tehnică, domeniu în care știința sovietică ne oferă un material bogat și variat. Există un număr mare de broșuri de popularizare ale unor autori sovietici publicate în traducere românească de editura «Cartea Rusă» care pot folosi ca material pentru referate, pe care elevii să le țină la cercul de fizică. Cercul de fizică, sub conducerea unui profesor priceput, își poate desfășura activitatea sub cele mai variate forme. Ca și pentru cercurile de Matematică concursul trebue să fie și pentru cercurile de Fizică un stimulent pentru activizarea lor, un prilej pentru a-și face bilanțul activității.

Concursul de anul acesta este al treilea care se ține în țara noastră dela Reforma Invățământului încoace. Acum doi ani, Societatea de Științe Matematice și Fizice a organizat câteva concursuri locale de Matematică și Fizică. Anul trecut, inițiativa Societății de Științe Matematice și Fizice a fost preluată de U.T.M. și M.I.P. și lărgită prin includerea Limbii Române. S'a organizat astfel pentru prima dată un concurs pe țară la care au participat zeci de mii de elevi din toate colțurile țării, iar dintre ei, un număr de aproape patru sute au ajuns până la etapa pe țară. Anul acesta, datorită unei mai bune organizări și datorită faptului că se ține concurs și la limbile materne și la limba rusă, concursul are o amploare deosebită.

Elevii școlilor medii din țara noastră își pot astfel încerca forțele putând alege între toate aceste obiecte, după preferință și după temeinică pregătire a lor.

Pentru această pregătire temeinică, partidul și guvernul țării noastre le-au oferit condiții de învățătură pe care generațiile din trecut din țara noastră nu le-au avut și pe care tinerii din țările capitaliste nu le au nici acum.

Deaceia, toți cei care au muncit cu râvnă vor putea face față exigențelor concursului.

Revista de Matematică și Fizică îndeamnă tineretul nostru școlar să participe cu elan la această întrecere. Așteptarea fiecărei etape să constituie o nouă strădanie de intensificare și adâncire a muncii școlare, care îi va duce la succes în cadrul concursului, și care, mai târziu, îi va duce la bucuria participării conștiente la întărirea Patriei noastre scumpe, la întărirea luptei noastre pentru pace, pentru socialism.

EXTINDEREA CADRULUI TEOREMELOR DE GEOMETRIE

Prof. ***N. N. Mihăileanu***
Institutul Pedagogic Timișoara

1°. Enunțul unei teoreme de geometrie conține un număr de date și un număr de consecințe. Demonstrația pentru fiecare consecință se face ținându-se seama de datele strict necesare din ipoteză. Dar cu aceasta nu se explică tot rostul datelor din ipoteză și ele dau de multe ori impresia greșită că o anumită consecință are loc numai în condițiunile datelor teoremei, nu și în condiții mai generale, iar uneori împiedică să se vadă extinderea ce o poate avea teorema.

De exemplu teorema lui *Pitagora: patratul ipotenuzei este egal cu suma patratelor catetelor* poate fi demonstrată și geometric și algebric în foarte multe feluri. Dar toate sunt justificări strâmte, care lasă impresia că enunțul ilustrează proprietăți limitate numai la triunghiul dreptunghic și la patrat. Patratele vor fi văzute în mod just, când vom recunoaște că teorema este valabilă pentru poligoane asemenea construite pe laturi: *aria unui poligon construit pe ipotenuză, ca latură, este egal cu suma ariilor poligoanelor asemenea și asemenea așezate pe catete.* Vom aprecia în mod just rolul triunghiului dreptunghic, când vom prezenta teorema ca o particularitate a relației.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

dintre laturile a, b, c, ale unui triunghi și unghiul A, opus laturii a.

Pe măsură ce se ridică nivelul înțelegerii lui, elevul se descătușează de prejudecățile copilăriei.

2°. Vom face o aplicație critică mai amănunțită, asupra unei teoreme cunoscute de elevi, din culegerea lor de probleme, pentru a cerceta cazurile cele mai largi în care ea are loc și înrudirea ei cu alte teoreme clasice.

Să ne oprim asupra figurii de care este legat numele lui *Torricelli.*

Dacă pe laturile unui triunghiu ABC construim exterior, triunghiurile echilaterale BCI, CAJ, ABK atunci:

a) *Cercurile circumscrise celor trei noi triunghiuri trec printr'un același punct, M.*

b) *Laturile triunghiului dat sunt văzute din M, sub unghiuri egale.*

c) *Centrele U, V, W, ale triunghiurilor echilaterale de pe laturi formează un triunghiu echilateral.*

d) *Dreptele AI, BJ, CK trec prin M.*

e) *Segmentele AI, BJ, CK sunt egale.*

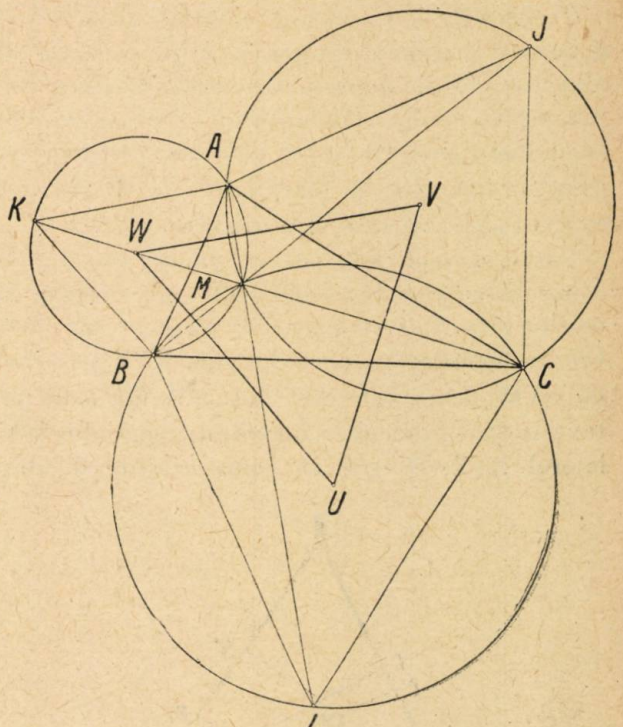


Fig. 1.

3°. Pentru a susține legătura cu desvoltările următoare, vom justifica aceste proprietăți pe figura 1.

a) Fie M al doilea punct de intersecție al cercurilor ABK, ACJ. Observăm pe figură că:

$$\sphericalangle AMB = 180° - \sphericalangle AKB = 120°, \sphericalangle AMC = 180° - \sphericalangle AJC = 120°$$

și cum toate unghiurile din jurul lui M formează 360°, rezultă că și unghiul BMC are 120°, adică este suplimentar cu BIC. Cercul BIC trece astfel, tot prin M.

b) Rezultă din soluția anterioară că toate unghiurile BMC, CMA, AMB sunt egale (cu 120°). Spunem că M este un *centru isogon.*

c) Dreapta VW, care unește centrele cercurilor ACJ, ABK este perpendiculară pe coarda lor comună AM. Laturile triunghiului UVW, perpendiculare pe dreptele MA, MB, MC care fac unghiuri egale, formează ele însile unghiuri egale.

d) Observăm că

$$\sphericalangle BMI = \sphericalangle BCI = 60°$$

deci unghiurile AMB, BMI sunt suplimentare, adică AI trece prin M și analog, celelalte două drepte BJ, CK trec prin M.

e) Triunghiurile CAK, BAJ au unghiurile din A egale cu 60°+A (notând simplu A, B, C unghiurile triunghiului dat) și laturile care le compun, egale: AJ=AC, AK=AB. Triunghiurile considerate sunt egale. Deci și BJ=CK și analog, AI are aceeași lungime cu ele.

4°. Numele ce se dă unei teoreme nu este totdeauna o consacrare a proprietății. In cazul de față, rolul lui *E. Torricelli* este acela de a fi transmis problema determinării punctului pentru care suma distanțelor la trei puncte date este minimă, dela *Fermat*, care a formulat-o, la *V. Viviani* care a rezolvat-o (Florența, 1658).

Putem dovedi că în adevăr, pentru punctul M, suma distanțelor MA+MB+MC este minimă. Să ducem prin A, B, C perpendiculare pe AM, BM, CM. Se formează un nou triunghiu XYZ asemenea cu UVW, deci echilateral. MA, MB, MC sunt distanțele punctului M la laturile triunghiului echilateral XYZ. Se știe că suma acestor distanțe

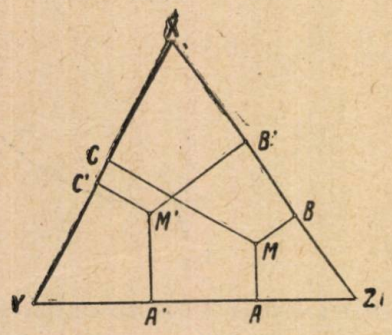


Fig. 2.

este aceeași, oricare ar fi M. Fie atunci M' un al doilea punct (fig. 2) și A', B', C' proiecțiile lui de pe laturile triunghiului XYZ. Avem:

$$M'A + M'B + M'C > M'A' + M'B' + M'C' = MA + MB + MC.$$

Deci M realizează minimul.

5°. Demonstrația dată proprietăților a), b), c), d), e) au fost sprijinite pe figura 1. Caracteristica acestei figuri este aceea că M este în interiorul triunghiului. Să căutăm condiția ca această proprietate să aibă loc. A spune că M este interior unghiurilor BAC; ACB; CBA revine a afirma că

$$\sphericalangle BAC < \sphericalangle BMC = 120°, \text{ etc.}$$

Demonstrațiile date deci rămân valabile, literă cu literă, pentru cazul când triunghiul ABC are toate unghiurile mai mici ca 120°.

Totuși, propozițiile enunțate rămân valabile, cu ușoare modificări de transcriere a unghiurilor, care se înlocuesc în parte, prin suplimentarele lor, dacă un unghiu este superior sau egal cu 120°, dacă triunghiurile echilaterale sunt construite interior, ori chiar dacă punctele A, B, C sunt în linie dreaptă. Deși firul demonstrației rămâne același, ea trebue adoptată formal, să corespundă fiecărui caz de figură.

Se poate pune problema să se găsească o demonstrație independentă de unghiuri, care să convină tuturor cazurilor. Se poate realiza aceasta, de exemplu, dacă recurgem la reprezentarea complexă dar această metodă depășește elementarul și ea nu ne interesează în ordinea de idei, pe care o urmărim aici.

*

6°. Propoziția a) afirmă că cercurile BCI, CAJ, ABK au un punct comun. Dar este necesar ca triunghiurile construite că fie echilaterale?

Presupunem că punctele I, J, K, sunt alese în poziția cea mai generală posibilă, pentruca să existe punctul M. După soluția dată la § 2, a), unghiurile BMC, etc. sunt suplimentare cu unghiurile BIC, etc. Atunci

$$\sphericalangle AMB + \sphericalangle BMC + \sphericalangle CMA = 3 \times 180° - (\sphericalangle BIC + \sphericalangle CJA + \sphericalangle AKB)$$

Suma lor face 360° dacă

1) $\sphericalangle BIC + \sphericalangle CJA + \sphericalangle AKB = 180°$.

a') *Condiția ca cercurile BIC, CJA, AKB să aibă un punct comun este ca să existe un triunghiu A' B' C'* pentru care

2) $A' = \sphericalangle BIC$, $B' = \sphericalangle CJA$, $C' = \sphericalangle AKB$

Deci nu este surprinzător ca cercurile din figura *Torricelli* să aibă un punct comun.

Dar chiar și sub forma aceasta mai generală sunt păstrate în spiritul lor, și alte proprietăți ale figurii 1. Astfel, evident.

b') *Laturile triunghiului ABC sunt văzute din M sub unghiuri suplimentare unghiurilor triunghiului A' B' C'.*

Și cu aceeași demonstrație ca a corespondentei ei, adăugăm propoziția

c') *Triunghiul UVW format de centrele cercurilor BIC, CJA, AKB este asemenea cu A' B' C'.*

Dar putem enunța și la alte proprietăți ale figurii.

Observăm astfel că

$$\sphericalangle VAC = 90° - \frac{1}{2}\sphericalangle AVC = 90° - \sphericalangle AJC = 90° - B',$$

$$\sphericalangle WAB = 90° - C'.$$

Deci

$$\sphericalangle VAW = A + \sphericalangle VAC + \sphericalangle WAB = A + A'$$

Adică

f) *Cercurile ACJ, ABK se taie sub unghiul* $180^0 - (A + A')$.

Avem încă

$$\sphericalangle MBC - \sphericalangle MCA =$$
$$= 180^0 - \sphericalangle BMC - \sphericalangle MCB - \sphericalangle MCA =$$
$$= \sphericalangle BIC - \sphericalangle BCA.$$

3) Deci, $\sphericalangle MBC - \sphericalangle MCA = A' - C$

și analoagele

Dacă A′ B′ C′ este un triunghiu echilateral, regăsim proprietățile figurii lui *Torricelli*.

7⁰. Putem face însă și alte particularizări.

Ne întrebăm dacă punctele I, J, K ale figurii pot fi situate pe laturile AC, BA, CB, ca în fig. 3.

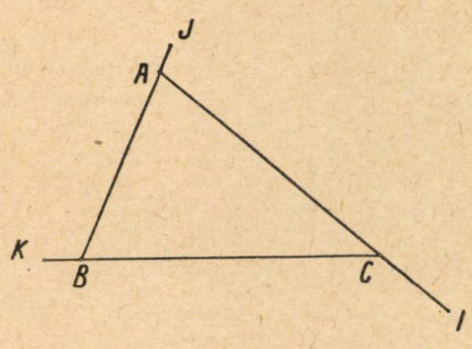


Fig. 3.

Avem

$$A' = \sphericalangle BIC = C - \sphericalangle CBI$$

și analoagele.

Condiția 1) atrage ca

$$\sphericalangle CBI + \sphericalangle ACJ + \sphericalangle BAK = 0$$

adică

$$\sphericalangle CBI = \sphericalangle ACJ = \sphericalangle BAK = 0$$

I trebue să se confunde cu C în direcția laturii AC. Cercul BIC este atunci tangent în C la latura AC. Il notăm $B\overline{C}$. Avem analog alte două cercuri $C\overline{A}$, $A\overline{B}$. Ele se numesc cercuri *adjuncte*.

Putem deci enunța:

g) *Cercul adjunct* $B\overline{C}$, *care trece prin B și este tangent în C laturii AC, și analoagele* $C\overline{A}$ *și* $A\overline{B}$ *au un punct comun, M* (Fig. 4).

Punctul M comun se chiamă punctul lui *Brocard*.

Din relațiile menționate:

$$A' = \sphericalangle BIC = C - \sphericalangle CBI \text{ și } \sphericalangle CBI = 0$$

și analoagele rezultă pentru figura lui *Brocard*, că

4) $\quad A' = C,\ B' = A,\ C' = B.$

Rezultă și proprietățile

h) *Laturile triunghiului ABC sunt văzute din punctul lui Brocard sub unghiuri suplimentare unghiurilor triunghiului ABC.*

i) *Triunghiul format de centrele cercurilor adjuncte este asemenea cu ABC.*

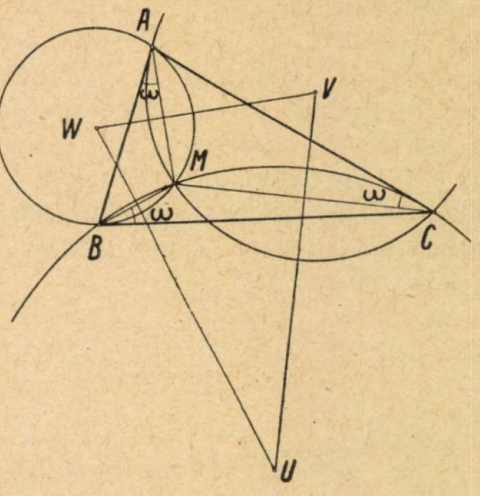


Fig. 4.

Iar din 3) și 4) și analoagele, deducem

5) $\quad \sphericalangle MBC = \sphericalangle MCA = \sphericalangle MAB.$

Această ultimă relație se poate deduce direct pe fig. 4. Fie M, a doua intersecție a cercurilor $C\overline{A}$, $A\overline{B}$. Atunci

$$\sphericalangle MCA = \sphericalangle MAB$$

ca având aceeași măsură; apoi

$$\sphericalangle MAB = \sphericalangle MBC$$

pentru același motiv, în cercul AMB; rezultă că $\sphericalangle MCA = \sphericalangle MBC$ deci cercul BMC este tangent la AC.

Dar nu aceasta interesează acum, ci coordonarea care îngemănează figurile *Torricelli* și *Brocard* [1]).

8⁰. Vom scoate în evidență o nouă proprietate a figurii generale: o proprietate *de închidere*. Fie M un punct în planul triunghiului ABC. Ducem cercurile BMC, CMA, AMB. Fie I, ales la întâmplare, pe cercul BMC. IB retaie cercul AMB în K și IC retaie cercul AMC în J. Vom arăta că dreapta JK trece prin A.

Urmărim în adevăr, pe fig. 5, egalități de unghiuri:

$$\sphericalangle KAB = 180^0 - C' - \sphericalangle KBA$$
$$\sphericalangle JAC = 180^0 - B' - \sphericalangle JCA$$
$$\sphericalangle KBA + \sphericalangle JCA = \sphericalangle BAC + \sphericalangle BIC =$$
$$= A + A'.$$

[1]) Considerând sensul opus avem un nou triplet de cercuri adjuncte: $C\overline{B}$, $A\overline{C}$, $B\overline{A}$ și un al doilea punct al lui Brocard, cu evident, aceleași proprietăți.

și cum

$$A' + B' + C' = 180°$$

rezultă

$$\sphericalangle KAB + \sphericalangle BAC + \sphericalangle CAJ = 180°$$

adică punctele K, A, J sunt pe o dreaptă.

Interesant este că această proprietate are loc, dela orice punct I, al cercului BMC am pleca. IB retaie cercul AMB în K, KA retaie cercul AMC în J și JC retaie cercul BMC tot în punctul I, de plecare. Altfel enunțat:

j) *M fiind un punct în planul ABC, există o infinitate de triunghiuri IJK, cu vârfurile respectiv pe cercurile BMC, CMA, AMB circumscrise triunghiului ABC.*

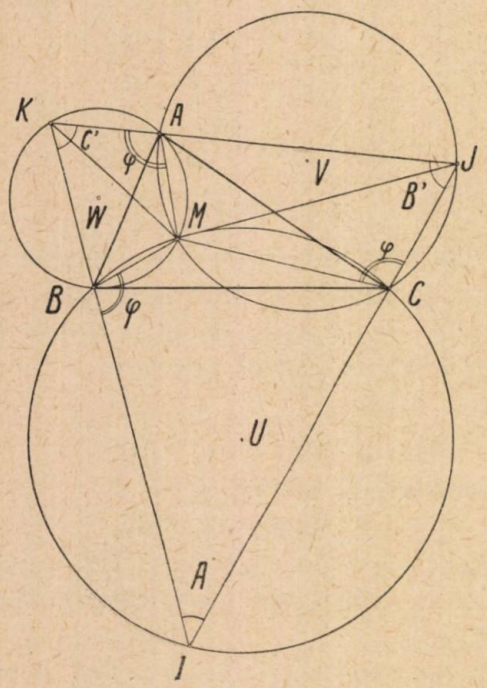


Fig. 5.

Figurii 5 îi adăugăm încă o proprietate:

$$\sphericalangle JMK = \sphericalangle JMA + \sphericalangle KMA = \sphericalangle JCA +$$

$$+ \sphericalangle KBA = \sphericalangle BAC + \sphericalangle BIC$$

5) Deci, $\sphericalangle JMK = A + A'$

Comparând acest rezultat cu proprietatea f), care exprimă că

$$\sphericalangle VAW = \sphericalangle VMW = A + A'$$

se vede că M este un centru de rotație și asemănare, al triunghiului IJK, UVW.

9°. Invers, pornind dela triunghiul IJK, ABC este un triunghiu înscris arbitrar.

k) A, B, C fiind trei puncte situate pe laturile unui triunghiu IJK, cercurile IBC, JCA, AKB au un punct comun, M; triunghiul UVW format de centrele lor este asemenea cu triunghiul IJK. Avem și relațiile

$$\sphericalangle JMK = \sphericalangle VMW = \sphericalangle BAC + \sphericalangle BIC.$$

Se mai observă pe figura 5, din cauza șirului de patrulatere inscriptibile, că

1) Punctul M se proiectează pe laturile triunghiului IJK sub unghiuri egale:

$$\sphericalangle MAK = \sphericalangle MBI = \sphericalangle MCJ.$$

Să presupunem în particular, că A, B, C sunt trei puncte pe o dreaptă, adică $\sphericalangle BAC = 0$. Rezultă că $\sphericalangle JMK = \sphericalangle JIK$ deci cercul IJK trece tot prin M.

Apoi $\sphericalangle VMW = \sphericalangle BIC = \sphericalangle VUW$ deci cercul UVW trece tot prin M.

Regăsim astfel, o teoremă cunoscută (fig. 6)

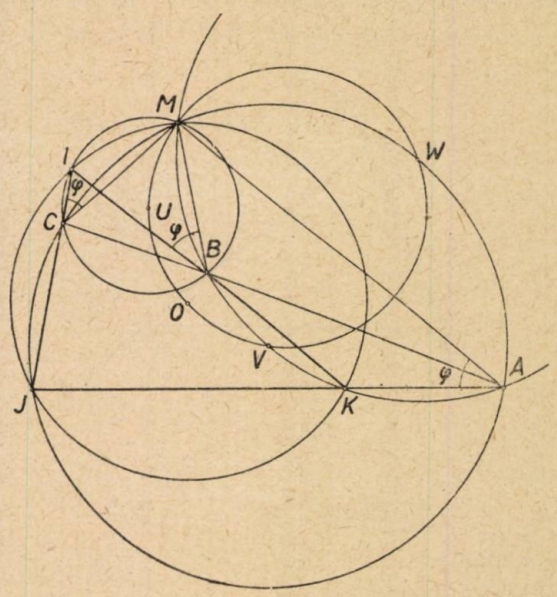


Fig. 6.

m) *Fiind date patru drepte* (IJ, IK, KJ, ABC), *cercurile circumscrise celor patru triunghiuri formate* (IBC, JCA, KAB, IJK) *trec prin același punct M.*

n) *Centrele* (U, V, W, O) *ale celor patru cercuri sunt situate pe un cerc, care trece prin M.*

Introducerea și a centrului O, al cercului IJK cu proprietăți analoage se impune prin considerații de simetrie: el joacă același rol ca și celelalte centre.

Propoziția că dreptele MA, MB, MC formează unghiuri egale cu laturile JK, KI, IJ, pusă în evidență pe fig. 5 se poate extrage ca o nouă teoremă.

o) *M fiind un punct situat pe cercul circumscris unui triunghiu* (IJK), *proiecțiile lui* (A, B, C) *pe laturi sub același unghiu φ, sunt colineare.*

Sau, citind figura 6, altfel:

p) *M fiind un punct situat pe cercul circumscris unui triunghiu* IJK, *cercurile descrise pe coardele MI, MJ, MK, capabile de un același unghiu* φ, *se retaie pe laturile triunghiului, în trei puncte colineare.*

*

10°. Revenim la figura inițială, de care totuși nu ne-am depărtat esențial. Ea cuprinde și proprietatea d). Să căutăm condițiile pe care le îndeplinesc triunghiurile BCI, CAJ, ABK construite pe laturi, pentruca în afară de însușirea ca cercurile circumscrise lor să aibă un punct comun, (garantată de relația 1), dreptele AI, BJ, CK să fie concurente în M.

Problema este posibilă, după cum arată figura 7. Fie M un punct în planul triunghiului ABC. Construim cercurile care trec prin M și prin câte două vârfuri ale triunghiului. AM, BM, CM retaie aceste cercuri BMC, CMA, AMB în I, J, K.

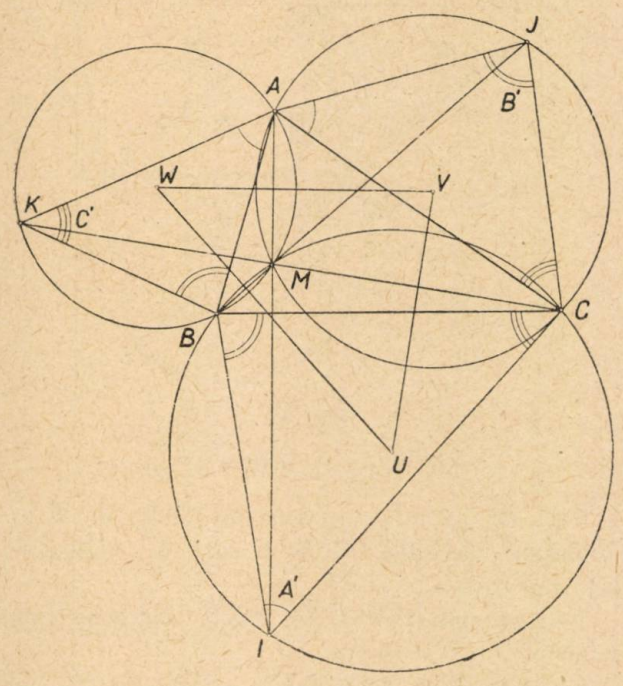


Fig. 7.

Observăm că

$$\sphericalangle BIC = 180^0 - \sphericalangle BMC = \sphericalangle CMJ = \sphericalangle CAJ$$

și analog.

$$\sphericalangle CAJ = \sphericalangle BAK = \sphericalangle BIC.$$

Deci triunghiurile BCI, CAJ, ABK sunt asemenea între ele.

Putem enunța:

q) *Fie A' B' C' un triunghiu dat. Construim exterior pe laturile triunghiului ABC triunghiurile BCI, CAJ, ABK asemenea cu A' B' C', astfel ca în jurul vârfului A să fie situate unghiurile egale cu A', etc.*

a'') *Cercurile circumscrise acestor triunghiuri auxiliare trec prin același punct M.*

b'') *Laturile triunghiului dat sunt văzute din M sub unghiuri suplimentare cu ale triunghiului A' B' C'.*

c'') *Centrele U, V, W, ale triunghiurilor construite pe laturi formează un triunghiu asemenea cu A', B', C'.*

d'') *Dreptele AI, BJ, CK sunt concurente în M.*

In figura *Torricelli*, segmentele AI, BJ, CK erau egale. Să căutăm corespunzătoarea acestei proprietăți pe fig. 7. Vom adapta în acest scop, raționamentul dela § 3, e).

Triunghiurile CAK, BAJ au unghiurile din A egale cu $A + A'$ și laturile care le cuprind, proporționale:

$$\frac{AJ}{AC} = \frac{AB}{AK}$$

Rezultă că ele sunt asemenea și proporția precedentă poate fi continuată astfel

$$\frac{AJ}{AC} = \frac{AB}{AK} = \frac{BJ}{CK} = \frac{c'}{b'}$$

notând cu a', b' c' laturile triunghiului A' B' C'. Rezultă

$$BJ \cdot b' = CK \cdot c'$$

și din cauza simetriei de roluri a figurii față de toate vârfurile:

$$AI \cdot a' = BJ \cdot b' = CK \cdot c'$$

e'') *Segmentele AI, BJ, CK sunt invers proporționale cu laturile triunghiului A' C' B'.*

Adăugăm și propoziția

f'') *Cercurile ACJ, ABK se taie sub unghiul* $180° - (A + A')$.

Ceeace constituie esența figurii lui *Torricelli* nu ține deci de triunghiul echilateral ci de împrejurarea că am construit un triunghiu asemenea cu un triunghiu dat: A' B' C'. Este o particularizare de măruntă importanță, fiindcă l-am ales echilateral. Am simplificat numai propoziția *e''*).

11°. Enunțul precedent este și el susceptibil de noi particularizări.

Să căutăm condiția ca triunghiul IJK să fie circumscris triunghiului ABC.

Trebue ca

$$\sphericalangle BAC + \sphericalangle KAB + \sphericalangle JAC = A + 2A' = 180°, \text{ etc.}$$

adică

$$A' = 90° - \frac{A}{2},\ B' = 90° - \frac{B}{2},\ C' = 90° - \frac{C}{2}.$$

Un triunghiu asociat triunghiului ABC cu unghiurile date de aceste relaţii este de ex. acela format de centrele cercurilor exînscrise unui triunghiu.

In adevăr, dacă AM, BM, CM sunt bisectoarele triunghiului ABC (fig. 8), şi ducem perpendicularele în vârfuri pe AM, BM, CM, aceste perpen-

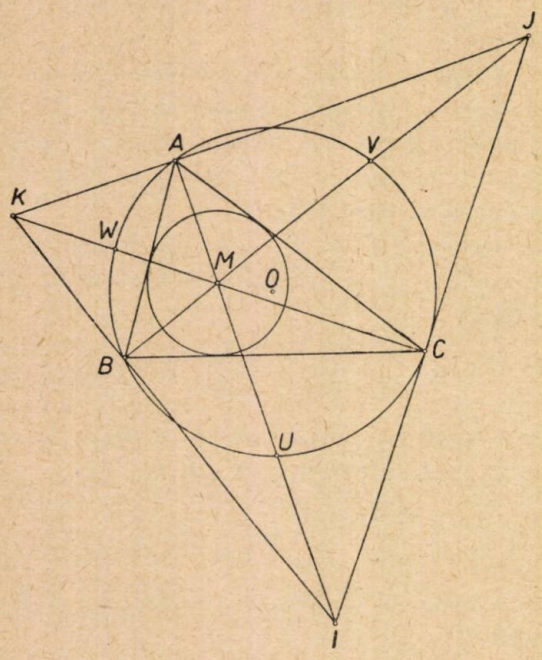


Fig. 8.

diculare (bisectoarele exterioare) formează un triunghiu IJK astfel că

$$\sphericalangle \text{KAB} = \sphericalangle \text{JAC} = 90° - \frac{\text{A}}{2}$$

şi analoagele. Triunghiurile BCI, CAJ, ABK sunt deci asemenea.

Decurg de aici toate proprietăţile dela § precedent:

r) *Cercurile BCI, CAJ, ABK trec prin acelaşi punct M.*

s) *Laturile triunghiului ABC sunt văzute din centrul cercului înscris, M, sub unghiurile*

$$90° + \frac{\text{A}}{2},\ 90° + \frac{\text{B}}{2}.\ 90° + \frac{\text{C}}{2}.$$

t) *Cercurile ACJ, ABK se taie sub unghiul* $90° + \frac{\text{A}}{2}$.

Propoziţiile omise de a fi fost citate sunt evidente în virtutea faptului că AI, BJ, CK sunt înălţimi în triunghiul IJK, de unde decurge şi însuşirea că U, V, W, centrele cercurilor BCI, CJA, AKB sunt situate la mijlocul segmentelor MI, MJ, MK.

Dar prin proprietatea *t*), rezultă că

$$\sphericalangle \text{VAW} = 90° + \frac{\text{A}}{2} = 180° - \sphericalangle \text{VUW}$$

$\sphericalangle$ VUW fiind egal cu $\sphericalangle$ JIK $= 90° - \frac{\text{A}}{2}$. Deci: *cercul UVW trece prin punctele ABC.*

Dacă luăm pe IJK drept triunghiu de referinţă rezultă şi

u) *Intr'un triunghiu (IJK), picioarele înălţimilor* (A, B, C), *şi mijloacele segmentelor* (U, V, W) *dintre vârfuri şi ortocentru* (M) *sunt situate pe un cerc* (cercul lui *Euler*)[1]).

12⁰. Triunghiurile asemenea pot fi construite pe laturile triunghiului şi în ordinea inversă din fig. 7, în ceeace priveşte dispoziţia unghiurilor egale de pe laturile (fig. 9):

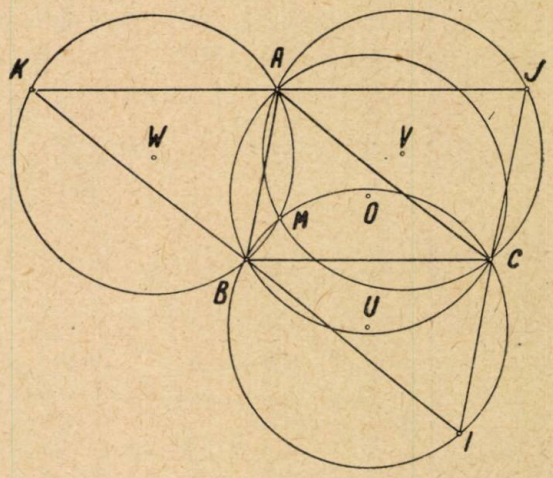


Fig. 9.

$\sphericalangle$ IBC $= C'$, $\sphericalangle$ ICB $= B'$ etc.

Vom face o aplicaţie, alegând pe I, J, K simetricele vârfurilor A, B, C faţă de mijloacele laturilor opuse.

Triunghiurile BCI, CJA, AKB sunt deci *egale* cu ABC.

Cercurile BCI, CJA, AKB se taie în M. Din M, după *b''*) laturile se văd sub unghiuri suplimentare unghiurilor triunghiului; M este deci *ortocentrul* triunghiului.

Triunghiul UVW format de centrele cercurilor asociate (U este simetricul centrului circumscris 0, faţă de latura BC, etc.) este după *c''*) asemenea cu ABC. Dar, în cazul figurii, ABIC, etc., fiind toate paralelograme, unghiul MBI este drept deci U este la mijlocul segmentului MI şi analog, V la mijlocul MJ, W la mijlocul MK. Triunghiul UVW este deci chiar *egal* cu ABC.

[1]) Enunţ parţial. Mijloacele laturilor triunghiului sunt şi ele pe acest cerc.

Adăugăm astfel, la veriga de propoziţii cu substrat comun şi următoarea teoremă cunoscută:

v) *Fie I, J, K simetricele vârfurilor triunghiului ABC, faţă de mijloacele laturilor opuse. Cercurile BIC, CJA, AKB, egale cu cercul ABC, trec prin ortocentrul M. Centrele lor U, V, W formează un triunghiu egal cu ABC. Cercurile considerate se taie sub unghiurile 2A, 2B, 2C.*

13°. Se observă astfel, că teoreme cu aparenţă de independenţă între ele au o singură idee la bază. Coordonarea lor pe acest fir constituie o justificare mai aproape de esenţa lucrurilor, pe o poziţie mai avansată, în procesul de înţelegere.

INTERFERENŢA LUMINII

Dr. C. Rabega
Conferenţiar la Universitatea «C. I. Parhon»

Dintre formele de energie, lumina este fără îndoială cea mai răspândită. Caracterul energetic al luminii se poate dovedi pe cale experimentală. Aşa, de pildă, *lumina se poate transforma în alte forme de energie*. Pentru a ne da seama de aceasta este necesar să dăm câteva exemple:

Lăsând să cadă un fascicol de lumină solară pe suprafaţa unui metal fotosensibil (sodiu, potasiu etc.) o parte din electronii reţelei metalice sunt eliberaţi sub acţiunea luminii. Deplasarea acestor electroni dealungul unui conductor constitue curentul fotoelectic. In acest fenomen *energia luminoasă se transformă astfel în energie electrică* şi de aceia această transformare poartă numele *efect* sau *fenomen fotoelectric*.

Ţinând la lumină un recipient de sticlă care conţine un amestec echimolecular de clor şi hidrogen, cele două gaze se combină între ele dând acid clorhidric. Această reacţie de combinare este posibilă numai în prezenţa luminii care pătrunde în recipient şi activizează moleculele de clor, transformându-le în atomi liberi. Această activare a clorului sub acţiunea luminii este o transformare cunoscută sub numele *efect* sau *fenomen fotochimic*. Această transformare determină ulterior lanţul de reacţii chimice, al cărui mecanism a fost lămurit pe deplin de chimistul sovietic *Semionov* şi care conduce la formarea acidului clorhidric. In acest fenomen *energia luminoasă se transformă în energie chimică*.

Energia luminoasă produce şi efecte mecanice: ea exercită o presiune asupra corpurilor pe care cade. Această presiune este foarte mică, şi a fost verificată experimental de către fizicianul rus *Lebedev*, printr'o celebră experienţă de mare sensibilitate.

Lumina este o energie radiantă, fiind emisă de corpurile care au lumina lor proprie (corpuri luminoase), sau fiind reflectată de cele care au lumină împrumutată (corpuri luminate). După felul isvoarelor luminoase naturale sau artificiale, lumina poate fi naturală sau artificială. Şi una şi alta sunt alcătuite din radiaţiuni de diferite lungimi de undă; însă se deosebesc prin numărul radiaţiilor componente. De aceia lumina solară sau albă se mai numeşte şi *lumină policromatică*, spre deosebire de aceia emisă în anumite condiţii experimentale de unele substanţe, care poartă numele de *lumină monocromatică*. Lumina policromatică este alcătuită din mai multe feluri de radiaţiuni, iar lumina monocromatică este alcătuită, practic vorbind, dintr'o singură radiaţiune. De ex. Lumina galbenă de sodiu, lumina roşie de cadmiu, etc.

Din punctul de vedere al percepţiei luminoase în lumina policromatică putem distinge uşor două feluri de radiaţiuni: *raze vizibile* şi *raze invizibile cu ochiul liber*. Razele vizibile sunt cuprinse între 7600 Å şi 3800 Å [1]), alcătuind regiunea vizibilă a spectrului, iar razele invizibile sunt la rândul lor de două feluri: *raze infraroşii (calorice)* şi *raze ultraviolete (chimice)*, constituind spectrul solar invizibil.

Fenomenele luminoase au o însemnătate uriaşă. Ele au aplicaţii multiple şi variate în tehnica luminării locuinţelor şi a localurilor publice, în optotehnică, metalurgie şi metalografie. Energia radiantă este folosită în radiologie, Röntgenoterapie, Röntgenografie, etc.

Cu ajutorul aparatelor optice omul a reuşit să mărească orizontul cunoştinţelor sale, făcând studii atât asupra celulei vii, cât şi asupra corpurilor cereşti.

Insuşirea principală a luminii, pe care se bazează construcţia instrumentelor optice, este propagarea sa în linie dreaptă. Ea l-a determinat pe *Newton* să susţină pe la sfârşitul veacului al XVII-lea *teoria emisiunii*, adică teoria exis-

[1]) $1Å = 10^{-8}$ cm.

tenței unor particule luminoase, care se mișcă în linie dreaptă conform legilor mecanicei.

Huyghens, contemporanul lui *Newton*, emite o altă teorie a luminii, plecând dela analogia dintre fenomenele acustice și cele optice și crede că lumina este un fenomen care se propagă sub formă de unde asemănătoare undelor sonore.

Deoarece lumina se propagă și în vid, s'a admis că aici s'ar afla o substanță perfect elastică numită *eter*, care face posibilă propagarea undelor luminoase și o explică.

Pe vremea lui *Newton* și *Huyghens* teoria ondulatorie era deabia la începutul ei. Cel mai însemnat element care a fost introdus ulterior în această teorie a fost *periodicitatea fenomenelor luminoase*. Dintre ideile lui Huyghens, cea mai însemnată este fără îndoială principiul său, cu ajutorul căruia a explicat reflexia și refracția luminii precum și dubla refracție a luminii în spatul de Islanda.

Principiul lui Huyghens se enunță astfel:

Fiecare punct atins de o excitație luminoasă devine la rândul său un centru secundar de vibrație, un isvor de noi mișcări vibratorii elementare ce se răspândesc cu aceiași viteză, aceiași perioadă și aceiași lungime de undă, în toate direcțiile din jurul punctului considerat.

Mult mai târziu *Fresnel* a completat acest principiu cu acela de interferență al lui *Young*.

Cu ajutorul noului principiu Huyghens-Fresnel s'a putut explica *difracția luminii*. Abia acum se poate spune că există o teorie ondulatorie a luminii, după care lumina este considerată ca fiind *o undă elastică de înaltă frecvență*, a unui fluid universal numit eter.

Pentru a explica polarizarea luminii, *Fresnel* admite că undele luminoase vibrează perpendicular pe direcția lor de propagare (unde transversale). Transversalitatea undelor luminoase nu este posibilă decât într'un mediu solid de unde decurge astfel ca o necesitate, ipoteza că eterul ar trebui neapărat să fie un corp elastic solid.

Intre timp *Faraday* arată că între fenomenele optice și cele magnetice există o legătură: planul de polarizare se poate roti într'un câmp magnetic. Pe de altă parte, se ajunge la concluzia că raportul dintre unitatea electromagnetică și unitatea electrostatică a intensității unui curent electric este egal tocmai cu viteza luminii în vid (3.10^{10} cm/s).

Maxwell arată că variațiile câmpului electric și magnetic se propagă în spațiu cu viteza luminii, concluzie confirmată mai târziu prin experiențele lui *Hertz*.

In 1865 tot Maxwell afirmă că lumina este o undă transversală, de natură electromagnetică.

După Maxwell:

$$\frac{c}{v} = \sqrt{\varepsilon\mu}$$

în care c = viteza luminii în vid.

v = viteza luminii în mediul de constantă dielectrică ε și permeabilitatea magnetică μ. Permeabilitatea magnetică este un coeficient care arată ușurința sau greutatea cu care pătrund liniile de forță magnetică prin diferite substanțe.

Având în vedere că $\frac{c}{v} = n$ (indicele de refracție)

$$n = \sqrt{\varepsilon\mu}$$

Această relație a lui Maxwell stabilește astfel legătura care există între o constantă optică, una electrică și alta magnetică, ale materiei.

Se ajunge astfel la concluzia că lumina este de natură electromagnetică. Această teorie a lui Maxwell a făcut inutilă ipoteza existenței eterului și la aceeași concluzie se ajunge mai târziu în teoria relativității a lui Einstein.

Deși experiența arată că în dispersiunea luminii indicele de refracție n variază cu lungimea de undă λ: $n = f(\lambda)$, totuși în relația lui Maxwell această interdependență nu reiese. Rezolvarea acestei probleme a dat-o *H. A. Lorentz* cu ajutorul teoriei electronice (1896). Peste câțiva ani pentru a rezolva problema corpului negru, M. Planck emite teoria cuantelor (1900). Această teorie a fost desvoltată ulterior de către A. Einstein, iar perfecționarea acestei teorii continuă și în zilele noastre mai ales prin cercetările fizicienilor sovietici.

Forma inițială a ecuațiilor mecanicii cuantice a dus o serie de fizicieni apuseni la concluzii idealiste. In genere fizica cuantică ajunsese în ultimii ani într'un impas principial nefiind în stare să dea răspunsul la o serie de probleme grele puse de fizica experimentală. Eșirea din acest impas a fost găsită de fizicienii sovietici, în perfecționarea teoriei unitare a câmpurilor. I. B. Rumer a desvoltat optica pentadimensională, echivalentă mecanicii ondulatorii, într'un spațiu cu cinci dimensiuni (coordonate, timp, acțiune); având posibilități mai largi pentru studiul fenomenelor neexplicate de teoria mecanicii ondulatorii. I. I. Frenkel și D. I. Blohințev au desvoltat teoria câmpului, considerând particolele (deci și fotonii) ca excitații locale ale câmpului, aceasta înlocuind ipoteza clasică a eterului.

Dar să ne apropiem de studiul care face obiectul prezentului articol.

S'a observat că atunci când un fascicol de lumină solară cade pe suprafaţa unor straturi foarte subţiri de petrol sau ulei care plutesc deasupra apei, se produc nişte colori care seamănă cu acelea ale curcubeului. Sunt aşa numitele *culori ale lamelor subţiri.*

Acelaşi fenomen se observă la baloanele de săpun şi la lamele transparente de oxizi care iau naştere pe suprafaţa sticlelor vechi sau pe aceia a metalelor (mai ales cu prilejul călirii pieselor de oţel). Aceste straturi materiale subţiri şi transparente pentru razele de lumină poartă numele de *lame subţiri.* Când lumina cade pe o astfel de lamă, se reflectă în parte pe prima suprafaţă, iar în parte pătrunde în interiorul lamei, reflectându-se pe cea de a doua suprafaţă a sa. Intre razele de lumină incidente se produc astfel diferenţe de drum, din a căror cauză ia naştere un fenomen optic foarte însemnat, numit *interferenţa luminii.*

Interferenţa luminii se poate obţine experimental în modul următor: Se aşează o lentilă plan-convexă de distanţă focală mare pe o placă de sticlă plană (fig. 1). Stratul de aer cuprins între lentilă şi placă creşte treptat în grosime dela punctul lor de tangenţă către margini.

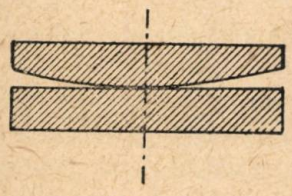


Fig. 1. — Dispozitiv pentru obţinerea inelelor lui Newton

Dacă peste acest strat cade un fascicol de *lumină monocromatică,* razele de lumină se vor reflecta unele pe suprafaţa superioară, altele pe faţa inferioară a stratului de aer, dintre cele două piese ale sistemului, deci vor parcurge drumuri diferite. Dacă prindem pe un paravan razele reflectate se obţin *inelele lui Newton*: în punctul unde lentila se sprijină pe placă se formează o pată circulară întunecată, înconjurată de inele concentrice, alternativ luminoase şi întunecate, a căror lăţime scade spre periferie (fig. 2).

In cazul când se foloseşte în experienţa de mai sus un fascicol de *lumină policromatică (solară)* se obţin cercuri concentrice colorate în colorile curcubeului.

Ne putem da uşor seama că *teoria corpusculară a luminii* nu poate să explice producerea acestor fenomene de interferenţă, deoarece este greu să presupunem de ce un corpuscul luminos întâlnindu-se cu un alt corpuscul luminos, ar da un *maximum de lumină* într'un loc şi un *minim de lumină* (întuneric) într'alt loc.

Pe la începutul veacului trecut Fresnel a explicat interferenţa luminii, sprijinindu-se pe teoria ondulatorie.

Fresnel şi Young au construit diferite dispozitive pentru producerea fenomenelor de interferenţă.

Iată, de pildă, un dispozitiv simplu imaginat de către Young: într'o cutie de carton bine închisă se introduce un bec electric mat. Intr'unul din pereţii cutiei facem cu un ac foarte subţire două împunsături foarte fine la o distanţă de mai puţin de un milimetru una de alta. Se aşează în faţa acestor împunsături la o depărtare de vreo

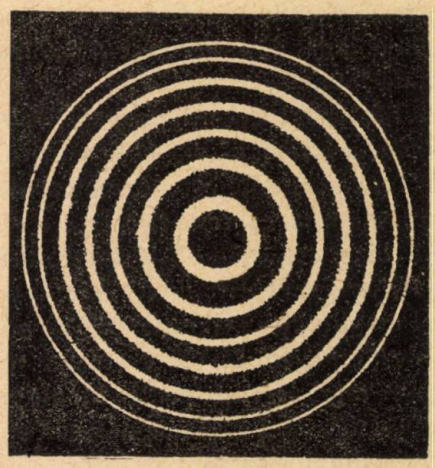


Fig. 2. — Inelele lui Newton

10 cm un paravan de carton alb. Dacă ne aflăm într'o cameră obscură, pe paravan vom vedea nişte dungi aproape circulare colorate în colorile curcubeului. Dacă, însă, se foloseşte în cutie un bec roşu, pe paravan vom vedea dungi alternative roşii şi negre, dar foarte puţin accentuate, deoarece lumina care le produce este foarte slabă.

Aceste dungi se produc tot prin interferenţa luminii.

Pentru a înţelege mai uşor acest fenomen, ne vom folosi de o comparaţie.

Când aruncăm o piatră în apa liniştită a unui lac, din locul unde a căzut piatra, pornesc unde circulare şi concentrice, care se întind din ce în ce mai departe. Aceste unde sunt produse prin mişcarea în sus şi în jos a apei, a cărei suprafaţă liniştită a fost turburată de lovitura pietrei.

Să ne închipuim acum că aruncăm în acelaşi timp două pietre în apa liniştită a unui lac. Fiecare piatră va produce în apă unde circulare care se vor întretăia între ele în foarte multe puncte. Constatăm că mişcările apei în punctele de întâlnire ale undelor se deosebesc: în unele locuri apa se mişcă puternic, deoarece în acele locuri,

ambele unde au mişcări în sus şi în jos în acelaşi timp; în alte locuri apa stă în nemişcare, deoarece acolo efectele mişcărilor se compensează, anihilându-se reciproc. Se produce deci, o interferenţă sau suprapunere a undelor şi rezultatul este formarea unei zone de maxime şi minime de mişcare a apei.

Acelaşi lucru se petrece şi în cazul interferenţei luminii, deaceea acest fenomen nu se poate explica decât numai admiţând că fenomenele luminoase sunt *fenomene ondulatorii*. In această ipoteză undele luminoase se întretaie în spaţiu: acolo unde acţiunile lor sunt de acelaşi sens, vor lua naştere maxime de lumină; însă acolo unde acţiunile acestor unde vor fi de sens opus, ele se vor anula anihilându-se reciproc şi vor lua naştere minime de lumină.

Studiul interferenţelor luminoase constitue un capitol foarte însemnat din optica fizică, în care ipoteza fundamentală este următoarea: fiecare rază de lumină monocromatică este o *vibraţie* de perioadă bine determinată şi intensitatea luminoasă într'un punct este direct proporţională cu pătratul amplitudinei vibraţiei (a^2) în acel punct. Viteza de propagare în vid a acestor vibraţiuni luminoase este aceeaşi pentru toate radiaţiile ($c = 3.10^{10}$ cm/sec). Lungimile de undă sunt foarte mici (de ordinul jumătăţii de micron (0,5 μ sau 5.10^{-5} cm) şi cresc dela violet la roşu; limitele spectrului vizibil sunt cuprinse între 0,76 μ pentru roşu şi 0.38 μ pentru violet. Aceste valori corespund la perioade $\left(T = \frac{\lambda}{c}\right)$ de ordinul $1{,}66 \times 10^{-15}$ sec., sau la frecvenţe de ordinul de mărime 10^{15}, adică un milion de miliarde de vibraţiuni pe secundă.

Este necesar să menţionăm că faptele de mai sus trebue completate cu principiul lui Huyghens. In lumina acestui principiu, viteza de propagare a luminii într'un mediu de indice de refracţie n va fi $v = \frac{c}{n}$. De aceea, un drum, parcurs de lumină într'un mediu de indice de refracţie n va fi echivalent din punctul de vedere optic cu drumul parcurs de lumină în vid. Având în vedere valoarea mică a indicelui de refracţie al aerului ($n = 1{,}000293$ la 0° C şi 760 mm Hg) întârzierea luminii în aer se poate considera ca fiind neglijabilă.

De asemenea este necesar să subliniem că în timp ce în vid vibraţiile luminoase se propagă cu aceeaşi viteză, în diferitele substanţe transparente, viteza de propagare variază cu perioada. In acest caz indicele de refracţie al unei substanţe este raportul dintre viteza V_0 a luminii în vid şi viteza V a luminii în acea substanţă:

$$n = \frac{V_0}{V}$$

Din formula $\lambda = VT$ se vede că $V = \frac{\lambda}{T}$. Deci, variaţia vitezei va influenţa numai variaţia lungimii de undă λ, deoarece coloarea rămânând aceiaşi, este firesc să admitem că perioada T nu este influenţată. In acest caz:

$$n = \frac{V_0}{V} = \frac{\lambda_0}{\lambda}$$

Teoria ondulatorie a luminii ne ajută să înţelegem mecanismul fenomenului de interferenţă.

Condiţiuni de interferenţă. Pentru a obţine interferenţe luminoase observabile, este neapărat necesar să avem două isvoare luminoase de aceiaşi perioadă şi ale căror vibraţii să fie coherente, adică aceleaşi schimbări de fază să se producă simultan în cele două isvoare, iar diferenţa de fază să rămână constantă (isvoare luminoase coherente şi sincrone).

Singura cale de a obţine astfel de isvoare este aceea de a produce două imagini ale unuia şi aceluiaşi izvor de lumină.

O rază de lumină se poate separa în două componente prin reflexie sau refracţie şi ulterior le putem suprapune. Dacă aceste componente au amplitudinile a_1 şi a_2, intensitatea rezultantă variază dela un punct la altul al franjei de interferenţă între limitele $(a_1 + a_2)^2$ şi $(a_1 - a_2)^2$.

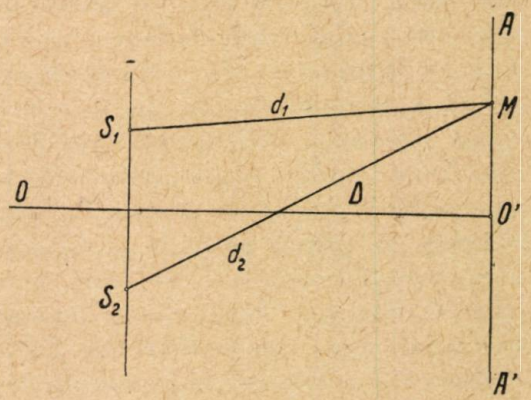


Fig. 3. - Dispozitiv de interferenţă

Pentru a produce interferenţa undelor luminoase ne vom folosi de un sistem optic, care să ne dea două imagini S_1 şi S_2 ale unuia şi aceluiaşi izvor luminos punctiform. Aceste două imagini pot fi astfel considerate ca fiind două izvoare luminoase coherente şi sincrone. Franjele de interferenţă pot fi observate pe un paravan perpendicular pe axa de simetrie a sistemului.

Admitem că în punctul M ambele unde au aceiași amplitudine. De aceia oscilațiile produse în acest punct de prima și a doua undă se exprimă astfel:

$$s_1 = a \cos 2\pi \left[\frac{t}{T} - \frac{d_1}{\lambda}\right]$$

$$s_2 = a \cos 2\pi \left[\frac{t}{T} - \frac{d_2}{\lambda}\right]$$

în care $d_1 = MS_1$; $d_2 = MS_2$; λ = lungimea de undă;

Oscilațiile se suprapun în M, unde vor da o oscilație rezultantă:

$$s = s_1 + s_2 = 2a \cos \pi \frac{d_2 - d_1}{\lambda} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{d_2 + d_1}{2}\right)$$

În M amplitudinea oscilației va fi:

$$2a \cos \left[\pi \frac{d_2 - d_1}{\lambda}\right]$$

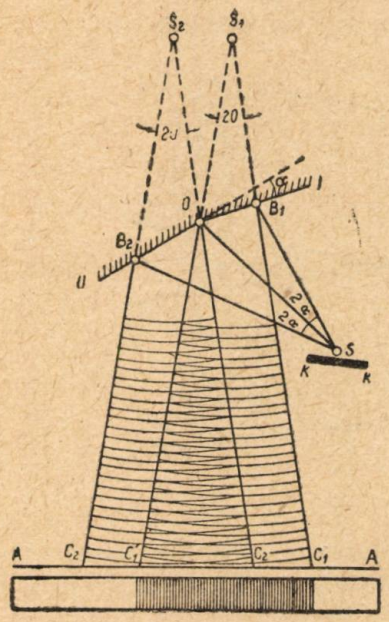


Fig. 4.

Diferența $d_2 - d_1$ se numește diferență de drum a undelor luminoase. Când această diferență de drum este egală cu un număr pereche de $\frac{\lambda}{2}$, cele două unde vor fi în concordanță de fază și intensitatea luminoasă va fi maximă, fiind egală cu $4\,a^2$.

Deci, când $d_2 - d_1 = 2\,m\,\frac{\lambda}{2}$, intensitatea luminoasă va fi egală cu $4\,a^2$ (maxime de interferență).

Când $d_2 - d_1$ este egală cu un număr nepereche de $\frac{\lambda}{2}$, cele două unde vor fi în opoziție de fază și intensitatea luminoasă va fi nulă.

Deci, când $d_2 - d_1 = (2m \pm 1) \cdot \frac{\lambda}{2}$, intensitatea luminoasă va fi nulă (minime de interferență).

Dispozitive experimentale pentru obținerea undelor luminoase coherente.

Oglinzile lui Fresnel. Un izvor luminos S trimite lumina pe două oglinzi plane I și II care fac între ele un unghiu de aproape 180° (fig. 4).

Aceste oglinzi dau două imagini virtuale S_1 și S_2 ale izvorului luminos, S, imagini care vor fi cu atât mai apropiate, cu cât unghiul oglinzilor este mai aproape de 180°. Aceste două imagini S_1 și S_2 vor fi două izvoare luminoase coherente. Undele luminoase care pornesc din aceste izvoare vor ajunge la paravanul AA' cu o anumită diferență da fază care provine din diferența de drum dela S_1 și S_2 la diferite puncte ale paravanului.

Cu ajutorul acestui dispozitiv al lui Fresnel s'a determinat λ a undei luminoase.

Alte mijloace experimentale asemănătoare sunt:

a) Dispozitivul prin care se obține interferența din suprapunerea unui fascicol luminos direct dela izvorul S_1 cu un al doilea fascicol reflectat de o oglindă plană (fig. 5).

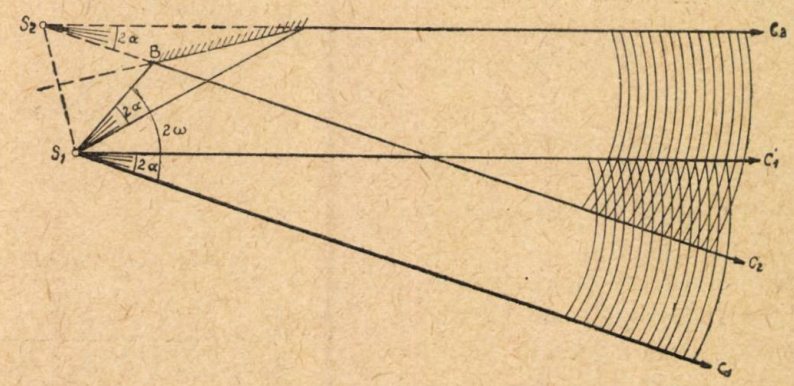


Fig. 5.

b) Biprisma lui Fresenel. Aceasta este formată din două prisme egale de unghiu refringent foarte mic și care sunt lipite prin bazele lor. Mersul razelor de lumină și forma câmpului de interferență sunt indicate în fig. 6.

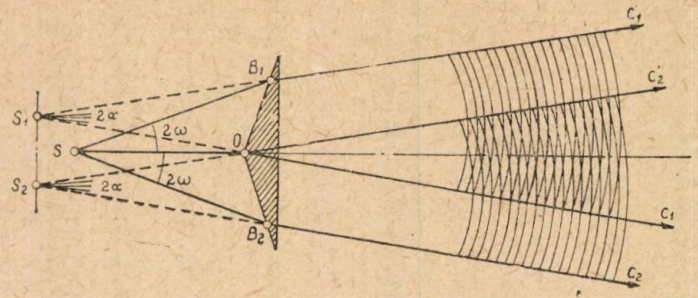


Fig. 6.

Undele coherente care vor da interferențe se obțin prin refracția unui fascicol luminos prin cele două prisme.

c) Bilentila. Aceasta este alcătuită din cele două jumătăți ale unei lentile biconvexe, tăiată în două părți egale după un diametru și distanțate una față de alta (fig. 7).

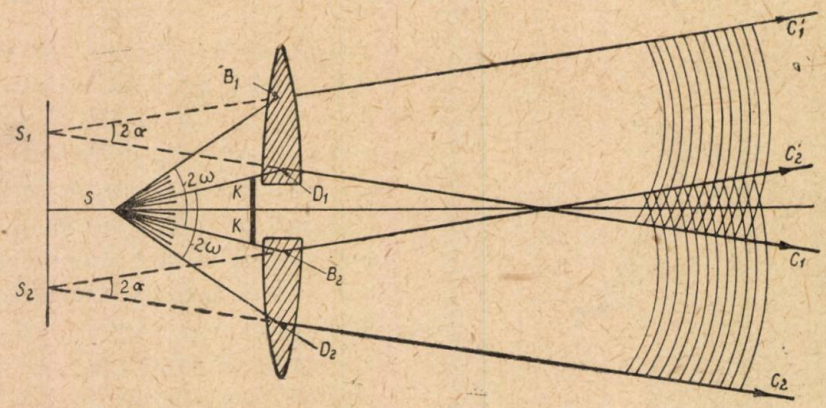


Fig. 7.

Undele coherente de interferență se obțin prin refracția unui fascicol luminos dela un izvor de lumină S, prin cele două jumătăți de lentilă, ca și în cazul când lumina ar pleca dela două izvoare coherente, reprezintate prin cele două imagini reale sau virtuale ale izvorului inițial S.

d) Dispozitivul lui Young. Acest dispozitiv are o mare însemnătate istorică, deoarece cu ajutorul său, Young a observat pentru prima dată (1802) interferența luminii.

Un izvor luminos punctiform S luminează două mici fante S_1 și S_2, făcute într'un paravan. Ele pot fi considerate ca două isvoare sincrone (principiul lui Huyghens). Interferențele sunt produse de *lumina difractată* (fig. 8).

Se obțin franje clare și nete numai cu ajutorul unor izvoare luminoase punctiforme, așa cum se procedează de altfel în toate cazurile precedente.

Dacă însă în locul izvorului punctiform monocromatic S, vom folosi lumină policromatică (albă), fiecare din radiațiile monocromatice care constitue lumina albă, va da în planul de observație câte un sistem de franje; toate aceste sisteme au franja centrală în 0 (fig. 9).

Intensitatea maximă a radiațiilor violete va fi în V_1, iar a celor roșii în R_1, între ele sunt cuprinse

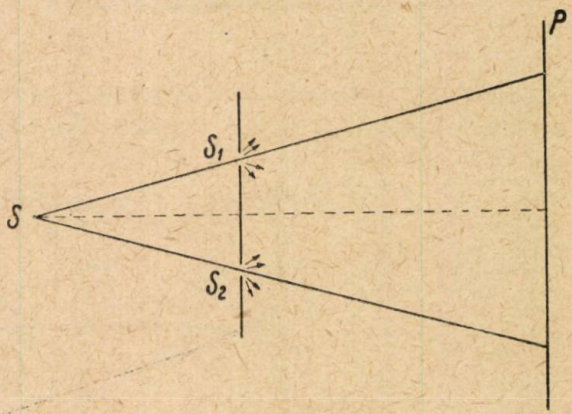


Fig. 8. — Dispozitivul Young.

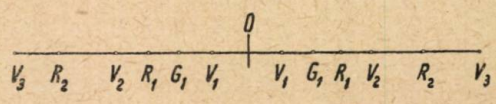


Fig. 9. — Distribuția colorilor în jurul franjei centrale (0).

maximele celorlalte colori, dintre care galbenul, G_1, pare cel mai intens din cauza sensibilității maxime a ochiului pentru această culoare. Franja centrală va fi deci mărginită de violet la interior și roșu la exterior.

Pe măsură ce ne depărtăm de franja centrală colorile sunt din ce în ce mai slabe și înecate în alb. In timp ce, de exemplu, în oglinzile lui Fresnel, lumina monocromatică dă un număr practic *nelimitat* de franje, în lumină albă este imposibil să se observe mai mult de 5 sau 6 franje de fiecare parte a franjei centrale.

Unde staționare. Dacă un fascicol luminos paralel cade normal pe o oglindă metalică, suprapunerea undelor incidente și a celor reflectate, care au aproximativ aceiași amplitudine, dă naștere la *unde staționare.* Vibrația luminoasă rezultantă va fi maximă în planurile centrale și nulă în cele nodale, separate de primele prin $\frac{\lambda}{4}$. Intervalul cuprins într'un nod și un ventru este foarte mic și a fost pus în evidență, fotografiind cu o peliculă sensibilă de colodiu și bromură de argint, a cărei grosime nu depășea $\frac{1}{30}$ din lungimea de undă.

Fotografia în colori. Metoda lui G. Lippmann. Dacă pe o oglindă metalică M punem un strat sensibil de clorură de argint, pe care îl iluminăm normal cu o lumină monocromatică (λ_1) clorura de argint este redusă în planurile ventrale ale sistemului de unde staționare.

Se formează astfel în acest strat lame echidistante de argint al căror interval este $\frac{\lambda_1}{2}$ (λ_1 fiind lungimea de undă în stratul sensibil). Luminăm apoi normal placa cu ajutorul unui fascicol de lumină albă și examinăm lumina reflectată de diferitele lame de argint. Diferența de drum între toate razele reflectate de aceste lame va fi egală cu dublul distanței dintre acestea, de ex. λ_1 pentru acele regiuni în care lamele sunt distanțate cu $\frac{\lambda_1}{2}$. Prin urmare placa preparată după metoda lui Lippmann capătă proprietatea de a reflecta razele luminoase, iar în lumina reflectată ea va da acea distribuție a colorilor, care a fost folosită la expunerea ei; placa ne dă astfel posibilitatea să vedem imaginea în lumină reflectată în colorile naturale.

Interferometre și aplicații ale fenomenelor de interferență

a) *Refractometrul interferențial,* (interferometrul). Piesele principale ale acestui aparat sunt două oglinzi groase G și G' cu fețe paralele și argintate pe fețele lor posterioare. Ele sunt așezate ca în (fig. 10).

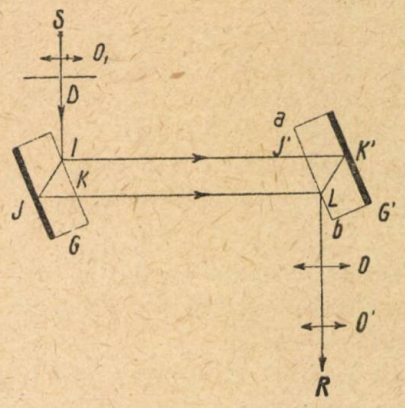


Fig. 10. — Refractometrul interferențial.

O rază de lumină SI cade pe oglinda G sub o incidență de aproape 45° și dă două fascicole: fascicolul IJ'K'LR și fascicolul IJKLR.

Cele două oglinzi fiind de aceiași grosime și perfect paralele nu se observă franje. Dacă însă, înclinăm puțin pe G' în jurul axului ab, se observă imediat franje, cu ajutorul lunetei 00' cu fir reticular.

Dacă așezăm în drumul uneia din razele acestui dispozitiv un strat de substanță oarecare, având un alt indice de refracție decât aerul înconjurător, se poate astfel determina cu mare precizie indicele de refracție al acestei substanțe. Acest aparat. este foarte sensibil pentru variații extraordinare de mici ale indicelui de refracție. Insă determinarea valorii absolute a indicelui de refracție este foarte anevoioasă cu ajutorul acestui aparat De obicei refractometrul interferențial al lui Jamin se folosește numai pentru a compara gazul care ne interesează cu un alt gaz bine studiat de mai înainte (gaz etalon) din punct de vedere refractometric.

Interfermetrul lui Michelson. In acest aparat cele două fascicole care interferă au drumuri complet separate, ceiace constitue un foarte mare avantaj. Separarea acestor raze din fascicolul incident se obține cu ajutorul unei lame de sticlă cu fețele perfect plane și paralele semiargintate, așezate la 45° față de fascicolul incident.

Acest aparat poate servi la aflarea indicelui de refracție al unei substanțe intercalată în drumul unui fascicol.

Servește deasemenea la studiul radiațiilor monocromatice.

Michelson a studiat o serie de linii și a găsit în particular pentru descărcarea în vaporii de

cadmiu sub slabă presiune în tuburi *Geissler*, câteva linii monocromatice:

Roşu 6438 Å, Verde 5086 Å, Albastru 4800 Å, Violet 4678 Å.

Linia roşie este absolut simplă şi foarte fină. Cu ea s'au putut obţine interferenţe de ordinul 400.000, ceeace corespunde la o diferenţă de drum de $400.000 \times 0{,}64\ \mu = 25$ cm.

De aceia linia roşie a fost aleasă ca etalon fundamental în spectroscopie pentru lungimile de undă.

Ea a fost deasemenea folosită pentru compararea directă a metrului etalon în lungimi de undă roşii de cadmiu (1893).

Michelson a găsit că numărul N de lungimi de undă ale razei de cadmiu, cuprins în lungimea metrului etalon la 15° şi 760 mm Hg are valoarea:

$$N = 1553165{,}4\ \lambda_{cd}$$

care ar da:

$$\lambda_{cd} = 6438{,}472\ \text{Å}$$

Invăţatul sovietic, academicianul *V. P. Linnic* în urma studiilor aprofundate asupra fenomenelor de interferenţă, a elaborat o serie întreagă de aparate de interferanţă, ingenioase, bazate pe principii noi, deschizătorare de perspective importante în cercetarea suprafeţelor, a preciziunei pieselor mecanice în construcţia aparatelor astronomice etc. Astfel el a construit un «microinterferometru» adaptabil la un microscop obişnuit, care permite observarea şi măsurarea neomogenităţilor extrem de mici ale suprafeţelor.

In concluzie, metoda interferometrică este de mare însemnătate. Ea ne permite să executăm măsurători de mare precizie a distanţelor şi să determinăm cu cea mai mare precizie, calităţile suprafeţelor şlefuite, o condiţie neapărat necesară pentru fabricarea lentilelor, oglinzilor şi prismelor. Cele mai bune metode pentru verificarea calităţii unor astfel de suprafeţe sunt metodele interferometrice, care în ultima vreme sunt cele mai răspândite în indust ia opt că şi mecanică de mare precizie. Aceste metode au fost desvoltate şi perfecţionate de fizicienii sovietici.

Afară de refractometrul interferenţial, se foloseşte în acelaşi scop un mare număr de refractometre interferenţiale tehnice la măsurarea micilor variaţii ale indicelor de refracţie a gazelor şi lichidelor. Aşa se determină compoziţia gazelor din mine sau compoziţia unor soluţii.

In ultimul timp refractometria interferenţială se foloseşte în clinici pentru studiul micilor variaţii ale compoziţiei sângelui în anumite cazuri patologice. Cu ajutorul acestor instrumente de mare precizie s'a ajuns să se determine diferiţi indici de refracţie cu precizie până la a 8-a zecimală.

Fenomenele de interferenţă pot fi folosite pentru determinarea foarte precisă a unghiurilor. Michelson a folosit metoda interferometrică pentru determinarea unor mici distanţe unghiulare între stele duble şi a diametrului unghiular al stelelor.

Metodele interferometrice ne îngădue să aflăm cu o extraordinară precizie lungimile de undă ale unor radiaţii şi să cercetăm pe cale spectroscopică structura fină a liniilor spectrale.

In momentul de faţă în ţara noastră, în condiţiile construirii socialismului, cu ajutorul frăţesc al Uniunii Sovietice s'a păşit cu elan la primele realizări în domeniul industriei optice şi optotehnice.

Nevoile din ce în ce mai mari ale producţiei, reclamă un mare număr de aparate şi piese de mare precizie, ce vor fi fabricate în serie în cadrul planului cincinal. Ştiinţa şi tehnica noastră merge în pas cu nevoile statului nostru de democraţie populară, şi ale economiei noastre naţionale. Datoria tineretului nostru şcolar este de a se pregăti cât mai temeinic pentru a putea corespunde sarcinilor ce-i revin în opera de construire a socialismului, din rândurile lor urmând a se ridica cercetătorii de mâine pe tărâmul ştiinţific.

CHESTIUNI DE EXAMEN

A. Probleme propuse la examenul de admitere din August 1951 la Facultatea de Matematică şi Fizică din Bucureşti

I) Se dă triughiul isoscel ABC (AB = AC) şi fie AH înălţimea din vârful A, iar P un punct imobil pe baza BC; perpendiculara în P pe bază întâlneşte laturile AB şi AC (eventual prelungite), respectiv în M şi N.

Se cere să se arate că:

1. Triunghiul AMN este isoscel.

2. $AH = \dfrac{MP + NP}{2}$; să se deducă de aici că suma MP + NP e constantă, când P se mişcă pe BC.

3. Care e locul geometric al mijlocului segmentului MN.

II) 1. Să se rezolve ecuaţia:

$$x^2 + 2(m+1)x + 2m^2 = 0.$$

2. Pentru ce valori ale lui m, ecuaţia dată are rădăcini reale.

3. Să se formeze ecuaţia de gradul II, ale cărei rădăcini y_1 şi y_2 verifică relaţiile:

$$\frac{y_1 - x_1}{y_2 - x_1} + \frac{y_1 - x_2}{y_2 - x_2} = 0$$

$$\frac{y_1 - 1}{y_2 - 1} + \frac{y_1 - 2}{y_2 - 2} = 0;$$

x_1 şi x_2 fiind rădăcinile ecuaţiei date.

III) Să se demonstreze trigonometric că triunghiul ABC în care:

$2a = b + c$ şi $2A = B + C$ este echilateral.

B. Probleme propuse la examenul de admitere din 15 Octombrie 1951 la Facultatea de Matematică şi Fizică (curs seral).

1. Intr'un triunghiu ABC, ale cărui laturi au lungimile $AB = c$; $BC = a$; $CA = b$ se duce o paralelă la latura AC astfel încât trapezul format ACMN să aibă perimetrul egal cu $2p$. Se cere să se găsească lungimea $BM = x$.

2. Se dă fracţia $\frac{5}{8}$. Să se afle două numere, astfel încât adunându-le, respectiv numărătorului şi numitorului, fracţia să devină egală cu $\frac{3}{5}$; scăzând cele două numere, respectiv şi numărătorul şi numitorul fracţiei date, aceasta să devină egală cu $\frac{2}{3}$.

Să se descompună numărul 200 în două părţi astfel încât dacă se divide prima parte prin 16, iar a doua prin 10, diferenţa câturilor să fie egală cu 6.

$i^i = x$

PROBLEME REZOLVATE

$x = e^{-\frac{\pi}{2}}$

Problema 257

Un bec electric este alimentat de o tensiune de 110 Volţi, curentul electric ce trece prin filamentul becului fiind de 0,5 Amp.

Să se afle:

a) Ce energie consumă becul în 3 ore;

b) Care este rezistenţa electrică a filamentului;

c) Ce cantitate de căldură produce curentul în cele 3 ore?

I. Hitzig

Soluţie. Avem:

a) $W = UIt = 110 \times 0{,}5 \times 0.800 = 594000$ Jouli,

sau $W = 594000$ waţisec $= 165$ waţiore.

b) $R = \frac{V}{I} = \frac{110}{0{,}5} = 220$ ohmi.

c) $Q = 0{,}24 \times 594000 = 142560$ calorii mici.

Problema 259

Să se stabilească forma triunghiului în care există relaţia

$$a^4 + b^4 + c^4 = a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2$$

M. Şebârşin

Soluţie. Relaţia se mai poate scrie

$$2a^4 + 2b^4 + 2c^4 = 2a^2 b^2 + 2b^2 c^2 + 2c^2 a^2$$

sau

$$a^4 - 2a^2b^2 + b^4 + b^4 - 2b^2 c^2 + c^4 + c^4 - 2c^2 a^2 + a^4 = 0$$

De unde:

$$(a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2 = 0$$

Termenii fiind pozitivi, suma se anulează numai când fiecare este nul, adică

$$a^2 = b^2,\ b^2 = c^2,\ c^2 = a^2$$

Fiind laturile unui triunghiu, a, b, c nu pot lua valori negative, deci

$$a = b = c$$

triunghiul în care există relaţia dată este echilateral.

Problema 276

Să *se arate că*

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{5}{13} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{46} = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{17} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{119}.$$

C. Ionescu-Ţiu

Soluţie. Din relaţia $\operatorname{tg}(a+b)=\dfrac{\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}b}{1-\operatorname{tg}a\operatorname{tg}b}$

avem: $a+b=\operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}b}{1-\operatorname{tg}a\operatorname{tg}b}\right)$;

Partea întâia a eglităţii se mai poate scrie:

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{5}{13}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{46}=\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\frac{5}{13}+\frac{1}{46}}{1-\frac{5}{13}\cdot\frac{1}{46}}\right)=$$

$$=\operatorname{arc\,tg}\frac{243}{593}.$$

Deasemenea,

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{17}=\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{17}}{1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{17}}\right)=$$

$$=\operatorname{arc\,tg}\frac{2}{5}.$$

Partea doua a egalităţii se mai poate scrie:

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{2}{5}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{119}=\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\frac{2}{5}+\frac{1}{119}}{1-\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{119}}\right)=$$

$$=\operatorname{arc\,tg}\frac{243}{593},$$

adică tocmai partea întâia a egalităţii.

Problema 306

Dacă într'un triunghiu avem relaţia $2a=b+c$, *avem şi relaţiile*

$$2\sin A=\sin B+\sin C;\quad \frac{2}{h_a}=\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}$$

Ilie Constantinescu

Soluţia. Folosim relaţiile $a=2R\sin A,\ldots$

Relaţia dată devine

$$4R\sin A=2R\sin B+2R\sin C$$

sau

$$2\sin A=\sin B+\sin C.$$

Pentru relaţia a doua, folosim relaţiile

$$a h_a=b h_b=c h_c=2S,$$

deci

$$a=\frac{2S}{h_a},\quad b=\frac{2S}{h_b},\quad c=\frac{2S}{h_c}$$

care înlocuite în relaţia $2a=b+c$, obţinem

$$\frac{2}{h_a}=\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}$$

Problema 308

Dacă la primul şi la al treilea termen ai unei progresii aritmetice se adaugă termenul al doilea, se obţine o progresie geometrică, la care suma patratelor termenilor este egală cu 15.

Să se determine cele două progresii, prin expresii care să permită punerea în evidenţă a raţiilor respective. Apoi să se generalizeze, înlocuindu-se 15 prin a^2.

N. C. Ciomu

Soluţie. Fie prima progresie:

$$\div\,(y-x)\cdot y\cdot(y+x).$$

Noua progresie va fi:

$$\div\,(2y-x):\ y:\ (2y+x),$$

unde avem relaţiile:

$$y^2=4y^2-x^2\ ,\ (2y-x)^2+y^2+(2y+x)^2=15$$

Din prima obţinem:

$$x^2=3y^2;$$

iar dintr'a doua:

$$9y^2+2x^2=15.$$

Substituind $x^2=3y^2$, avem: $9y^2+6y^2=15$, de unde:

$$y=\pm 1,\quad x=\pm\sqrt{3}$$

Progresie dată este:

$$\div(\pm 1\mp\sqrt{3})\cdot(\pm 1)\cdot(\pm 1\pm\sqrt{3})$$

Noua progresie este:

$$\div(\pm 2\mp\sqrt{3}):(\pm 1):(\pm 2\pm\sqrt{3})$$

Raţia celei dintâiu este, evident, $x=\pm\sqrt{3}$, iar a celei de a doua: $\pm(2\pm\sqrt{3})$.

Generalizare. Avem: $15y^2=a^2$, de unde:

$$y=\pm\frac{a\sqrt{15}}{15},\quad x=\pm\frac{a\sqrt{15}}{5}$$

De unde:

$$\div\left[\pm\frac{a\sqrt{5}}{15}(1\mp\sqrt{3})\right]\cdot\left[\pm\frac{a\sqrt{15}}{15}\right]\cdot$$

$$\cdot\left[\pm\frac{a\sqrt{15}}{15}(1\pm\sqrt{3})\right],\ \text{şi}$$

$$\div\left[\pm\frac{2a\sqrt{15}}{15}\mp\frac{\sqrt{3}\,a\sqrt{15}}{15}\right]:\left[\pm\frac{a\sqrt{15}}{15}\right]:$$

$$:\left[\pm\frac{2a\sqrt{15}}{15}\pm\frac{\sqrt{3}\,a\sqrt{15}}{15}\right],\ \text{sau,}$$

punând în evidenţă raţia:

$$\div\left[\pm\frac{a\sqrt{15}}{15}(2-\sqrt{3})\right]:\left[\pm\frac{a\sqrt{15}}{15}\right]:$$

$$:\left[\pm\frac{a\sqrt{15}}{15}(2+\sqrt{3})\right].$$

Problema 309

In cadrul planului de electrificare a unui sat se montează în piața acelui sat 2 becuri, la înălțimea h, având respectiv a și b wați, așezate la distanța d unul de altul.

Piața fiind presupusă orizontală, vor exista puncte egal luminate de cele 2 becuri?

Vasile Vasu

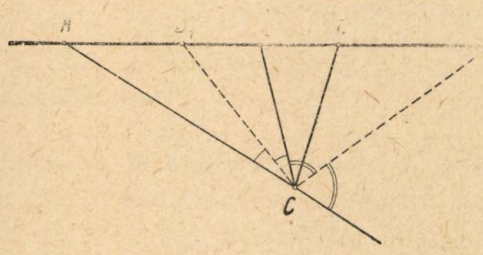
Soluție. Intensitățile luminii ajunse în C, pe suprafețe normale razelor AC și BC vor fi proporționale cu a și b și invers proporționale cu patratele distanțelor la sursele luminoase A și B.

Va trebui deci să avem:

$$\frac{a}{AC^2} = \frac{b}{BC^2}$$

de unde deducem că $\frac{AC}{BC} = \sqrt{\frac{a}{b}}$.

Să căutăm deci, în spațiu, locul geometric al punctelor C astfel încât $\frac{CA}{CB} = \sqrt{\frac{a}{b}}$



Fie D_1 și D_2 punctele așezate pe AB, unul interior, altul exterior încât $\frac{D_1A}{D_1B} = \sqrt{\frac{a}{b}}$

Intrucât

$$\frac{D_1A}{D_1B} = \frac{CA}{CB} \quad \text{și} \quad \frac{D_2A}{D_2B} = \frac{CA}{CB}$$

dreptele CD_1 și CD_2 sunt bisectoarele unghiului C, deci sunt perpendiculare între ele. Mediana CO, a triunghiului dreptunghic D_1CD_2 este jumătate din D_1D_2 deci e constantă.

Locul geometric este deci sfera cu centrul în O. Să calculăm raza ei.

$$\frac{D_1A}{D_1B} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \quad \frac{D_1A}{AB} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}, \quad D_1A = d\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

$$\frac{D_2A}{D_2B} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \quad \frac{D_2A}{AB} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}, \quad D_2A = d\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$$

$$R = \frac{1}{2}\left(\frac{d\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \frac{d\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{2d\sqrt{ab}}{a-b} = \frac{d\sqrt{ab}}{a-b}$$

Suprafața pieții va fi intersectată de sferă după un cerc dacă:

$$h < \frac{d\sqrt{ab}}{a-b}.$$

In acest caz vem un cerc de puncte egal luminate.

Suprafața pieții va atinge sfera într'un singur punct, care va fi egal luminat de cele 2 surse dacă $h = \frac{d\sqrt{ab}}{a-b}$.

Nu vom avea puncte egal luminate dacă:

$$h > \frac{d\sqrt{ab}}{a-b}.$$

Exerciții

Demonstrați

$$\left(\frac{125}{64}\right)^{10} < 1000$$

EXERCIȚII ȘI PROBLEME PROPUSE

Probleme

A, B = puncte fixe; Locul geometric M?

$$\frac{1}{AM} - \frac{1}{BM} = \text{const.}$$

526. Fie p un număr prim. Să se găsească valoarea lui p astfel încât $\frac{2^{p-1}-1}{p}$ să fie patrat perfect.

F. Lander
(Odesa)

527. Să se verifice inegalitatea,

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

A. Tralmac
(Leningrad)

528. Pe laturile a, b și c ale unui triunghi ABC se iau segmentele:
$CA_1 = CA' = a_1$; $AB_1 = AB' = b_1$ și $BC_1 = BC' = c_1$ unde A_1, B_1, C_1 sunt situate pe laturi, iar A', B' și C' pe prelungiri. Să se demonstreze că aria cuprinsă între triunghiurile $A'B'C'$ și $A_1B_1C_1$ este dată de expresia:

$$2S\left(\frac{a_1}{a}+\frac{b_1}{b}+\frac{c_1}{c}\right)$$

unde am notat cu S aria triunghiului ABC.

O. Sacter

529. In circuitul unui alternator a cărui forță electromotoare este de 120 volți sunt legate în serie, un bec electric având o rezistență de 120 ohmi, un condensator de 8 microfarazi și o bobină având rezistența de 80 ohmi și inductanța proprie de 1 henry. Pulsația curentului fiind 800, se cere: Impedanța circuitului, factorul de putere și puterea medie. Ce fenomen are loc dacă se micșorează la jumătate capacitatea condensatorului?

Virgil Atanasiu

530. Ce relație trebue să existe între coeficienții de dilatare a barelor ce formează un triunghiu dat, astfel că dacă ridicăm temperatura cu t^0, triunghiul să devină echilateral.

Petre St. Simion

531. Dacă A, B, C, D, sunt numere întregi și dacă $A^3+B^3+C^3=D^3$, să se arate că $A+B+C-D$ este multiplu de 6.

V. Claudian

532. Să se determine m astfel ca ecuația

$$(m-2)x^2-2mx+3m-m^2=0$$

1°. Să aibă rădăcina cea mai mică cuprinsă între -1 și $+1$;

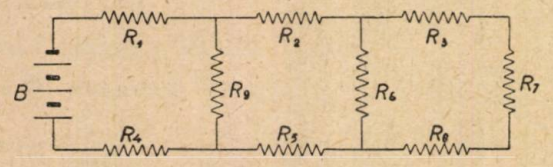
2°. Să aibă amândouă rădăcinile între -1 și $+1$.

Lazăr Dragoș

533. Fie 0 un punct fix și (Δ) o dreaptă dată. Dintr'un punct A situat pe (Δ) se duce $\overline{AM}$ egală cu $\overline{AO}$ și perpendiculară pe OA. Se cere locul lui M când A variază pe dreapta dată.

N. Gaiu

534. Se realizează următoarea schemă electrică:



alcătuită din 9 rezistențe diferite. Circuitul este în contact cu o sursă alcătuită din baterii cu o tensiune la borne $U=110$ volți.

Se cere:

1°. Rezistența circuitului exterior când rezistențele nu sunt egale între ele.

2°. Rezistența circuitului exterior când rezistențele sunt egale între ele cu 2 ohmi.

3°. Rezistența interioară pentru forța electromotrice de $E=120$ volți.

4°. Dacă fiecare rezistență este de 3 ohmi, să se afle căldura degajată în 6 minute și 50 secunde.

Dorin Stanciu
elev, Orașul Stalin

535. Un om privește la imaginea sa într'o oglindă, situată pe fundul unui vas plin cu apă. La ce distanță de ochiu se găsește imaginea aparentă a unui ochi în oglindă, dacă ochiul se găsește la o înălțime $h_1 = 5$ cm deasupra nivelului apei, iar oglinda se găsește la o distanță de 8 cm sub nivelul apei ?

C. d. P.

536. Se dă un dreptunghiu ABCD. Perpendiculara în A pe AC taie pe CD în E. Fie M și N două puncte respectiv pe laturile BC și AB astfel ca

$$CM = BN = \frac{DE}{2}.$$

Să se arate că triunghiul DMN este isoscel.

Petre Stanciu

537. Unghiul A al unui triunghiu ABC are 120°. Construim în exterior, triunghiurile echilaterale BCI, CAJ, ABK. Să se arate că

1°. Cercurile circumscrise triunghiurilor ABK, CAJ sunt tangente exterior.

2°. $\overline{AI} = \overline{AB} + \overline{AC}$.

N. N. Mihăileanu

538. Intr'un cerc de rază dată R, să se înscrie triunghiul ABC de arie maximă știind că A este dublul unghiului B. Discuție.

C. Ionescu-Țiu

539. Cu ajutorul unei prese hidraulice se ridică o greutate de 112,5 tone. Cu câți centimetri trebue să coboare pistonul mic la fiecare apăsare, cunoscând că motorul întrebuințat în acest scop are o putere de 5 cai putere, randamentul este de 0,75 și pistonul mic face 100 apăsări pe minut; iar raportul suprafețelor celor două pistoane ale presei este 0,01.

Sălan Nicolae

540. Să se calculeze densitatea oxigenului la 136°,5 Celsius și la presiunea de 15 atmosfere. Se dă $d_0 = 0{,}00143$ gr/cm^3.

Marius V. Iosifescu
elev, Pitești

541. Să se rezolve sistemul

$$\frac{x+y}{1-xy}+\frac{x-y}{1+xy}=\sqrt{3}$$

$$\frac{1}{1+x^2}-\frac{y^2}{1+y^2}=\frac{1}{2}.$$

Ilie N. Constantinescu

542. Un balon de 10 litri este plin cu oxigen la presiunea de 80 kgf/cm² și la temperatura de 7° C. Ce cantitate de căldură absoarbe gazul dacă este încălzit până la 15,5° C?

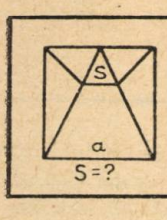
C. d. P.

543. Câte înfășurări de sârmă de nichelină trebuesc puse pe un cilindru de porcelan, cu diametrul de 1,5 cm, pentru ca să se construiască un fierbător, în care să fiarbă o massă de 120 g de apă în 10 minute, pornind dela temperatura inițială de 10° C; randamentul se ia 60%. Diametrul sârmei este de 0,2 mm. Tensiunea U = 100 V.

C. d. P.

544. O rază de lumină cade pe fața unei prisme, care are unghiul de refringență de 50° și iese cu o deviație minimă de 35°. Care va fi unghiul minim de deviație dacă se cufundă această prismă în apă?

C. d. P.



EXERCIȚII PROPUSE PENTRU INVĂȚĂMÂNTUL ELEMENTAR

E. 155. Inainte de reforma bănească din 28 Ianuarie 1952, un kilogram de zahăr tos costa cu 40 lei vechi mai mult decât un kilogram de macaroane. După reducerea de 20% la prețul pastelor făinoase și de 10% la acel al zahărului, un kilogrm de zahăr costă mai mult cu 2,60 lei bani noi.

Să se calculeze prețul actual al zahărului și al macaroanelor.

O. S.

E. 156. La un magazin de stat s'au vândut mere de două calități: cele de calitatea I-a cu prețul de 6 lei 75 bani kg, iar cele de calitatea doua cu 5 lei 50 bani kg, încasându-se în total 603 lei 50 bani.

Să se afle câte kg. de mare s'au vândut din fiecare calitate, știind că s'au vândut de două ori mai multe mere de calitatea II-a decât cele de calitatea I-a.

Maria Popescu

E. 157. In triunghiul ABC ducem înălțimile BB_1 și CC_1. Să se arate că triunghiul AB_1C_1 este asemenea cu triunghiul ABC.

Miron Oprea

E. 158. Un circuit format dintr'un element de 3,6 volți având rezistența exterioară de 1,05 ohmi; iar rezistența interioară a elementului de 0,25 ohmi. Se cere: intensitatea curentului ce trece prin circuit, precum și intensitatea curentului când se face un scurt circuit între bornele elementului.

Titus Paraschiv
elev, București

E. 159. Să se arate că dacă se adună un număr oarecare de trei cifre cu de cinci ori cifra sutelor, cu de patru ori cifra zecilor și cu de șase ori cifra unităților aceluiași număr, se obține un număr divizibil cu șapte.

Tamara Vasilescu
elevă, Craiova

E. 160. Să severifice că:

$$(ax + cz)(bcx - aby + cdz - atd) +$$
$$-(bx + dz)(acx - a^2y + c^2z - act) =$$
$$= a(bc - ad)(xt - yz).$$

N. M.

E. 161. Printr'un conductor cu lungimea de 20 dm și secțiune de 0,5 mm² se trece un curent de cinci amperi timp de un minut și se degajă o căldură de 6480 calorii. Se cere rezistivitatea aliajului din care este făcut conductorul.

C. Ionescu-Timuș

E. 162. Lungimea unui pendul care bate secunda fiind de 0,994 metri, să se afle lungimea unui pendul care întârzie cu 8 minute în 24 ore, precum și lungimea unui alt pendul care înaintează cu 6 minute în 24 ore. Verificare.

C. I. Ț.

E. 163. Să dă patratul ABCD cu latura a și se duce prin vârful C o dreaptă ce tae prelungirile laturilor AB și AD în P și Q. Să se demonstreze:

1. Că oricum s'ar roti dreapta PQ în jurul punctului C, produsul $\overline{BP} \times \overline{DQ}$ este constant;

2. In ce poziție, distanța vârfului A la dreapta PQ este egală cu suma distanțelor dela vârfurile B și D la aceiași dreaptă?

3. Ce modificări trebuesc aduse în cazul când dreapta PQ numai este exterioară patratului ci tae una din laturile sale?

G. D. S.

E. 164. Să se determine suprafaţa unui trapez isoscel ABCD, cunoscându-se laturile neparalele $\overline{AD} = \overline{BC} = 5$ dm, diagonalele $\overline{AC} = \overline{BD} = \sqrt{97}$, baza mare $\overline{DC} = 2$ dm.

Florea C. Constantin
elev, Câmpina

$x = 1 + \frac{1}{x}$

PAGINA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

S'au evidenţiat prin rezolvări de probleme din Revista Matematică şi Fizică, primite în cursul lunei Ianuarie 1952; *Iosifescu V. Marius* (clasa IX-a Piteşti), *Gheţia Eugen* (clasa X-a L. b. 5 Bucureşti), *Dudiţă I. Florea* (Oraşul Stalin), *Goia Ioan* (Oraşul Stalin), *Crăciunescu A. Jean* (Tg, Jiu), *Muedin Sureia* (Şcoala hidrotehnică Constanţa) *Grigorescu Ligia* (Piteşti), *Costea V. Aristide* (Rm. Vâlcea), *Amzulescu V. Ioan* (Târgovişte), *Mihăescu D. Alexandru* (Turnu Măgurele), *Stoilescu Şt. Florică* (clasa X-a Rm. Sărat), *Gioncu P. Victor* (Arad) şi *Goia L. Miron* (Arad).

* * *

In cursul lunii Ianuarie 1952 am primit soluţii bune la cel puţin 5 probleme sau probleme propuse (P), note (N), articole (A), dela următorii:

AIUD. Clasa VIII-a. Peteanu Vasile (264, 273, 278, 280, 289, 290, 299, 307, 321, 345, 364, 369, 370, 373, 374, 379, 383, P).

ALEXANDRIA. Clasa XI-a. Guja Nicolae (242, 291, 297, 300, 303, 306, 317, 325, 333, 336, 350, 353, 364, 371, 374, 386, 389, 436, 439, 443, 446, 488), Guja V. Petre (292, 335, 351, 369, 392, 404, 427, 460, 465, 468), Nicolae Mircea (243, 245, 251, 253, 257, 262, 263, 268, 269, 270, 272, 276, 277, 278, 280, 335, 339, 340, 484, 488).

ARAD. Clasa XI-a. Gioncu Victor (257, 293, 351, 363, 372, 387, 406, 411, 418, 429, 431, 439, 441, 444, 450, 454, 459, 475, 480, 481, 483, 484, 487, 489, 491, 495, 498, 499, P), Goia L. Miron (372, 375, 378, 379, 382, 383, 386, 388, 392, 404, 406, 407, 415, 429, 432, 433, 436, 437, 441, 443, 444, 445, 448, 456, 457, 459, 466).

BACĂU. Clasa X-a. Cozma Mihai (429, 432, 437, 439, 440, 443, 449, 459, 466, 468), Clasa XI-a. Şenchea Elena (474, 475, 476, 483, 484, 486, 487, P), Zisman Iosif 484, 490, E: 142, 144, 145, 147, 148).

BAIA MARE. Clasa XI-a. Cadar Ioan (241, 264, 257, 290, 329, 341, 348, 354, 362, 367, 432, 439, E: 122), Cigan Leontin (317, 322, 326, 335, 336, 339, 346, 386, 387, 388, 392, 4ş4, 406, 416, 426, 432, 436, 439, 440, 456, 466).

BISTRIŢA. (Rodna). Clasa X-a. Verveagă Teodor 469, 471, 472, 480, 481, 484, 485, 488, 489).

BRĂILA. Clasa XI-a. Iordache Mitică (303, 349, 354, 364, 367, 369, 372, 375, 379, 389).

BUCUREŞTI. Liceul *Nr. 1 fete*. Clasa XI-a. Buzenchi Josette (448, 449, 459, 475, E: 148); *Liceul 2 băieţi*. Clasa XI-a: Saachian Arpiar (257, 278, 295, 297, 299, 322, 336, 346, 388, 404, 468), *Liceul 3 băieţi*. Paraschiv V. Titus (307, 351, 484, E: 67, 76, 79, 86, 105, 113, 114, 116, 122, 124, 128, 137, 142, 148), *Liceul 4 băieţi*. Polinu Barbu (369, 374, 375, 389, 407, 416, 440, 448, 474, 488), *Şcoala elementară Nr. 4 băieţi*. Clasa VI-a. Schileru I. Dinu (E: 135, 136, 137, 138, 139, P), *Liceul 5 băieţi*. Clasa VIII-a. Datcu Panait (E: 51, 53, 67, 70, 74, 76, 83, 115, 119, 124, 135, 137), Clasa X-a. Gheţia I. Eugen (245, 246, 269, 270, 271, 276, 279, 288, 290, 298, 299, 300, 303, 312, 313, 316, 317, 322, 324, 349, 363, 369, 375, 386, 389, 392, 404, 407, 429, 431, 432, 437, 441, 445, 456, 461, 466, 480, 481, 488, 495, 499), *Liceul 8 băieţi* Clasa IX-a Grosu M. (428, 438, 439, 443, 445), *Liceul 9 băieţi*. Clasa XI-a. Petrache M. Ilie (242, 243, 245, 253, 325, 369, 404), *Liceul 10 băieţi*. Clasa X C. Şincan Gorneliu (234, 270, 376, 458, 466, 468, 485, E: 152), Clasa XI-a Albinescu Victor (242, 259, 269, 270, 271, 217, 351, 392, 432), Antonie Mugur (259, 269, 295, 306, 351, 499), Artănescu Ioan (242, 259, 263, 269, 270, 271, 295, 305, 306, 321, 371, 392, 432), Barabancea M. (244, 257, 299, 348, 406), Bucur Constantin (242, 245, 257, 313, 364, 392, 443, 499, E: 138), Celan Boris (242, 305, 313, 371, 404), Celan Pompiliu (300, 313, 375, 404, 432), Freud Gheorghe (313, 351, 432, 433, 461), Popovici Dinu (270, 316, 351, 392, 432, 461, 466), Vasiliu Dumitru (257, 299, 348, 363, 406).

Şcoala tehnică cadastrală. Anul III. Rozenberg Aureliu (456, 466, 468, 471, 480), Vierăşcu Filip (456, 466, 468, 471, 480).

Studenţi Bucureşti. Paraschiv Cornel (307, 312, 317, 324, 351, E: 76, 142, 147, 148).

BUZĂU. Clasa IX-a. Badea N. Alexandru (303, 306, 375, 386, 404, 416), Negulescu Paul (290, 307, 369, 434, 443), Stoicescu T. Dumitru (263, 291, 292, 306, 307, 335, 337, 346, 351, 363, 369, 458, 468, 482).

CĂLĂRAŞI. Clasa XI-a. Zainea Bucur (375, 386, 388, 404, 426, 432, 439, 468, 481), Marinache Gheorghe (375, 383, 388, 415, 426, 430, 432, 439, 454, 481, 484, 486).

CÂMPINA. (Prahova). Şcoala medie tehnică de utilaj petrolifer. Florea C. Constantin (279, 313, 320, 326, 387, 456, P).

CÂMPULUNG (Suceava). Bulinschi V. Gheorghe (386, 388, 389, 448, 456, 466, P).

CARACAL. Olteanu I. Mihai (263, 268, 294, 299, 432, 448, 483, 484, 485, 488, P).

CARANSEBEŞ (Severin). Ciric Ioan (E: 134, 136, 142, 147, 148, 149).

CAREI. Clasa XI B. Cigan Leontin (231, 236, 241, 242, 243, 245, 246, 257, 289, 290, 291, 292, 295, 297, 300, 306, 307, 311, 312, 313, 314), Șabău Gheorghe (264, 270, 307, 346, 388).

CONSTANȚA. Clasa IX-a. Bumbac Paul (312, 329, 362, 377, 379, 449, E: 122, 126, P), Școala hidrotehnică. Anul II. Satrapel Tașcu (245, 292, 300, 305, 306, 345, 346, 347, 455, 456, 461, 476, 480, 482, 488, 497, 499), Anul III. Miron Ilie (383, 386, 391, 404, 426, 434, 435, 442, 447, 484, P), Muedin Sureia (236, 242, 245, 257, 261, 294, 305, 332, 337, 349, 363, 377, 383, 387, 392, 394, 413, 454, 455, 460, 464, 476, 477, 480, 481, 482, 483, 484, 485, 486, 488, 491, 499, P).

CRAIOVA. Dobre D. Gheorghe (260, 351, 363, 379, 387, 392), Tutunaru Gh. Gheorghe (335, 386, 387, 401, 404).

CURTEA DE ARGEȘ. Boncea Vasile (375, 386, 427 441, 443, 448).

DEVA. Martini I. (242, 243, 257, 259, 263, 269, 270, 277, 278, 297, 300, 303, 306, 307, 308, 313, 317, 354, 358, 371, 374, 392, 460, 468, E: 142, 143, 145, 147).

FĂGĂRAȘ. Clasa X-a. Câlțea Cornel (243, 257, 266, 292, 307, 403, 404, 439, 461, 468), Malene Emil (269, 279, 317, 325, 332, 335, 343, 345, 386, 401, 403, 432, 441, 473, 474), Trifu Romulus (242, 269, 270, 401, 403, 408, 422, 439, 461, 468).

FOCȘANI. Clasa X-a. Istrate Mircea (325, 335, 354, 389, 390, 401, 406, 422, 427, 443, 448, 455).

GALAȚI. Tihan D. Alexandru (383, 386, 407, 419, 426, 427, 429, 430, 433, 434, 437, 439, 440, 441, 442, 445).

IAȘI. Școala elementară 7 băieți. Clasa VI-a. Giurgea Marcel (E: 62, 76, 91, 107, 108, 134, 135, 136, 139, 140, 142), *Școala pedagogică de băieți*. Anul II. Curcă I. Gheorge (E: 99, 109, 132, 136, 137, 138, 139), Cogean Iulian (E: 109, 132, 136, 137, 139), Despinescu Traian (E: 109, 114, 132, 137, 138), Ojog Petre (E: 109, 132, 137, 138, 139), Ioniță A. Ioan (283, 384, 374, 386, 445, 448, E: 50, 60, 64, 107, 108, 109, 113, 114, 122, 124, 125, 126, 132, 134, 135, 136, 138, 139), Lipșa Ioan (E: 47, 50, 60, 62, 64), Sava Alfons (422, 448, E: 132, 136, 137, 138), Stoian V. Ioan (253, 259, 263, 264, 278, 298, 299), Talabă L. Constantin (253, 255, 259, 263, 264, 269, 278, 280, 290, 297, 299, 306, 307, 308, 364, 383, 386, 389, 443, 444, 445, 454), Vătavu Gh. (354, E: 108, 109, 114, 124, 131, 139, 135), Anul III: Cojocaru Constantin (E: 70, 109, 124, 131, 132, 135, 136, 137, 139), Oprișanu Stelian (448, E: 70, 137, 138, 139), Chelaru Ioan (109, 114, 125, 132, 137), Baltaru Gheorghe (248, 263, 268, 274, 280, 283, 290, 307, 308), Diaconu Eugen (E: 109, 114, 125, 131, 137, 139), Druică Th. (E: 109, 113, 114, 137, 138, 139), Ionel Ion (E: 109, 114, 124, 125, 136, 137, 139), Liciu Liviu (114, 136, 137, 138, 139).

LUGOJ. Nicola Petru (369, 375, 377, 443, 445, 466,. Clasa XI-a. Nahaiciuc T. Mihai (307, 461, 476, 495, E: 60, 72, 83, 99, 100, 107, 108 113,, 119, 124, 137, 147).

MEDIAȘ. Clasa XI-a. Cândea Ion (257, 269, 291, 292, 295, 335, 426, 427, 276),

MIZIL. Negulescu Paul (353, 363, 437, 438, 481, 484).

MORENI. *Școala medie tehnică Petrol*. Anul III. Ionescu Ariton (236, 242, 243, 257, 278, 298, 426).

ORADEA. Pantea Alexandru (454, 455, 461, 468, 469, 488), P), Poenaru Dorin (245, 279, 358, 371, 392, 416, 439, 454, 461, 466, 468, 484).

ORAȘUL STALIN. Clasa IX-a .Mailath Gh. (434, 443, E: 99, 140, 132, 137, 145, 147, 148, 149, 154), Negulici Sabina (242, 307, 312, 367, 371). Clasa XI-a. Coandă Viorel (270, 325, 350, 364, 369, 375, 404, 407, 410, 429, 437, 484), Doca Ioan (238, 243, 263, 277, 353, 354, 374), Crăciun Ioan (290, 306, 308, 354, 369, 406), Dudiță I. Florea (236, 251, 260, 266, 279, 285, 301, 308, 311, 312, 321, 343, 363, 365, 377, 383, 401, 403, 405, 407, 408, 413, 419, 422, 427, 429, 446, 455, 473, 474, 476, 477, 481, 482, 487, 488, P), Goia D. Aurel (290, 205, 306, 307, 308, 358, 369, 371, 374, 466), Goia Ioan (231, 259, 406, 263, 269, 270, 273, 274, 278, 290, 307, 313, 317, 343, 351, 354, 358, 363, 364, 369, 371, 374, 386, 389, 392, 403, 407, 404, 416, 432, 439, 441, 443, 448, 466, 468, P), Nagaescu Emil (269, 290, 307, 317, 351,) Pascu I. Ioan (317, 323, 353, 354, 364, 369, 371, 374, 386, 389, 404, 416, 432, 443, 448), Stanciu Dorin (251, 263, 277, 311, 325, 343, 348, 364, 369, 371, 379, 403). *Studenți*. Anul I. Klausner Robert (290, 305, 306, 348, 354, 358, 369, 371).

PITEȘTI. Clasa IX-a. Iosifescu V. Marius (263, 270, 280, 307, 316, 341, 342, 349, 423, 424, 425, 426, 427, 428, 429, 430, 431, 432, 433, 434, 435, 436, 437, 438, 439, 440, 441, 442, 443, 444, 445, 446, 448, 449, 453, 454, 456, 457, 458, 459, 460, 461, 462, 463, 464, 465, 466, 467, 468, P). Clasa XI-a. Grigorescu Ligia (245, 246, 260, 271, 279, 280, 297, 298, 299, 300, 306, 324, 326, 329, 348, 358, 363, 364, 392, 407, 457, 459, 464, 466, 468, 479, 484, 499), *Școala medie tehnică* Anul II E. Marcus M. Const. (244, 269, 276, 290, 307), Rădulescu G. Ștefan (242, 269, 270, 290, 299, 307).

PLOEȘTI. Clasa IX-a. Dogaru T. Mihai (241, 245, 246, 248, 271, 276, 277), Făgăraș Constantin (259, 264, 290, 324, 328, 351, 367, 269, 286, 289, 390, 458), Mihai Iulian (259, 367, 369, 386, E: 53, 70, 99, 137, 138, 147, 148, 149), Pită I. Constantin (259, 268, 269, 278, 279, 324, 363, 375 337, 386, 389, 390, 392, 404, 475), Popescu I. Dumitru (249, 260, 263, 273, 290, 298, 307, E: 66, 67, 68, 69, 70), Popescu Șt. Doru (243, 249, 257, 290, 299, 306, 307, 323, 353, 374, 375, 386, 388, 389, 390, 410, 453, 456, 475, 482, 484), Pușcașu I. Alexandru (241, 242, 245, 255, 297, 299, 301, 369, 434, 435, 443), Silion Dinu (279, 290, 307, 325, 369, 375, 386, 390,) Clasa XI-a. Costache Nicolae (386, 390, 392, 404, 416, 432, 440, 460, 465), Gudumac Mircea (246, 249, 303, 316, 325, 348, 349, 386, 392, 404, 410, 432, 440, 465, 466, 480), Mihalcea S. Constantin (317, 367, 375, 390, 392, 416, 443, 466).

RÂMNICUL-SĂRAT. Clasa IX-a. Stoilescu Șt. Florică (257, 263, 269, 270, 289, 297, 299, 303, 307, 321, 328, 358, 363, 367, 375, 383, 386, 388, 392, 426, 429, 443, 454, 458, 459, 468, 484).

RÂMNICUL-VÂLCEA. Costea M. Aristide (242, 257, 264, 266, 269, 270, 271, 274, 279, 280, 289, 290, 291, 292, 294, 297, 299, 303, 306, 307, 322, 331, 333, 335, 347, 348, 350, 351, 358, 369, P).

ROMAN. Clasa XI-a. Moisini Ioan (270, 279, 296, 349, 351, 375, 389, 410, 441, 443, 465, 472, 484, 499).

SLATINA. Clasa XI-a. Iovescu I. Marin (404, 416, 437, 443, 445, 448, 449), Preda D. Iulian (354, 368, 369, 387, 388, 389, 404, 415, 443, 448, 474, 481), Voiculescu Paul (401, 416, 441, 444, 484, 488, 499, E: 121, 122, P).

SIBIU. Clasa XI-a. Tomescu Margareta (363, 367, 383, 390, 393, 415, 416, 426, 440, 443, 456, 457, 458, 463, 466).

TÂRGOVIȘTE. Clasa X-a. Bălescu Gr. Eftimie (273, 280, 375, 400, 429, 457, 463, 487, 489), Dobrescu Andrei (264, 258, 289), 292, 308, 335, 340, 351, 352, 359, 371, 376, 380), Oprea A. Nicolae (287, 290, 291, 303, 347, 359, 363, 366,

401, 414, 427, 440, 474, E: 123, 129, 135, 136, 137, 138). Clasa XI-a. Amzulescu V. Ioan (242, 246, 259, 260, 263, 270, 273, 287, 290, 307, 317, 323, 325, 351, 352, 354, 358, 368, 375, 379, 386, 389, 404, 429, 432, 441, 443, 448).

TÂRGU-JIU. Clasa VIII-a. Clonda Ovidiu (E: 78, 86, 97, 102, 105, 109, 114), Cosinschi Dragoș (E: 137, 138, 142, 147, 148), Clasa XI-a. Crăciunescu A. Jean (245, 257, 269, 270, 271, 276, 290, 297, 298, 300, 306, 307, 313, 316, 317, 323, 325, 349, 354, 358, 367, 368, 369, 371, 375, 385, 389, 390, 392, 404, 430, 432, 443, 446, 448, 480, P).

TIMIȘOARA. Clasa V-a. Dugăeșescu I. Mariana (66, 67, 91, 104, 115, 116, 124, 125, 135, 136), *Școala medie hidraulică*. Anul III-lea. Pagany Andrei (317, 332, 335, 441, 456, E: 106, 109, 120).

TULCEA. Toma Temistocle (291, 292, 295, 369, 401, 427, 476, 486, 487).

TURDA. Vancu Florin (241, 242, 256, 257, 266, 282, 289, 290, 297, 474, 476).

TURNU-MĂGURELE. Mihăescu D. Alexandru (294, 299, 313, 320, 323, 324, 326, 345, 346, 363, 380, 389, 407, 408, 426, 446, 447, 447, 448, 454, 455, 459, 476, 481, 482, 488, 496, 499).

TURNUL SEVERIN. Clasa XI-a. Georgescu Georgeta (449, 454, 457, 458, 459).

VASLUI. Clasa X-a. Alexandrescu Doru (358, 368, 369, 371, 372, 448, 466, E: 99, 137, 138), Clasa XI-a. Apostu Mira (358, 374, 448, 461, 466, 471, 476, 480), Ardeleanu Eduard (278, 317, 320, 354, 358, 368, 448, 466), Didilescu Sergiu (270, 278, 313, 321, 323, 328, 333, 372), Tămășescu Iulian (317, 358, 367, 369, 371, 386, 389, 457, 466, 479, 481, E: 138, 147, 148, 149).

Redactarea problemelor Pe aceiași foaie de formatul caietului obișnuit, se va rezolva câte o singură problemă. Soluția să fie însoțită de numărul și enunțul problemei. Se poate scrie în continuare și pe contra pagină; iar dacă soluția necesită figură, se va desena cu îngrijire și se va anexa. Nu se vor trimite soluțiile mai multor probleme pe aceiași foaie.

Rezolvitorul va scrie, pe fiecare soluție, numele școala clasa și localitatea.

Se mai primesc soluții și la problemele propuse în anul 1951 și nerezolvate încă în paginile revistei (vezi tabla de materii IV. 6 din Nr. 12, anul II).

Problemele ce se propun de către colaboratori ai revistei să fie clar compuse și însoțite de soluții.

REVISTA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

ORGAN AL SOCIETĂŢII DE ŞTIINŢE MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R.

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

APARE SUB ÎNGRIJIREA UNUI SECRETARIAT DE REDACŢIE

REDACŢIA: B-DUL 6 MARTIE, 63 — BUCUREŞTI
RAIONUL LENIN

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică şi fizică a şcolilor, precum şi orice material informativ care ar interesa redacţia noastră se vor trimite pe adresa de mai sus

ABONAMENTE:

Tarif general ... ... Lei 60

Tarif redus pentru elevi, studenţi şi profesori ... ... Lei 10

Abonamentele se fac numai prin:

Centrul de Difuzare a Presei

Pentru Bucureşti: Str. Const. Mille Nr. 14 — Telef. 5.28.90

Pentru Provincie: Centrul de Difuzare a Presei din Capitalele Regiunilor sau Raioanelor — Banca de Stat în Contul C.D.P. Nr. 038.068

CĂRȚI APĂRUTE ÎN

EDITURA TEHNICĂ

LEXICONUL TEHNIC ROMÂN:

Vol. I (A—C)	952 pagini
Vol. II (D—H)	986 pagini
Vol. III (I—M)	1115 pagini

I. Creangă, Gh. Gheorghiev, A. Haimovici, N. Haimovici, O. Mayer, I. Popa și M. Roth:

«CURS DE GEOMETRIE ANALITICĂ»
(traducere din limba rusă)

706 pagini, 40 lei

I. I. Privalov, S. A. Galpern:

«BAZELE ANALIZEI INFINITEZIMALE»
(traducere din limba rusă)

240 pagini, 10,07 lei

D. Papalexi:

«CURS DE FIZICĂ»
(traducere din limba rusă)

536 pagini, 27,84 lei

N. N. Buchholz, I. M. Voronkov, A. Manokov:

«CULEGERE DE PROBLEME DE MECANICĂ RAȚIONALĂ»
(traducere din limba rusă) (epuizat)

340 pagini, 12,07 lei

I. G. Petrovschi:

«SECȚII DE TEORIA ECUAȚIILOR INTEGRALE»
(traducere din limba rusă)

120 pagini, 4,25 lei

C. 196. — CENTRUL POLIGRAFIC Nr. 2. FILIALA 3.

Taxa poștală plătită în numerar conform aprobării Nr. 168.026.946

Lei 1.—

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE ȘI FIZICE DIN R.P.R.

162 F/1426

ELLENŐRIZVE 1958 KAT

INSTITUTUL de DOCUMENTARE TEHNICĂ
BUCUREȘTI
Str. Gabriel Peri, 3 - Bdul Stalin

REVISTA MATEMATICĂ și FIZICĂ

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

ORSZÁGOS ★ MŰSZAKI ★ KÖNYVTÁR

La baza concepției regimului de democrație populară asupra învățământului, asupra educației tineretului, stă nu cultul morții, ci cultul vieții, cultul muncii creatoare, cultul luptei dârze pentru fericirea poporului.

Gh. Gheorghiu-Dej

★

APRILIE

1952 4

EDITURA TEHNICĂ

REVISTA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

SUMARUL:

		Pag.
1.	*Răspunsul tovarăşului Stalin la întrebările puse de un grup de redactori ai unor ziare americane* ...	73
2.	*Din cuvântarea tovarăşului Gh. Gheorghiu-Dej la Congresul Învăţătorilor*	74
3.	*Nomografie de A. Şaichin*	75
4.	*Electronul de prof. Al. Nedelcu*...	85
5.	*Probleme rezolvate (216, 234, 246, 280, 299)*	93
6.	*Exerciţii şi probleme propuse*	95
7.	*Noutăţi din ştiinţa şi tehnica sovietică*	97
8.	*Pagina rezolvitorilor de probleme*	99

ANUL III 4 APRILIE 1952

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR
4822
INSTITUTUL de DOCUMENTARE TEHNICĂ
BUCUREȘTI
Str. Gabriel Peri, 3 - Raion Stalin
ELLENŐRIZVE
1953

RĂSPUNSUL TOVARĂȘULUI STALIN

LA INTREBĂRILE PUSE DE UN GRUP DE REDACTORI AI UNOR ZIARE AMERICANE

Moscova, Agenția TASS trasmite:

Un grup de redactori ai unor ziare americane de provincie au adresat tovarășului Stalin, în numele a 50 de redactori ai acestor ziare, patru întrebări, la care tovarășul Stalin a dat următoarele răspunsuri:

Intrebare: Este oare un al treilea război mondial mai aproape în prezent, decât acum doi sau trei ani?

Răspuns: Nu, nu este.

Intrebare: Ar aduce folos o întâlnire între conducătorii marilor puteri?

Răspuns: Este posibil că ar aduce folos.

Intrebare: Considerați că momentul actual este potrivit pentru unificarea Germaniei?

Răspuns: Da, consider.

Intrebare: Pe ce bază este posibilă coexistența capitalismului și comunismului?

Răspuns: Coexistența pașnică a capitalismului și comunismului este pe deplin posibilă atunci când există de ambele părți dorința de a colabora, când există voința de a-și îndeplini obligațiile asumate, când se respectă principiul egalității și neamestecului în treburile interne ale altor state.

DIN CUVÂNTAREA TOVARĂȘULUI GH. GHEORGHIU-DEJ LA CONGRESUL ÎNVĂȚĂTORILOR DIN R.P.R.

„Statul de democrație populară i-a încredințat învățătorului o misiune înălțătoare, aceea de a forma pe noul cetățean al țării noastre, ziditor al socialismului, de a făuri cadrele noi, necesare construcției socialiste, capabile să aplice în viață știința și tehnica nouă. Învățătorul are frumoasa și nobila misiune de a lupta pentru stârpirea obscurantismului și înapoierii culturale, de a duce în massele cele mai largi făclia culturii și științei înaintate. Învățătorimea are misiunea patriotică de a crește din tinerii noștri, oameni devotați cu trup și suflet poporului muncitor, Patriei noastre, Republica Populară Română, oameni devotați cauzei păcii, educați în spiritul frăției între popoare, al dragostei nețărmuite pentru eliberatoarea și prietena noastră, Uniunea Sovietică, pentru învățătorul oamenilor muncii din întreaga lume, genialul corifeu al științei și culturii, tovarășul Stalin.“

* * *

„In lucrările sale, marele Stalin ne avertizează împotriva „diletanților și atotștiutorilor“ și ne învață că societății socialiste îi trebue oameni culți, având cunoștințe științifice solide, capabili să devină buni specialiști, oameni folositori societății în orice domeniu vor lucra.

Elevii pe care-i creșteți astăzi în școală vor fi mâine stahanoviști, tehnicieni, pedagogi, savanți. Școala este izvorul principal de cadre pentru construirea socialismului. De aceea, este necesar ca școala noastră să predea elevilor cunoștințe științifice în legătură indisolubilă cu practica, cu activitatea în producție.“

* * *

„Tineretul nostru trebue învățat să cunoască și să iubească minunatele frumuseți și bogății ale țării noastre. Pământul Patriei noastre ne oferă tot ceeace trebue pentru a face viața omului bogată și fericită. Avem câmpii mănoase, al căror rod poate fi înzecit. In măruntaiele pământului nostru se găsesc: petrol, fier, cărbune și alte comori încă necercetate. Avem căderi de apă, a căror putere, încă neîmblânzită, poate pune în mișcare sute de uzine pe întreg întinsul țării. Să înarmăm pe tinerii fii ai Patriei noastre cu puterea științei, să aprindem în sufletul fiecărui tânăr mândria de stăpân al acestor bogății nesecate și râvna de a le pune în slujba poporului, pentru binele omului, pentru înflorirea Patriei noastre.“

* * *

„Școala trebue să cultive sentimentul de prietenie și colaborare frățească cu marele popor sovietic, dragostea față de glorioasa Uniune Sovietică, care ne-a eliberat și ne ajută să ne clădim Patria noastră socialistă, față de cel mai bun prieten al poporului nostru, tovarășul Stalin.“

* * *

„Cunoașterea temeinică a științei marxiste-leniniste, a adevărului științific despre natură, viață, societate, este necesară pentru aprofundarea oricărei ramuri a științei — fizica, chimia, matematica, fără să mai vorbim de istorie, limbă, literatură. Materialismul dialectic este călăuza sigură a omului de știință. Numai această concepție permite studierea lucrurilor și fenomenelor în mișcarea, desvoltarea și transformarea lor și nu o prezentare scolastică, înțepenită, a acestora. In știință se desfășoară o luptă ascuțită între materialism și idealism, lupta împotriva concepțiilor idealiste, pentru triumful materialismului. Aceasta este însăși lupta pentru progresul științei. De aceea sarcina combaterii vederilor reacționare, idealiste, în diferite ramuri ale științei trebue să preocupe în cel mai înalt grad pe profesorii și învățătorii noștri de diferite specialități.

REVISTA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

PUBLICAŢIE PENTRU TINERET A SOCIETĂŢII DE MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ DIN R. P. R.

Anul III, Nr. 4 **Aprilie 1952**

NOMOGRAFIE

de A. Şaichin

Tehnica actuală este însoţită în teoria şi în practica ei de un mare număr de calcule. Cu cât cunoştinţele asupra tehnicii devin mai precise, cu atât calculele necesare devin mai numeroase. De aceea, din necesitatea de a contribui la mărirea productivităţii muncii, au fost create diferite mijloace ajutătoare de calcul.

Astfel au apărut într'un trecut mai îndepărtat logaritmii, din nevoia astronomilor de a întocmi tabele, necesare pentru navigaţia de pe întinsul mărilor.

In timpurile noastre au apărut tabele speciale, calculul grafic, riglele de calcul, precum şi felurite maşini de calculat.

Calculul grafic conţine totalitatea procedeelor care permit înlocuirea calculului propriu zis prin efectuarea de construcţii grafice. Măsurând anumite segmente rezultate din construcţii, obţinem valoarea mărimii căutate.

Unul dintre cele mai moderne mijloace de calcul grafic îl constitue *nomografia.*

Nomografia este acea parte a calculului grafic, care se serveşte în rezolvarea problemelor de diagrame desenate odată pentru totdeauna, şi care pot fi folosite de nenumărate ori.

Există numeroase tipuri de nomograme. In articolul de faţă ne propunem să familiarizăm cititorul cu cel mai simplu tip de nomogramă: nomograma cu puncte aliniate şi cu scări rectilinii.

Cititorii care doresc să adâncească studiul vor putea cerceta cartea sovietică « Nomografia » de M. V. Pentkovski, apărută de curând.

Nomografia a luat un deosebit avânt în Uniunea Sovietică, unde, după cum spune Pentkovski în prefaţa cărţii sale « . . . ea eliberează zeci de mii de muncitori calificaţi dela munca obositoare şi monotonă de calculator, face accesibile maselor largi metodele legate de folosirea calculelor numerice, eliberează pentru economia naţională noi rezerve umane, economiseşte milioane de ruble, accelerează proiectarea şi construcţia ».

In ţara noastră, nomografia era foarte puţin cunoscută înainte de reforma învăţământului. Deabea când sub influenţa programelor de învăţământ sovietice s'a introdus nomografia în învăţământul superior, ea a început să fie cunoscută de masse mai largi de oameni.

După metodele sovietice s'a tipărit şi la noi un album de nomograme « Nomograme Termotehnice » de către Editura Tehnică.

* * *

1°. Să considerăm (fig. 1) un segment AB; fie C mijlocul lui. Ridicăm în A, B, C trei drepte perpendiculare de AB: Ax, By, Cz.

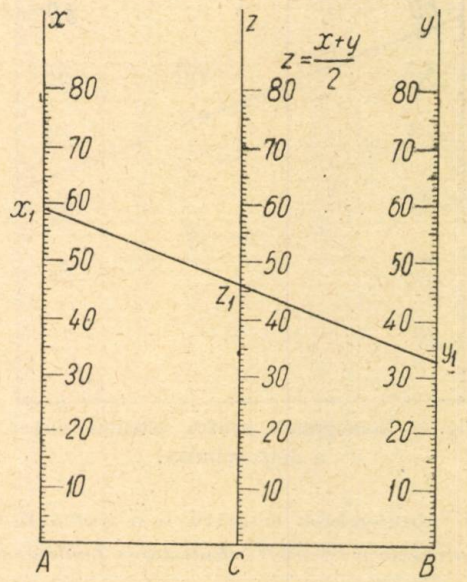


Fig. 1. Nomogramă pentru calculul mediei aritmetice.

Gradăm aceste drepte în milimetri, [1]) după cum se vede în figură; luăm acum pe dreapta Ax punctul x corespunzător unei diviziuni oarecare, de exemplu $x_1 = 59$, iar pe dreapta By, un alt punct, $y_1 = 33$ şi le unim. Dreapta obţinută intersectează Cz într'un punct $z_1 = 46$. Ce este această valoare?

Este lesne de dovedit (cu ajutorul unor triunghiuri egale) că această valoare e tocmai media aritmetică a lui x_1 şi y_1:

$$\frac{x_1 + y_1}{2} = \frac{59 + 33}{2} = 46 = z_1.$$

[1]) Nomogramele din figurile 4, 5 şi 9 au apărut în mărime naturală, celelalte sunt micşorate. Cititorii sunt rugaţi să refacă figurile.

Aşadar figura noastră poate servi pentru a găsi pe cale grafică media aritmetică a 2 numere.

O astfel de figură se numeşte *nomogramă.*

Figura noastră este deci o *nomogramă pentru calculul mediei aritmetice.*

2°. In practică, linia x_1y_1 nu se trage cu creionul ci doar se aşează marginea unei rigle, aşa fel încât să treacă prin x_1 şi y_1, şi se citeşte valoarea lui z_1; în acest mod, nomograma se poate folosi de nenumărate ori.

3°. Intrucât în nomograma noastră citirile se fac cu ajutorul a trei puncte în linie dreaptă, nomograma se numeşte *nomogramă cu puncte aliniate*; şi fiindcă cele trei scări sunt la distanţe egale, se numeşte *nomogramă cu scări echidistante.*

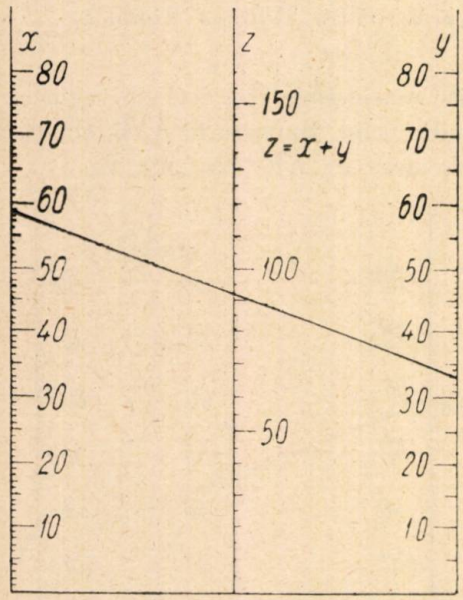


Fig. 2. Nomograma pentru calculul sumei a două numere.

Aşadar nomograma noastră e o *nomogramă cu puncte aliniate şi cu scări echidistante pentru calculul mediei aritmetice.*

4°. Ne punem acum întrebarea: cum se poate construi o nomogramă, nu pentru calculul mediei aritmetice, ci pentru calculul sumei a două numere?

Pentru aceasta trebue ca, punând rigla în dreptul lui $x_1=59$ şi $y_1=33$, să obţinem pe axa Cz, nu valoarea 46, ci valoarea dublă,

$$92 = x_1 + y_1 = 59 + 33.$$

Pentru aceasta e suficient să dublăm valoarea gradaţiilor pe scara Cz, adică, acolo unde era scris 10, să scriem 20, în loc de 40, să scriem 80, etc.

In acest fel obţinem fig. 2, cu ajutorul căreia putem găsi pe cale grafică suma a două numere.

5°. Vedem în acest caz că pe scara z, diviziunile sunt neegale cu cele de pe celelalte două scări. In general, cu ajutorul diviziunilor inegale, se pot obţine nomograme cu scări echidistante pentru diferite formule, după cum vom arăta mai jos.

6°. Ne punem întrebarea când se poate construi o nomogramă cu scări echidistante? Oridecâteori avem trei variabile, x, y, z, între care avem o relaţie care se poate pune sub forma

$$Z = \frac{X+Y}{2},$$

în care Z e o expresie ce conţine numai pe z, X o expresie ce conţine numai pe x, iar Y o expresie ce conţine numai pe y, vom putea construi o nomogramă cu scări echidistante.

Această construcţie se bazează pe următoarea teoremă:

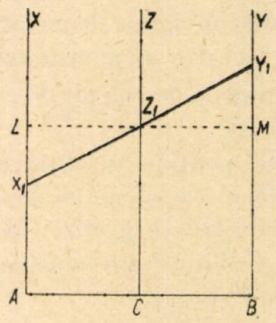


Fig. 3.

Dacă avem trei drepte paralele, AX, BY, CZ astfel ca CZ să fie la egală distanţă de AX şi BY şi dacă ducem o dreaptă oarecare, care taie precedentele în X_1, Y_1, Z_1, atunci, notând cu X, Y, Z distanţele AX_1, BY_1, CZ_1, avem

$$Z = \frac{X+Y}{2}$$

Demonstraţie.

Ducem prin Z_1 paralela la AB; ea taie AX şi BY în L şi M.

Din triunghiurile egale Z_1LX_1 şi Z_1MY_1 avem $X_1L = MY_1$

Dar $X_1L = AL - AX_1 = CZ_1 - AX_1 = Z - X$

$MY_1 = BY_1 - BM = BY_1 - CZ_1 = Y - Z$

Deci

$$Z - X = Y - Z$$

$$2Z = X + Y \qquad Z = \frac{X+Y}{2} \qquad (A)$$

7°. Să repetăm construcţia pentru formula $z = x + y$.

Căutăm mai întâi să punem relaţia sub forma $Z = \frac{X+Y}{2}$. Impărţind relaţia dată $z = x + y$ cu 2, obţinem

$$\frac{z}{2} = \frac{x+y}{2}$$

comparând, vedem că vom avea $Z = \frac{z}{2}$, $X = x$ $Y = y$.

Scara lui x şi y nu prezintă nici o dificultate; pentru a grada scara lui z, alcătuim tabloul:

z	0	50	100	150
Z	0	25	50	75

Intrucât pe nomogramă luăm segmente egale cu Z, şi pentrucă ne interesează valorile lui z, vom proceda astfel:

Vom lua pe axa din mijloc un segment egal cu 25 mm, (adică valoarea lui Z) şi vom scrie în dreptul lui numărul 50 (adică valoarea lui z).

Vom lua pe axa din mijloc un segment egal cu 50 mm (adică valoarea lui Z) şi vom scrie în dreptul lui 100 (adică valoarea lui z), şi aşa mai departe.

Diviziunile intermediare se obţin divizând segmentele în părţi egale, întrucât scara are diviziunile egale. Aceasta e posibil pentrucă Z variază proporţional cu z. In alte cazuri, după cum vom vedea mai jos, acest lucru nu mai are loc, iar diviziunile intermediare urmează a fi găsite tot prin calcul.

8°. Să construim acum o nomogramă cu scări echidistante pentru formula

$$z = \frac{5x+2y}{15}.$$

Pentru aceasta trebuie mai întâi să punem relaţia sub forma

$$Z = \frac{X+Y}{2}$$

In acest scop înmulţim ambii membri ai relaţiei date cu 15 şi împărţim la 2:

$$\frac{15\,z}{2} = \frac{5x+2y}{2}$$

Putem lua: $Z = \frac{15\,z}{2}$, $X = 5x$, $Y = 2y$.

Pentru gradarea scărilor lui x, y, z alcătuim tablourile de valori:

x	0	2	4	6	8	10	12	14
X	0	10	20	30	40	50	60	70

y	0	10	20	30	40
Y	0	20	40	60	80

z	0	1	2	3	4	5	10
Z	0	7,5	15	22,5	30	37.5	75

Luând pe axe segmente egale cu X, Y, Z, dar scriind în dreptul lor valorile lui x, y, z, obţinem nomograma căutată (Fig. 4).

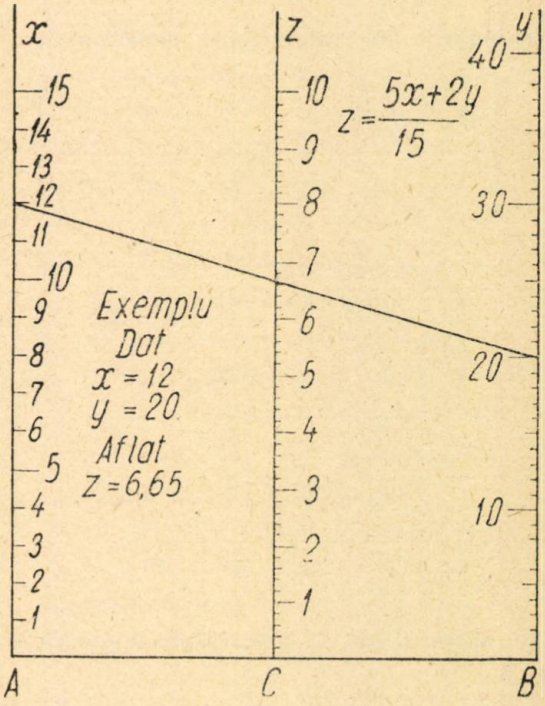


Fig. 4 Nomogramă pentru calculul expresiei $z = \frac{5x+2y}{15}$

Diviziunile intermediare se obţin prin împărţirea segmentelor în părţi egale. Luând $x=12$ $y=20$, obţinem z = 6,65.

Valoarea exactă este 6,67.

9°. *Despre modul.*

De multe ori nomograma, pe care am obţinut-o ca în exemplul 8°, n'ar fi cea mai potrivită pentru

scopurile practice, din cauză că valorile cari ne interesează nu intră în cadrul nomogramei, sau intră într'o regiune unde nu pot fi citite cu exactitatea cea mai bună.

Astfel, în nomograma din fig. 4 valorile $x=2{,}8$, $y=6{,}4$ nu pot fi puse cu suficientă precizie. In acest caz ne alegem o altă unitate de măsură pe scări. Această unitate se numeşte în nomografie *modul.*

Introducerea unui modul se face aşa fel ca să construim nomograma tot cu ajutorul dubludecimetrului obişnuit; de aceea, în loc să ne alegem propriu zis o altă unitate de măsură pe scări, *punem formula sub o altă formă.*

Astfel, în exemplul precedent, în loc să punem formula $z=\frac{5x+2y}{15}$ sub forma $\frac{15\,z}{2}=\frac{5x+2y}{2}$, putem, înmulţind peste tot cu 4, s'o scriem astfel $30z=\frac{20x+8y}{2}$ şi deci, comparând cu $Z=\frac{X+Y}{2}$ vom avea

$$Z=30\,z;\ X=20\,x;\ Y=8y$$

Tablourile de valori sunt următoarele:

x	0	1	2	3	4
X	0	20	40	60	80

y	0	5	10
Y	0	40	80

z	0	1	2	3
Z	0	30	60	90

Cu ajutorul lor, se construeşte nomograma din fig. 5.

Luând pe această nomogramă $x=2{,}8$, $y=6{,}4$ găsim $z=1{,}78$. Valoarea exactă găsită prin calcul este $z=1{,}787$.

10° *Aplicaţii*

Să construim acum două nomograme cari au o aplicaţie practică imediată.

A) *Nomogramă pentru teorema lui Pitagora.*

Relaţia pentru care vrem să contruim nomograma este

$$z^2=x^2+y^2.$$

Scriind-o sub forma

$\frac{z^2}{2}=\frac{x^2+y^2}{2}$ şi comparând cu $Z=\frac{X+Y}{2}$ vedem că putem lua:

$$Z=\frac{z^2}{2};\ X=x^2;\ Y=y^2$$

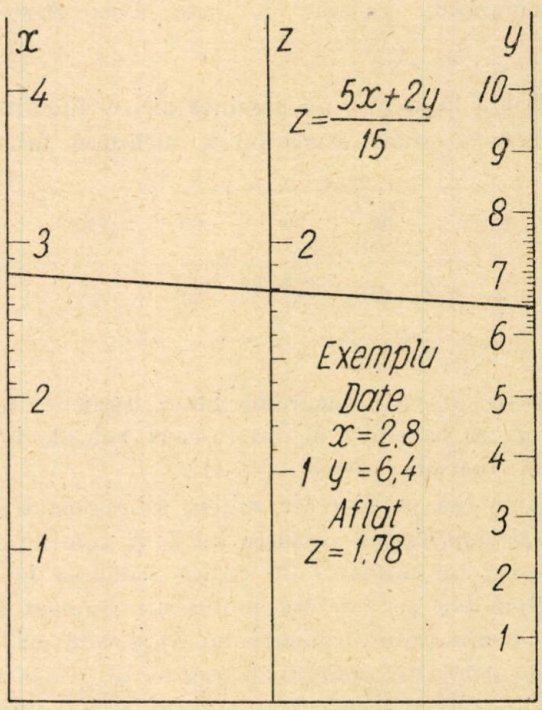


Fig. 5. Altă nomogramă pentru calculul expresiei

$$z=\frac{5x+2y}{15}$$

Avem următoarele tablouri de valori

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
X	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81

y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Y	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81

z	0	2	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Z	0	2	12,5	18	24,5	32	40,5	50	60,5	72	84,5

De data aceasta, diviziunile intermediare nu mai pot fi aflate prin împărţire în părţi egale, ci trebuesc găsite tot prin calcul. In acest mod se obţine nomograma din fig. 6.

B) *Nomogramă pentru formula lentilelor şi pentru montarea rezistenţelor în paralel.*

Se ştie că formula lentilelor este:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=\frac{1}{f}.$$

Deasemeni formula pentru montarea rezistenţelor în paralel este:

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{1}{R}.$$

Formulele au, după cum se vede, aceeaş formă. De aceea putem construi o nomogramă care să servească în acelaş timp pentru ambele formule.

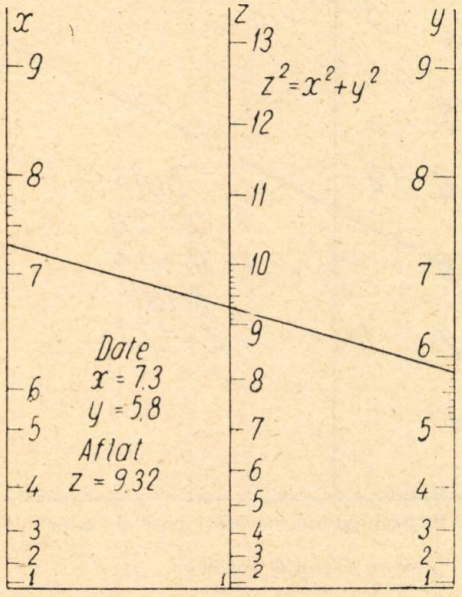


Fig. 6. Nomogramă pentru teorema lui Pitagora.

Pentru a construi nomograma vom pune mai întâi relaţia sub forma $Z=\frac{X+Y}{2}$. Împărţim cu 2 avem: $\frac{1}{2f}=\frac{\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}}{2}$.

Am putea lua $\frac{1}{p}=X$, $\frac{1}{p'}=Y$, $\frac{1}{2f}=Z$; însă, pentru a lucra în centimetri, şi presupunând că distanţele sunt cuprinse între 10 şi 50 cm, vom introduce un modul, înmulţind precedenta relaţie cu 100:

$$\frac{50}{f}=\frac{\frac{100}{p}+\frac{100}{p}}{2}.$$

Luăm acum:

$$X=\frac{100}{p}\quad Y=\frac{100}{p'}\quad Z=\frac{50}{f},$$

Alcătuim tabloul de valori:

p (p')	10	15	20	25	30	40	50	100
X (Y)	10	6,67	5	4	3,33	2,5	2	1

Z	5	8	10	20	30	40	50	100
f	10	6,25	5	2,5	1,66	1,25	1	0.5

Cu ajutorul tabloului, construim nomograma din fig 7.

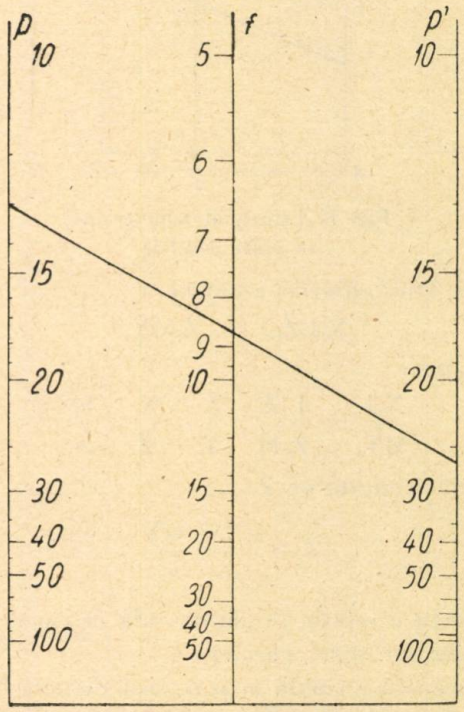


Fig. 7. Nomograma pentru formula lentilelor. (sau pentru montarea rezistentelor în paralel).

Cu ajutorul acestei nomograme se poate rezolva următoarea problemă:

Un obiect e situat la 13 cm de o lentilă, iar imaginea se formează la 27 cm. Care e distanţa focală a lentilei. Răspunsul este: 8,7 cm.

Deasemeni putem rezolva problema:

Se montează în paralel o rezistenţă de 13 Ω cu una de 27 Ω. Care este rezistenţa echivalentă a montajului? Răspunsul este 8,7 Ω.

11°. *Nomograme cu scări paralele.*

Tipul de nomogramă studiat în paragrafele precedente, adică nomograma cu scări echidistante nu poate satisface decât un număr restrâns din cerinţele practice; pentru alte tipuri de relaţii. sunt necesare nomograme mai complicate. Să studiem acum nomogramele cu scări paralele.

Aceste nomograme se caracterizează prin trei scări paralele,

$$AX_1 = X$$
$$BY_1 = Y$$
$$CZ_1 = Z$$

Aşezând rigla în poziţia $X_1\ Z_1\ Y_1$, obţinem segmentele AX_1, BY_1, CZ_1; ne întrebăm ce relaţie există între aceste segmente? Distanţele între scările AX şi CZ, CZ şi BY le vom nota cu m şi n respectiv.

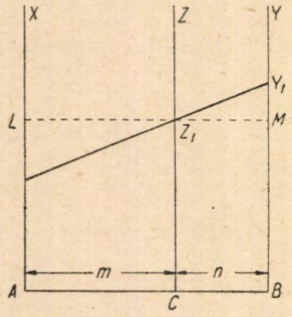


Fig. 8. Principiul nomogramei cu scări paralele

Din triunghiurile asemenea

$$X_1LZ_1 \quad \text{şi} \quad Z_1MY_1$$

deducem:

$$\frac{X_1L}{MY_1} = \frac{L_1Z}{Z_1M}\ ;\ \frac{Z-X}{Y-Z} = \frac{m}{n},$$

de unde scoatem pe Z:

$$Z = \frac{nX + mY}{m+n} \qquad (B)$$

Aceasta e relaţia fundamentală în cazul nomogramelor cu scări paralele.

In această formulă m şi n sunt distanţele dela axa Z la axele X şi Y respectiv, considerând că axa Z e situată între celelalte două.

12⁰. Ca aplicaţie, să reluăm formula

$$z = \frac{5x + 2y}{15}$$

dela 8⁰ şi 9⁰.

Această relaţie se poate aduce la forma

$$Z = \frac{nX + mY}{m+n}$$

în mai multe feluri.

De exemplu, putem lua $m=2$, $n=5$; atunci va trebui să avem la numitorul formulei $m+n=7$.

Vom scrie de aceea formula sub forma

$$\frac{15z}{7} = \frac{5x + 2y}{7}$$

şi deci vom putea lua:

$$X = x,\ Y = y,\ Z = \frac{15z}{7},\ m = 2,\ n = 5.$$

Pentru x şi y gradăm scara direct în milimetri; pentru Z folosim tabloul de valori:

z	0	1	2	3	4
Z	0	2,14	4,28	6,42	8,56

In acest mod obţinem nomograma din fig. 9.

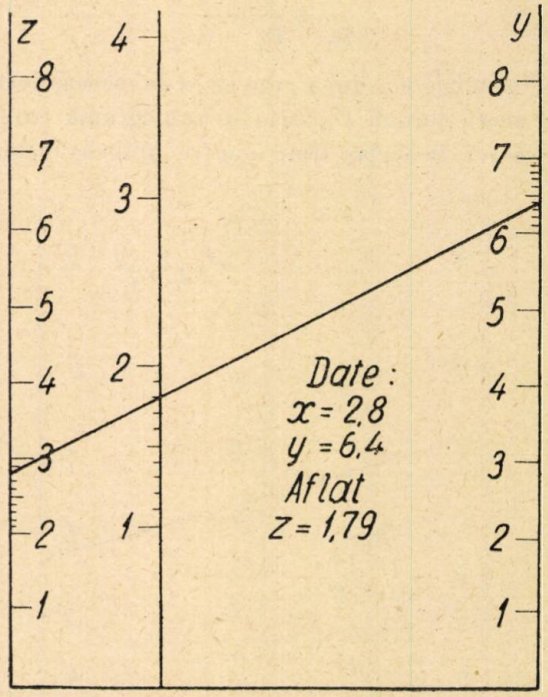


Fig. 9. Nomograma cu scări paralele neechidistante pentru calculul formulei $z = \frac{5x + 2y}{15}$

13⁰. Să construim acum o nomogramă care să ne dea aria laterală şi volumul unui cilindru circular drept, când se cunoaşte raza bazei şi înălţimea cilindrului, adică o nomogramă pentru calculul formulelor

$$S = 2\pi Rh, \quad V = \pi R^2 h.$$

In acest exemplu avem o noutate, anume o singură nomogramă pentru două formule. Trebue să aducem relaţiile noastre la forma (A) sau (B) Intrucât acolo avem sume, iar aici avem produse, aplicăm relaţiilor noastre logaritmii. Obţinem:

$$\log S = \log 2\pi + \log R + \log h,$$

de unde

$$\frac{\log S - \log 2\pi}{2} = \frac{\log R + \log h}{2}$$

şi

$$\log V = \log \pi + 2\log R + \log h,$$

care se mai poate scrie:

$$\frac{\log V - \log \pi}{3} = \frac{2\log R + \log h}{3}$$

In felul acesta, am adus prima relaţie la forma (A), putând lua:

$$X = \log R, \quad Y = \log h, \quad Z = \frac{\log S - \log 2\pi}{2}$$

şi deci să construim o nomogramă cu scări echidistante, iar a doua e adusă la forma (B) şi putem lua:

$$m = 1 \quad n = 2 \quad X' = \log R \quad Y' = \log h$$

$$Z' = \frac{\log V - \log \pi}{3}$$

Vedem că X=X', Y=Y' deci putem lua: pentru X şi X' aceeaş scară; la fel pentru Y şi Y' Pentru construcţie întocmim tablourile de valori

R(h)	1	2	3	4	5	10
X(Y)	0	0,301	0,477	0,602	0,699	1

la fel pentru Z şi Z'.

Luăm ca unitate de măsură 1 dm.

Pentru a construi nomograma luăm un segment AB (fig. 10) la capetele căruia ridicăm 2 perpendiculare; acestea vor fi scările lui R şi *h* respectiv; în mijlocul C al segmentului ridicăm o perpendiculară, care va fi scara lui S. Impărţim apoi segmentul AB în 3 părţi egale; în punctul D, situat mai aproape de A, ridicăm o perpendiculară, care va fi scara lui V. In acest mod avem $m=1, n=2$.

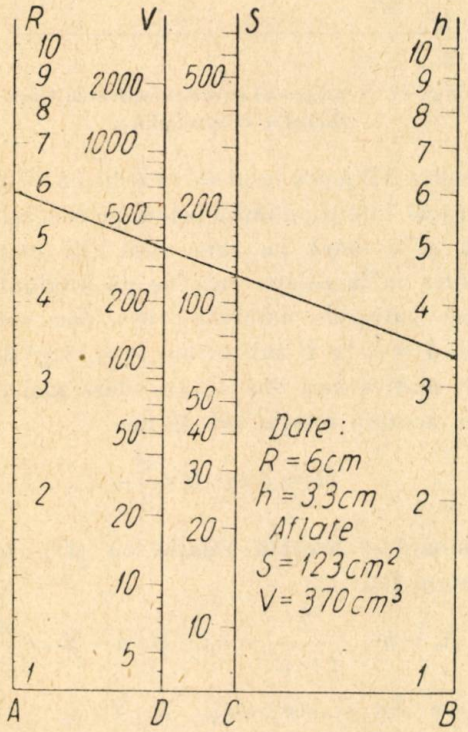


Fig. 10. Nomogramă pentru calculul ariei laterale şi a volumului unui cilindru circular drept.

Gradăm aceste scări, conform tabelelor, şi nomograma este gata.

Ca aplicaţie luând R=6 şi h=3,3 găsim S= 123 cm² V=370 cm³, în loc de S=124,6 cm² şi V=373 cm³ cari, sunt valorile găsite prin calcul Avem aşadar diferenţele de 1%

14⁰. *Nomograme cu scări concurente.*

Un alt tip de nomograme utilizate în practică sunt nomogramele cu scări concurente.

Să considerăm trei drepte concurente OX, OY

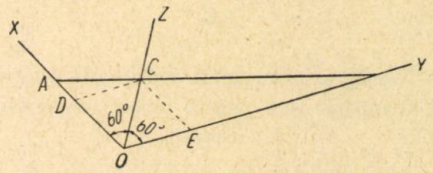


Fig. 11. Principiul nomogramei cu scări concurente.

OZ (fig. 11), cari să fie scările nomogramei. Aceste trei drepte le vom presupune formând între ele două unghiuri de câte 60°. O secantă oarecare taie cele 3 axe în A B, C, Segmentele OA, OB, OC sunt egale cu X, Y, Z.

Ne întrebăm ce relaţie există între X, Y, şi Z?

Ducând prin C paralele la OX şi OY, se formează două tringhiuri echilaterale, ODC şi OCE şi două triunghiuri asemenea, anume ADC şi CEB. Avem:

$$DA = OA - OD = X - Z$$

$$EB = OB - OE = Y - Z$$

$$DC = Z; \quad EC = Z$$

$$\frac{DA}{EC} = \frac{DC}{EB}; \quad \frac{X - Z}{Z} = \frac{Z}{Y - Z}$$

$$(X - Z)(Y - Z) = Z^2; \text{ desvoltând}$$

$$XY = XZ - YZ + Z^2 = Z^2 \text{ de unde}$$

$$XY = XZ + YZ;$$

împărţind cu XYZ

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{X} + \frac{1}{Y}$$

Relaţia (C) ne arată că o astfel de nomogramă ne poate servi pentru calculul formulei lentilelor (sau al rezistenţelor în paralel). Ea are asupra celei din fig. 7 avantajul de a avea diviziunile pe cele 3 scări, uniforme, fiind astfel mai uşor de construit. In fig. 12 avem o astfel de nomogramă, construită cu unitatea de 3 cm.

15⁰. *Nomograme cu scară oblică sau nomograme în Z.*

Un ultim tip de nomograme pe care îl vom studia sunt nomogramele cu scară oblică, denumite în Uniunea Sovietică nomograme în Z.

Aceste nomograme servesc pentru calculul expresiilor de forma $Z_1 = Z_2 Z_3$, adică a produselor de funcţiuni. Vom stabili formula generală a nomogramelor în Z, iar apoi ca aplicaţie vom face o nomogramă pentru rezolvarea triunghiurilor dreptunghice.

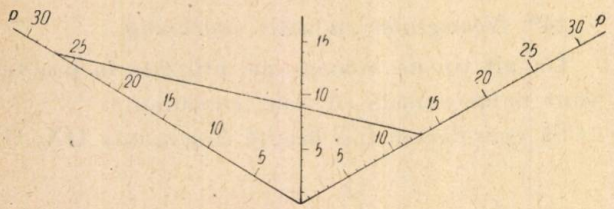


Fig. 12. Nomograma cu scări concurente pentru calculul formulei lentilelor (sau pentru montarea rezistenţelor în paralel).

$$AB = l$$
$$CB = h$$
$$AL = X$$
$$CN = Y$$
$$AM = Z$$

In cazul nomogramei în Z avem 2 scări paralele, AD şi CB, tăiate de o scară oblică, AB.

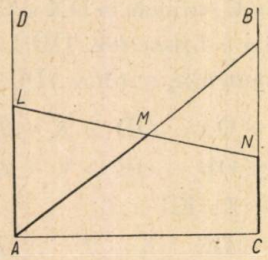


Fig. 13. Stabilirea formulei pentru monograma în Z.

Elementele geometrice fiind notate ca în figură avem din triunghiurile asemenea ALM şi BNM:

$$\frac{AL}{NB} = \frac{AM}{MB} \; ; \qquad \frac{X}{h - Y} = \frac{Z}{l - Z}$$

sau în fine

$$X = \frac{Z}{l - Z} \cdot (h - Y) \qquad (D)$$

Această relaţie este formula generală pentru construirea nomogramelor în Z.

Aplicarea ei se înţelege din exemplul ce urmează.

16⁰. *Nomogramă pentru rezolvarea triunghiurilor dreptunghice.*

Nomograma din fig. 6 ne permite să aflăm ipotenuza unui triunghiu dreptunghi când cunoaştem cele două catete. Vrem să construim acum o nomogramă mai completă, care să ne permită să aflăm atât ipotenuza cât şi unghiurile, cu alte cuvinte să ne permită să rezolvăm complect un triunghi dreptunghi.

In acest scop luăm un segment AC arbitrar (fig. 14), ridicăm în C o perpendiculară CB de 60 mm, iar extremitatea B astfel obţinută o unim cu A.

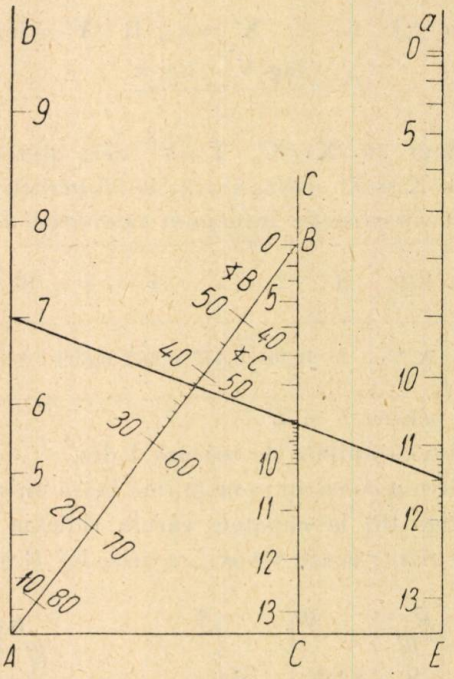


Fig. 14. Nomogramă pentru rezolvarea triunghiurilor dreptunghice.

Dreapta AB joacă rolul scării Z din cazul general.

Intrucât intenţionăm să facem pe aceeaşi nomogramă şi o scară pe care vom citi ipotenuza, vom face ca în relaţia care ne dă unghiul să intervină patratele catetelor; aşa dar von scrie relaţia $b = c \cdot \operatorname{tg} B$ sub forma $b^2 = c^2 \operatorname{tg}^2 B$.

Din motive cari vor deveni clare mai departe scriem această relaţie sub forma

$$b^2 = 3 \operatorname{tg}^2 B \cdot \frac{c^2}{3} .$$

Comparând această relaţie cu (D), se vede că putem lua:

$$X = b^2 ; \quad \frac{Z}{l - Z} = 3 \operatorname{tg}^2 B ; \quad h - Y = \frac{c^2}{3} .$$

Scoatem din aceste relaţii X, Y, Z.

Ţinând seama că pe figura noastră avem $h = 60$ mm $l = 75$ mm, obţinem:

$$X = b^2$$

$$Y = 60 - \frac{c^2}{3}$$

$$Z = \frac{225 \operatorname{tg}^2 B}{1 + 3 \operatorname{tg}^2 B} .$$

Cu ajutorul acestor formule s'au întocmit tabelele alăturate și cu ajutorul tabelelor s'au gradat cele trei scări.

b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

c	0	5	7	10	11	12	13
Y	60	51,7	43,6	26,7	19,7	12	3,7

B	0°	10°	20°	30°	40°	45°	50°
Z	0	6,4	21,2	37,5	50,8	56,2	61,0

Pentru a avea pe aceeaș nomogramă o scară pe care să putem citi ipotenuza vom face observația că avem gradațiile catetelor purtate pe două scări paralele, prin intermediul formulelor:

$$X = b^2 \quad Y = 60 - \frac{c^2}{3}.$$

Vom pune relația $a^2 = b^2 + c^2$ sub o astfel de formă încât să iasă în evidență aceste 2 expresii iar relația să fie de tipul (B).

Această formă este după cum se poate lesne verifica prin desfacerea parantezelor și eliminarea numitorilor

$$\frac{180 - a^2}{2} = \frac{-b^2 + 3\left(60 - \frac{c^2}{3}\right)}{3 - 1}.$$

Așadar, putem construi pe aceeași nomogramă o scară și pentru citirea ipotenuzei, luând

$$m = 3 \quad n = -1 \quad Z' = \frac{180 - a^2}{2}.$$

Amintindu-ne de semnificația lui m și n, vom găsi că piciorul E al acestei scări este *pe prelungirea* dreptei AC, la distanța $CE = \frac{AC}{2}$.

Tabloul de valori pentru Z_2 este:

a	0	2	4	6	8	10	12	13
Z'	90	88	82	72	58	40	18	5,5

Avem deci toate datele pentru executarea nomogramei.

Cu ajutorul ei putem rezolva grafic, printr'o simplă aplicare a riglei, probleme cum ar fi:

Intr'un triunghiu dreptunghiu o catetă e de 7 cm, iar ipotenuza este de 11,5 cm. Cât este cealaltă catetă și cari sunt valorile unghiurilor ascuțite?

Citim pe nomogramă:

Cealaltă catetă: 9,1 cm

Unghiurile: 37°30′ și 52°30′.

17) *Nomogramă pentru ecuația compresoarelor.* Vom studia acum o nomogramă întâlnită în tehnică. Pentru a înțelege la ce servește trebue să explicăm ce este și cum funcționează un compresor. Compresoarele sunt mașini cari servesc la comprimarea diferitelor gaze. Prin comprimare gazele își măresc presiunea și își micșorează volumul, și anume, dacă comprimarea are loc fără variație de temperatură, sau, cum se spune în tehnică, dacă avem o *compresiune isotermă*, atunci, conform legii Boyle-Mariotte, volumul se micșorează de atâtea ori de câte ori s'a mărit presiunea. De exemplu dacă mărim presiunea de 10 ori, volumul se micșorează tot de 10 ori.

Insă în practică compresiunea nu este isotermă, căci prin comprimare, după cum se știe, gazul se încălzește. In acest caz, volumul nu mai scade de același număr de ori, ci mai puțin. Dacă toată căldura produsă prin compresie rămâne în gaz, compresiunea se numește adiabatică; în acest caz în loc de relația

$$p v = \text{const.}$$

dată de legea Boyle-Mariotte, avem relația

$$p v^{\varkappa} = \text{const.},$$

relație în care $\varkappa$ are, pentru gazele biatomice (aer, oxigen, etc) valoarea 1,4 iar pentru gazele biatomice (argon, neon, heliu) valoarea 1,67.

In practică însă, nu avem nici compresiuni adiabatice, căci nu toată căldura rămâne în gaz; o parte din ea trece la pereții compresorului, mai ales că, pentru a evita ridicări de temperatură periculoase, aceștia sunt prevăzuți cu circulație de apă de răcire; așa încât în practică, compresiunea se chiamă *politropă* și relația între volum și presiune este:

$$p v^{n} = \text{const.},$$

unde exponentul n are valori cari depind de împrejurările concrete în cari se efectuează compresiunea, și care sunt cuprinse între valoarea minimă $n = 1$ (cazul compresiunii isoterme) și valoarea maximă $n = \varkappa$ (cazul compresiunii adiabatice).

In practică avem de rezolvat probleme de felul următor:

Un gaz e comprimat dela 1 la 10 atm, exponentul n având valoarea 1,2. De câte ori se va micșora volumul?

Avem relația

$$p_1 v_1^n = p_2 v_2^n$$

pentru calculul căreia ne propunem să construim o nomogramă.

Relația se mai poate scrie

$$\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^n.$$

Aplicând logaritmii, avem:

$$\log \frac{p_1}{p_2} = n \cdot \log \frac{v_2}{v_1}.$$

Notând pentru prescurtarea scrierii:

$$\log \frac{p_1}{p_2} = \mathrm{P}, \quad \log \frac{v_2}{v_1} = \mathrm{V}, \text{ avem}$$

$$\mathrm{P} = n\mathrm{V}, \text{ pe care o vom scrie } \mathrm{V} = \mathrm{P} \cdot \frac{1}{n}.$$

Se vede acum că această relație e comparabilă cu forma (D)

$$\mathrm{X} = \frac{\mathrm{Z}}{l - \mathrm{Z}} \cdot (h - \mathrm{Y}).$$

In această din urmă formă vom introduce însă niște module, pe cari le vom nota cu p și q scriind relația sub forma:

$$pq\,\mathrm{X} = \frac{p\mathrm{Z}}{l - \mathrm{Z}} \cdot q(h - \mathrm{Y})$$

comparând această relație cu

$$\mathrm{V} = \mathrm{P} \cdot \frac{1}{n}$$

se vede că putem lua

$$\mathrm{V} = pq\,\mathrm{X}$$

$$\mathrm{P} = \frac{p\mathrm{Z}}{l - \mathrm{Z}}$$

$$\frac{1}{n} = q(h - \mathrm{Y}).$$

Explicităm X, Y, Z

$$\mathrm{X} = \frac{\mathrm{V}}{pq}; \quad \mathrm{Y} = h - \frac{1}{nq}; \quad \mathrm{Z} = \frac{l\,\mathrm{P}}{p + \mathrm{P}}.$$

Rămâne să alegem dimensiunile geometrice l și h, precum și valorile modulelor p și q. Nu intrăm în detaliile considerațiilor ce au condus la determinarea acestor valori și luăm:

Distanța între axele paralele: 7,5 cm; h=18 cm; $l = \sqrt{7{,}5^2 + 18^2} = 19{,}5$ cm

$$q = \frac{1}{18}; \quad p = 2.$$

Cu aceste valori, obținem

$$\mathrm{X} = 9\ \mathrm{V}; \quad \mathrm{Y} = 18 - \frac{18}{n}; \quad \mathrm{Z} = \frac{19{,}5\,\mathrm{P}}{2 + \mathrm{P}}.$$

Cu ajutorul acestor formule obținem nomograma din fig. 15.

Cu ajutorul ei putem rezolva problema care ne-am pus-o și găsim că volumul se reduce de 6,9 ori.

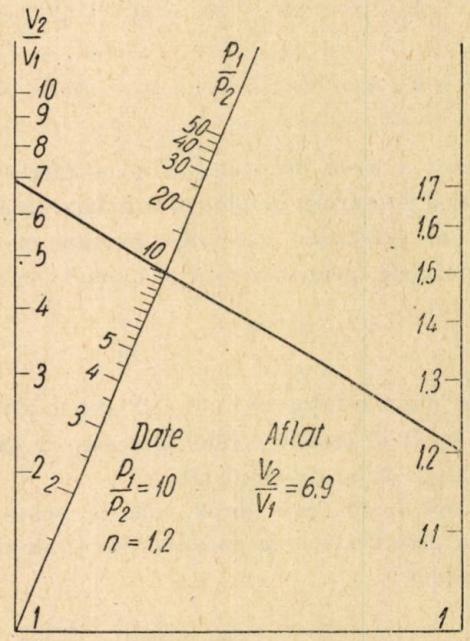


Fig. 15. Nomogramă pentru ecuația compresorilor

18°. Acestea sunt cele mai simple tipuri de nomograme. Există alte numeroase tipuri, al căror studiu cere cunoștințe de matematici superioare. Multe din aceste tipuri au fost inventate sau perfecționate de savanții sovietici. Cele mai importante din aceste tipuri sunt nomogramele cu câmp binar și nomogramele compuse.

Pentru a încheia, să mai facem o observație. Poate că unii din cititori să-și fi format părerea că nomogramele sunt un mijloc de calcul care, deși e rapid, totuși are o precizie limitată. La aceste eventuală obiecțiune se poate răspunde astfel:

In primul rând, precizia nomogramelor e de cele mai multe ori îndestulătoare pentru nevoile tehnicii. Chiar dacă în unele cazuri ea ar fi insuficientă, totuși cu ajutorul nomogramei se poate găsi repede o primă aproximație, lucru foarte prețios în inginerie, unde se fac de multe ori nu-

meroase încercări până se găseşte soluţia definitivă care apoi se calculează exact[1]).

Pe de altă parte, pentru scopuri speciale, se pot construi nomograme de precizie înaltă, cum sunt de exemplu nomogramele construite de V. N. Vâsoţki pentru determinările topografice.

Credem că cititorii noştri şi-au dat seama din cele de mai sus de importanţa practică a nomogramelor şi că vor căuta să-şi însuşească tehnica construirii şi folosirii nomogramelor, spre a o folosi când vor intra în producţie.

ELECTRONUL

A. Nedelcu

Concepţia electronică în explicarea — atât a fenomenelor electrice, cât şi a constituţiei materiei — este astăzi unanim admisă de oamenii de ştiinţă. Este o concepţie materialistă, care şi-a croit drumul odată cu progresul ştiinţei, pe bază de fapte experimentale. A vorbi deci despre electron şi corespondentul său positron — aceste particule elementare ce poartă cele mai mici sarcini electrice cunoscute, înseamnă a studia şi constituţia materiei, unde electronul intră ca constituent principal; ar fi prea mult însă pentru cadrul unui articol. Deaceia vom limita domeniul expunerii. Vom arăta numai fenomenele fundamentale în care se manifestă electronii şi vom insista în mod special asupra modului în care s'au determinat mărimile ce caracterizează electronul.

Teoria electronică pentru interpretarea fenomenelor electrice şi magnetice s'a născut atunci când mulţimea faptelor experimentale trebuiau explicate într'un mod unitar, la nivelul de desvoltare la care ajunsese ştiinţa. Fenomenele de conductibilitate, de trecere a curentului prin metale, lichide şi gaze nu erau explicate satisfăcător de teoria câmpului electromagnetic. Teoria electronică dă o explicare mulţumitoare acestor fenomene lămurind totodată şi alte fenomene ce se petrec în materie. După această teorie multe din fenomenele electromagnetice ce au loc în materie, se datoresc unor particule ce sunt mai mici decât atomul de hidrogen, distribuite într'un anumit fel în jurul nucleului atomic, particule ce se numesc electroni.

Fenomenele de conductibilitate metalică îşi găsesc uşor explicarea, admiţând existenţa unor electroni liberi, în interiorul metalelor, în mişcare complet dezordonată. O tensiune electrică aplicată la capetele unui conductor, îi orientează şi-i pune în mişcare. In conductibilitatea conductorilor de clasa a doua, electronii sunt transportaţi de ioni. In gaze se formează ioni şi electroni liberi. Mişcarea electronilor în jurul nucleului atomic produce fenomenele magnetice. Emisiile spectrale se explică prin salturile electronilor din jurul unui atom. Emisiile luminoase în consecinţă pot fi influenţate de un câmp magnetic puternic, fapt teoretic prevăzut de Lorentz şi realizat experimental de Zeeman în 1896. In adevăr, o lumină monocromatică, supusă unui câmp magnetic puternic, îşi modifică lungimea de undă, dând două sau trei radiaţii. Descoperirile razelor catodice, a razelor X, a radioactivităţii, au dat un bogat sprijin desvoltării acestei teorii.

O nouă categorie de fenomene nu şi-au putut găsi explicarea în cele două teorii expuse mai sus — este vorba de fenomenele ce au loc la interacţiunea dintre unele radiaţii şi corpurile materiale — care se soldează cu smulgerea electronilor din materie. Fenomenul este numit fotoelectric şi a putut fi explicat printr'o teorie granulară a energiei, numită teoria cuantelor.

Pentru întâia oară s'a ajuns la ipoteza existenţii electronului ca particulă elementară de electricitate, când s'a căutat o interpretare ştiinţifică legilor electrolizei, descoperite de Faraday, pe care le enunţăm mai jos.

a) Aceiaşi cantitate de electricitate descompune aceiaşi cantitate de electrolit, independent de suprafaţa electronilor sau de concentrarea electrolitului, deci: cantitatea de electrolit descompus este proporţională cu cantitatea de electricitate ce a servit descompunerii.

b) Când aceiaşi cantitate de electricitate străbate electrolite deosebite, cantităţile de metale depuse la catod, sunt proporţionale cu echivalenţii lor chimici. Echivalentul chimic este greutatea atomică raportată la valenţa elementului.

Aceste două legi le putem exprima matematic:

$$(1) \qquad M = a\frac{A}{n} \cdot I \cdot t = K \cdot I \cdot t$$

[1]) De altfel, nomogramele folosite în practică au mărimea unei pagini de revistă, ceeace permite o precizie mult mai bună.

unde M este massa de substanţă depusă la catod, I este intensitatea curentului, t timpul, A este masa atomică, n este valenţa elementului.

Dacă facem $A = 1$ şi $n = 1$, atunci $K = a$ deci constanta a reprezintă echivalentul electrochimic al unui element cu $A = 1$ şi $n = 1$. Hidrogenul se apropie foarte mult de aceste condiţii.

Experienţa arată că pentru a depune la catod un echivalent gram dintr'un metal este nevoie întotdeauna de o aceiaşi cantitate de electricitate egală cu 96540 Coulombi.

De aici putem deduce valoarea constantei a.

Dacă în (1) dăm lui M valoarea $\frac{A}{n}$ — formula devine

$$1 = a\,It \text{ şi deoarece } It = 96540 \text{ Coulombi}$$

$$a = \frac{1}{96540} = 0{,}00001035.$$

Din legile electrolizei rezultă că pentru depunerea unui echivalent gram din orice metal la catod este nevoie întotdeauna de o aceiaş cantitate de electricitate — 96540 Coulombi — un Faraday. Pentru a depune un atom gram de metal ne trebueşte o cantitate de electricitate egală cu 96540 Coulombi înmulţit cu valenţa metalului. Ştim însă că un atom gram din orice element are acelaşi număr de atomi — egal cu $6{,}06 \times 10^{23}$. Inseamnă că acelaşi număr de atomi este condus la catod de o aceiaşi cantitate de electricitate — de un Faraday — sau de un multiplu al acestei cantităţi, dacă atomul are o valenţă mai mare ca unitatea. In mod practic pentru depunerea unui atom gram de element monovalent (H, Ag) avem nevoie de un Faraday — pentru unul bivalent de doi Faraday, etc. Acest fapt nu poate fi explicat decât admiţând că fiecare atom poartă cu el o cantitate elementară şi întotdeauna aceeaşi de electricitate, dacă este monovalent, o cantitate dublă dacă este bivalent, etc. Această cantitate elementară de electricitate este electronul şi o putem determina dacă vom raporta cantitatea totală de electricitate ce o transportă un atom gram dintr'un element monovalent la numărul atomilor într'un atom gram adică:

$$\frac{96540 \text{ Coulombi}}{N} = \frac{96540}{6{,}06 \times 10^{23}} =$$

$$= 1{,}6.10^{-19} \text{ Coulombi} = 4{,}8.10^{-10} \text{ u. e. s. C. G. S.}$$

Aceasta este o primă determinare a sarcinei electronului. Aici sarcina electrică este asociată materiei. Determinarea nu poate fi exactă decât prin cunoaşterea precisă a constantei lui Avogadro. La primele determinări constanta era cunoscută cu aproximaţie.

Electroni liberi s'au obţinut experimental pentru prima dată în tuburile de descărcare. Un tub de descărcare este format dintr'un tub de sticlă, în care se află aer sau un gaz oarecare la presiune scăzută, iar la capetele sale prin intermediul unor plăci metalice, se menţine o tensiune cu ajutorul unei bobine de inducţie, condensator sau maşină electrostatică. Dacă în interiorul tubului presiunea este de ordinul unui mm de Hg şi se aplică o tensiune de ordinul kilovoltului pentru o distanţă de un decimetru între electrozi — vom avea în interiorul tubului un regim permanent de descărcare, arătat schematic în figura 1. Un galvanometru pus în circuit, arată

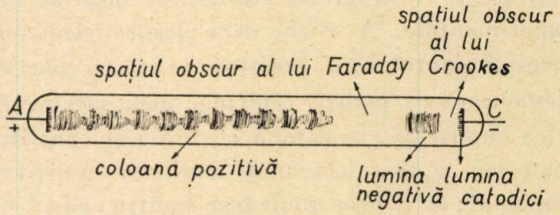


Fig. 1.

un curent de ordinul miliamperilor. A şi C — conductori metalici în legătură cu sursa de curent — formează anodul şi catodul. La presiunea indicată mai sus regimul din interiorul tubului este următorul: un strat puternic de lumină înconjoară catodul; este lumina catodică; urmează spaţiul întunecat al lui Crookes, apoi o regiune slab luminată, numită lumina negativă; un al doilea spaţiu întunecat numit spaţiul lui Faraday şi în fine o coloana de lumină numită lumina pozitivă, formată din stratificaţii cu concavitatea spre anod, care este deasemenea viu luminat. Coloana pozitivă umple tubul aproape în întregime (tuburile cu neon) şi culoarea ei depinde de natura gazului ce se află în interior. Astfel de tuburi de construcţie specială, servesc la studiul spectrelor date de gaze.

Cu ajutorul unei sonde se poate stabili tensiunea dintre un punct oarecare din interiorul tubului şi un electrod — bunăoară catodul. Variaţia potenţialului este arătată în figura 2. In abscisă avem lungimea tubului şi în ordonată potenţialul. In lungul coloanei pozitive avem o cădere regulată a potenţialului, al cărui gradient depinde de presiunea gazului şi intensitatea curentului. In lungul spaţiului obscur al lui Faraday şi al luminei negative avem un potenţial aproape constant, iar în spaţiul obscur al lui Crookes o cădere bruscă a potenţialului, numită cădere de

potențial catodică. Câmpul electric E este deci aproape constant în coloana pozitivă, trece printr'un minim în lumina negativă și are o creștere bruscă în spațiul obscur a lui Crookes.

Ionizarea gazului în interiorul tubului este produsă de ionii pozitivi și negativi. Ionii pozitivi nu pot căpăta forță ionizantă, decât atunci când sunt puternic accelerați de căderea de potențial catodică. Această ionizare este arătată prin lumina catodică, care analizată spectral ne indică smulgerea electronilor din metal și din moleculele gazului ce-l înconjoară. Astfel se explică prezența razelor pozitive în spatele unui catod găurit. Electronii produși la suprafața catodului se mișcă spre anod. Viteza lor este foarte mare datorită

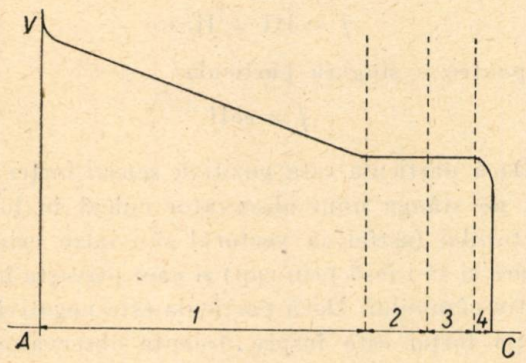


Fig. 2.

căderii de potențial catodică. In drumul lor ei produc ionizarea moleculelor gazoase pe cari le întâlnesc. Fiecare moleculă prin ciocnire ionizantă dă un ion pozitiv și un electron, ce se îndreaptă respectiv spre catod și anod. Luminozitatea gazului este produsă de excitația atomilor prin ciocniri electronice.

Dacă într'un tub de descărcare, micșorăm presiunea interioară a gazului la o miime de mm Hg și între electrozi stabilim o tensiune de 50—60.000 volți, spațiul obscur al lui Crookes umple tubul în întregime. Căderea de potențial catodică se accentuiază pe măsura ce presiunea se micșorează așa că în preajma catodului vom avea un câmp electric extrem de intens. Potențialul în restul tubului fiind constant — câmpul e nul — iar electronii ce capătă o mare vitesă în traversarea căderii de potențial, se vor mișca cu vitesă constantă în restul tubului. Vitesa poate fi calculată prin relația $eV = \frac{mv^2}{2}$ presupunând că V este tensiunea dintre anod și catod. Pentru V = 40000 volți, $v = 120.000\ \frac{km}{s}$. De fapt electronii se formează și în lungul tubului, așa că în mod practic fascicolul de raze catodice produs de un tub Crookes nu este omogen.

Vom arăta proprietățile razelor catodice care au permis să se tragă concluzia că sunt constituite din electroni.

Fascicolul catodic transportă sarcini electrice negative.

Razele catodice sunt deviate de un câmp magnetic. Experiența reușește chiar cu un câmp magnetic puțin intens.

Razele catodice sunt deviate de un câmp electric. Plăcile D și D' ale condensatorului sunt introduse în interiorul tubului ca în figura 3.

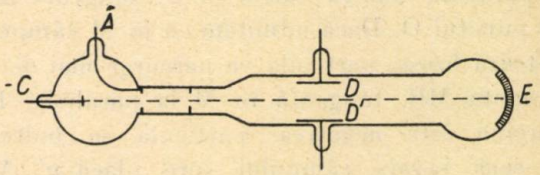


Fig. 3.

Prin măsurarea simultană a deviațiilor electrice și magnetce asupra unei particule — se poate determina vitesa v și raportul $\frac{e}{m}$, în care e este sarcina electrică și m masa particulei. După cum vom vedea datele obținute au permis să se tragă concluzia că particulele electrizate ce formează razele catodice sunt electroni.

Când razele catodice lovesc un obstacol, cea mai mare parte a energiei lor cinetice se transformă în căldură. Prin măsurarea căldurei degajate se poate calcula valoarea cantității $\frac{e}{m} \cdot \frac{1}{v^2}$, ce se poate determina și prin metoda deviației electrice.

Vom arăta succesiv acțiunea unui câmp electric și a unui câmp magnetic asupra unei particule electrizate. Se înțelege că acțiunea câmpului — în ambele cazuri — va fi proporțională cu sarcina electrică a particulei și invers proporțională cu masa ei, din cauza inerției masei.

Acțiunea unui câmp electric omogen asupra unei particule electrizate.

O particulă electrizată lansată cu o vitesă inițială v se mișcă după o dreaptă Ox (fig. 4). Ea

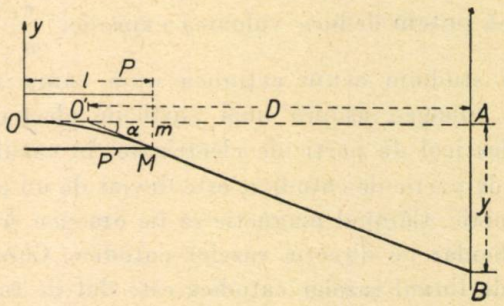


Fig. 4.

trece printre plăcite p și p' ale unui condensator. Dacă condensatorul nu este încărcat particula va lovi un ecran fluorescent în punctul A. Ea parcurge spațiul OA în mișcare uniformă. Când se încarcă plăcile condensatorului, particula este supusă unei forțe electrice egală cu $f = eE$ (în care E este câmpul electric). Această forță constantă este perpendiculară pe direcția Ox și va devia particula înspre placa condensatorului încărcată cu electricitate de fel contrar încărcăturii particulei. Traectoria particulei rezultă din mișcarea uniformă pe dreapta Ox și uniform accelerată în câmpul electric al condensatorului. Va fi deci o parabolă OM cu vârful în O, tangentă la Ox în punctul O. Dacă admitem că în M câmpul încetează brusc, particula va parcurge mai departe dreapta MB, tangentă în M la parabolă. Dacă sarcina este negativă, particula se îndreaptă în sens invers câmpului spre placa p'. Avem $f = Ee = m\gamma$; de unde accelerația mișcării va fi

$$\gamma = \frac{Ee}{m}.$$

Componenta vitesei pe direcția Ox rămâne egală cu v. Particula va traversa deci condensatorul într'un timp $t = \frac{l}{v}$. In acest timp componenta vitesei după Oy va avea valoarea:

$$V_y = \gamma t = \frac{Ee}{m} \cdot \frac{l}{v} = \frac{Eel}{mv}.$$

Ori tangenta unghiului făcut de tangenta la parabolă în punctul M și dreapta Ox este

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{Vy}{v} = \frac{Eel}{mv \cdot v} = \frac{E\,el}{mv^2}$$

și deplasarea y a particulei pe ecranul fluorescent este:

$$y = D \operatorname{tg}\alpha = \frac{l}{m} \cdot \frac{1}{v^2} \cdot E \cdot l\, D$$

în care D este distanța dintre punctul O' aflat aproximativ la jumătatea lungimei - l - și ecran. Mărimile y, E, și D se determină experimental așa că putem deduce valoarea expresiei $\frac{e}{m} \cdot \frac{1}{v^2}$.

Să studiem acum acțiunea unui câmp magnetic omogen asupra unei particule electrizate. Un fascicol de particule electrizate, în cazul nostru de particule catodice, este deviat de un câmp magnetic. Câmpul magnetic să fie omogen și perpendicular pe direcția razelor catodice. Curentul dat de fluxul razelor catodice este dat de relația $i = nev$, în care n este numărul particulelor, e sarcina unei particule și v vitesa. Direcția de deplasare este V. (Fig. 5). Aplicăm un câmp mag-

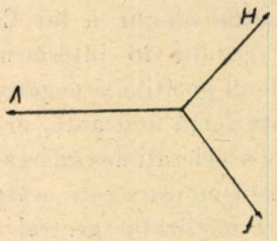


Fig. 5.

netic omogen perpendicular pe direcția V. Forța ce se aplică curentului dat de razele catodice este dată de legea lui Laplace. Ea este proporțională cu câmpul

$$f = HI = Hnev$$

și pentru o singură particulă

$$f = ev\mathrm{H}.$$

Dacă particula este pozitivă sensul forței este dat de stânga unui observator culcat în lungul vectorului (astfel ca vectorul să-i intre prin picioare și să-i iasă prin cap) și care privește în direcția câmpului. Dacă particula este negativă direcția forței este înspre dreapta observatorului ca în fig. 5.

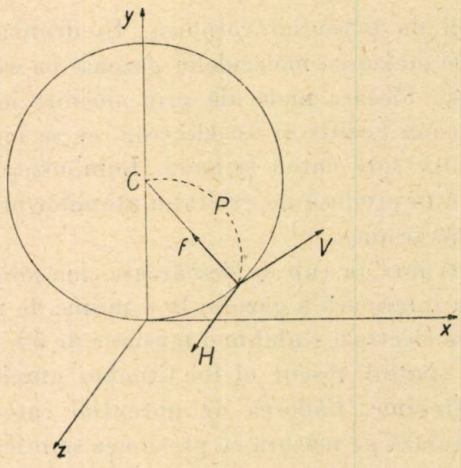


Fig. 6.

Vitesa razelor catodice este direcțională după Oy, fig. 6 iar câmpul magnetic omogen după Oz, atunci forța care acționează asupra unei particule se va afla în planul yOx și traectoria particulei se va afla în acelaș plan. Forța care acționează asupra particulei și accelerația imprimată de forță, sunt în mod constant normale vitesei pe direcția Ox și deci normale traectoriei. Accelerația fiind normală pe traectorie curba descrisă este o circumferință. Valoarea accelerației este

$\gamma = \frac{f}{m} = \frac{e\varphi H}{m}$. Dacă notăm raza de curbură a acestei circumferenţe cu ρ, acceleraţia normală este dată de $\gamma = \frac{\varphi^2}{\rho}$ de unde $\rho = \frac{\varphi^2}{\gamma}$ dacă înlocuim valoarea acceleraţiei de mai sus vom avea:

$$\rho = \frac{\varphi^2}{\gamma} = \frac{\varphi^2}{\frac{e\varphi H}{m}} = \frac{\varphi^2 m}{e\varphi H} = \varphi \cdot \frac{m}{e} \cdot \frac{1}{H}$$

Aceste traectorii circulare închise au fost obţinute cu ajutorul unor bobine ce produceau un câmp magnetic omogen de o sută Oerstezi, într'un cerc de câţiva cm rază.

Pentru ca să obţinem o deviere ce poate fi constatată prin schimbarea poziţiei petei luminoase pe un ecran fluorescent, lăsăm câmpul să acţioneze pe o lungime mică (figura 7) şi atunci traectoria se compune din arcul de circumferinţă OM cât şi tangenta MB la acest cerc în punctul M

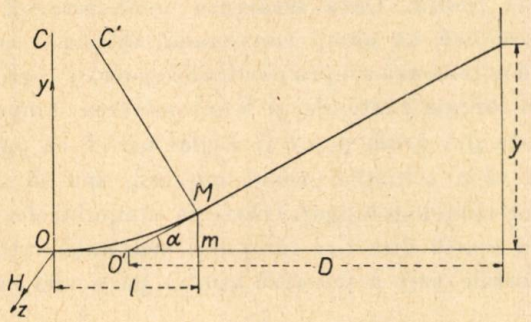


Fig. 7.

Dacă deviaţia α este mică putem confunda lungimea arcului OM cu lungimea câmpului Om (l). Unghiul razelor OC şi MC' în radiani este lungimea arcului pe rază $\alpha = \frac{l}{\rho}$. Introducem valoarea lui de mai sus şi avem:

$$\alpha = \frac{l}{\rho} = \frac{l \cdot eH}{\varphi \cdot m}.$$

Tangenta în punctul M şi tangenta la origine se întâlnesc în O', care se află aproximativ la mijlocul lui Om. Notăm distanţa O'A cu D şi atunci deviaţia magnetică pe ecran AB = y este egală cu

$$y = D\alpha = \frac{1}{\varphi} \cdot \frac{l}{m} \cdot HlD.$$

Deviaţia unei particule electrizate produsă de un câmp electric — după cum am văzut — este dată de relaţia

$$y = \frac{1}{\varphi^2} \cdot \frac{e}{m} E \cdot l \cdot d$$

şi cea produsă de un câmp magnetic asupra aceleiaşi particule este dată de relaţia.

$$y' = \frac{1}{\varphi} \cdot \frac{e}{m} \cdot HlD.$$

Câmpul electric E, cel magnetic H precum şi deviaţiile electrice şi magnetice se pot măsura. Făcând particulele să treacă simultan printr'un câmp electric şi unul magnetic încrucişate la unghi drept, cu un acelaşi l şi D, putem determina mărimile $\frac{1}{\varphi^2} \cdot \frac{e}{m}$ şi $\frac{1}{\varphi} \cdot \frac{e}{m}$ şi deci determinarea raportului $\frac{l}{m}$ şi a lui φ.

Dăm schema unuia din numeroasele dispozitive experimentale folosit pentru aceste determinări.

Câmpul electric produs de condensatorul PP' (fig. 8) este paralel cu câmpul magnetic produs de bobinele CC'. Lungimea lor este aceeaşi. Diafragmele M şi M' limitează un fascicol restrâns de electroni. Câmpul electric E îndreaptă particula electrizată spre placa pozitivă de sus după direcţia Ay. Dacă ar acţiona câmpul electric singur, particula ar cădea pe ecranul fluorescent aşezat în planul yAz în punctul C. Deviaţia dată de câmpul magnetic — după regula mâinii stângi este perpendiculară pe prima după direcţia Az. Dacă acest câmp ar acţiona singur particula ar atinge ecranul în C'. Prin acţiunea simultană a celor două câmpuri, forţele ce determină mişcarea particulei se compun şi particula atinge ecranul în B. Coordonatele punctului B prin raport la axele Ay şi Az le notăm cu y şi z şi au valoarea cunoscută.

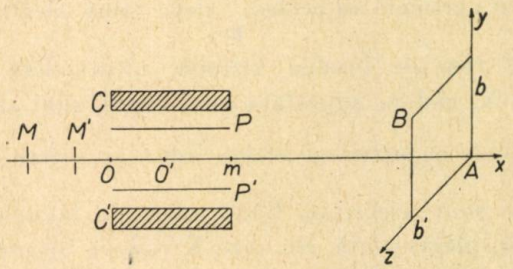


Fig. 8.

$$y = \frac{1}{\varphi^2} \cdot \frac{e}{m} \cdot E l D \text{ şi } z = \frac{1}{\varphi} \cdot \frac{e}{m} H l D$$

de unde scoatem:

$$\varphi = \frac{E}{H} \cdot \frac{z}{y} \text{ şi } \frac{e}{m} = \frac{1}{lD} \cdot \frac{E}{H^2} \cdot \frac{z^2}{y}$$

Toate mărimile din membrul al doilea al acestor relaţii sunt măsurabile. Am spus că diafragmele M şi M' limitează un fascicol restrâns de electroni. Dacă electronii vor avea aceeaşi

vitesă — vom obține pe ecran un punct B. Dacă vitesa lor va fi diferită, vom obține o curbă, deoarece vitesa particulelor variază continuu și fiecare punct al curbei permite determinarea lui v și $\frac{e}{m}$ cu aproximație de 1%.

Determinările făcute cu razele catodice au dat în mod constant aceeași valoare a raportului $\frac{e}{m}$ egală cu $1{,}757.10^7$ *u.e.m.*, independent de natura gazului introdus în tubul de descărcare, sau de natura electrozilor, cu condiția ca vitesa particulelor să fie relativ mică în comparație cu vitesa luminii. In consecință aceste particule sunt identice între ele și au primit numele de electroni.

Particule electrice negative sunt produse în fenomene variate. Astfel: razele β emise de substanțe radioactive, sunt constituite din particule negative, cu aceeași valoare a raportului $\frac{e}{m}$, deci sunt formate din electroni. Particule electrizate negativ emise de un corp adus la incandescență; aceste particule au același $\frac{e}{m}$ deci sunt electroni. Când raze de lumină vizibilă, ultravioletă sau raze X, cad pe suprafața unui metal, sunt emise particule negative cu același $\frac{e}{m}$ deci și aceste particule sunt electroni. Când razele de lumină vizibilă, ultravioletă sau raze X cad pe suprafața unui metal, sunt emise particole negative cu același $\frac{e}{m}$, deci și aceste particole sunt electroni. Spectrele hidrogenului și heliului ionizat permit să se calculeze raportul $\frac{e}{m}$ care a fost găsit același, deci particulele de electricitate negativă ce se rotesc în jurul nucleului sunt electroni. Deasemenea deplasarea și descompunerea liniilor spectrale date de o substanță aflată într'un câmp magnetic duce la stabilirea unei relații între câmpul magnetic, schimbarea lungimii de undă și raportul $\frac{e}{m}$, care permite determinarea acestuia din urmă.

Determinările experimentale au dat valori care se grupează în jurul unei medii care este de: $\frac{e}{m} = 1{,}757.10^7$ *u.e.m.* Concluzia pe care o scoatem este că în toate fenomenele de mai sus, particulele electrizate negative sunt electroni, care au o existență obiectivă.

Metodele de mai sus au permis determinarea raportului $\frac{e}{m}$; rămânea să fie determinată direct sarcina electronului. Aceasta a fost făcută de către Milikan și Ioffe printr'o metodă ingenioasă, într'o serie de experiențe (1909—1917) numită metoda picăturei echilibrate.

Sistemul experimental e format dintr'un condensator cu plăci orizontale. Placa superioară are o gaură fixă prin care pot trece picături de ulei pulverizate foarte fin — cu raza de ordinul micronilor. Picăturile sunt electrizate prin frecarea suferită în timpul formării lor. Ele se mișcă în gazul ce umple tubul — care este puternic luminat. Cu ajutorul unei lunete — dispusă perpendicular pe direcția razelor de lumină — se pot observa picăturile de ulei — care suferind fenomenul Tyndall — apar ca puncte luminoase pe fond întunecat. Dacă plăcile condensatorului nu sunt încărcate, particula va cădea din cauza diferenței de densitate față de gazul în care se află, cu o vitesă limită. Dacă încărcăm condensatorul ca să producă un câmp convenabil, atunci o nouă forță acționează asupra particulei egală cu $-qE-q$ fiind sarcina particulei și E intensitatea câmpului Acesta din urmă poate fi reglat astfel ca particula să-și schimbe sensul mișcării, sau să stea pe loc timp îndelungat. (Direcția câmpului electric se ia opusă direcției câmpului gravitațional).

Forțele care acționează asupra particulei sunt: *a)* greutatea ei dată de relația $f = mg = \frac{4}{3}\pi a^3 D g$ — în care a este raza particulei și D densitatea ei. Această forță lucrează în jos după direcția verticalei; *b)* o altă forță care lucrează după aceiași direcție dar în sus este datorită presiunii hidrostatice a gazului în care se află particula egală cu $\frac{4}{3}\pi a^3 dg$ în care d este densitatea gazului; *c)* forța electrică Eq și *d)* rezistența gazului dată de legea lui Stokes îndreptată contra sensului mișcării particulei dată de relația $f = 6\pi a \eta v$, în care η este coeficientul de vâscozitate al gazului și v vitesa particulei. Când picătura este nemișcată primele trei forțe își fac echilibru, când se mișcă cu vitesa constantă v, atunci toate cele 4 forțe își fac echilibru. De aici și denumirea metodei.

Scrim că cele patru forțe își fac echilibru

$$\frac{4}{3}\pi a^3 (D - d) g + Eq = 6\pi a v \eta$$

In această ecuație toate mărimile sunt cunoscute afară de q și a — deci obținem pe q în funcție

de a. Pentru a elimina pe a, mai facem o determinare în absența câmpului electric, asupra aceleiași particule, care va avea altă vitesă v. Din cele două relații se scoate q în funcție de cantități cunoscute:

$$q = \frac{18\pi\eta}{E}\sqrt{\frac{\eta v_0}{2(D-d)g}}(v - v_0).$$

Metoda a permis să se determine sarcina unui electron cu o eroare mai mică decât 1/100 și a fost găsită egală cu

$e = 4{,}80.10^{-10}$ unități electrostatice sau

$e = 1.60.10^{-20}$ unități electromagnetice.

Experiențele au arătat structura discontinuă a electricității, căci variația de vitesă a particulei este discontinuă.

Metoda permite determinarea cea mai exactă a constantei lui Avogadro. Pe această cale valoarea găsită pentru N este

$$N = 6{,}046.10^{23}.$$

Masa electronului se poate deduce din cunoașterea raportului $\frac{e}{m}$ pentru un electron și a aceluiași raport pentru o particulă oarecare electrizată, căreia i se cunoaște sarcina și masa, de exemplu a atomului de hidrogen ionizat.

Am văzut că raportul $\frac{e}{m}$ pentru un electron are valoarea $5{,}31.10^{17}$ *u.e.s.*, sau $1{,}77.10^{7}$ *u.e.m.* Pentru hidrogen valoarea aceluiași raport se deduce din electroliză. Pentru depunerea la catod a unui echivalent gram de hidrogen este nevoie de o cantitate de electricitate egală cu 96540 Coulombi = 9654 unități electromagnetice.

Sarcina $e = \frac{96540}{6.10^{23}}$ Masa atomului de H = $= \frac{1}{6.10^{23}}$ deci $\frac{e}{m_H} = 96540$ Coulombi $= 9654$ *u.e.m.*

Cunoscând valoarea celor două rapoarte $\frac{e}{m_H}$ și $\frac{e}{m_{electron}}$ se poate deduce masa electronului. Avem:

$$\frac{\frac{e}{m_H}}{\frac{e}{m_{el.}}} = \frac{m_{electron}}{m_H} = \frac{9654}{1{,}7710^{7}} = \frac{1}{1833}$$

deci masa electronului este de 1833 ori mai mică decât masa atomului Hidrogen. Masa atomului de hidrogen fiind $1{,}68.10^{-24}$ g, masa electronului este egală cu $0{,}9.10^{-27}$ g.

Teoria electronică a arătat legătura dintre m și e care este dată relația: $m = \frac{2e^2}{3a}$ unde a este raza electronului.

Relația de mai sus permite să se determine și raza electronului. In adevăr m și e fiind cunoscute se determină

$$a = 1{,}9.10^{-13} cm.$$

Determinările asupra raportului $\frac{e}{m}$ dau valoarea cunoscută pentru vitesa relativ mică a electronilor. Pentru vitese mari masa electronului crește. Acest fapt este o consecință a teoriei restrânse a relativității date de Einstein. Conform acestei teorii, oricărei creșteri de energie ΔE a unei particule, îi corespunde o creștere de masă

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2}.$$

Calculând cu ajutorul ecuațiilor de transformare ale lui Lorentz această variație de masă, se obține pentru masa m a unei particule în mișcare relația

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

unde m_0 este masa în repaus a particulei, v este vitesa ei și c este vitesa luminii. Pentru valorile lui v mult mai mici decât c, masa în mișcare nu diferă practic de masa în repaus. Numai pentru vitese ce reprezintă fracțiuni importante din vitesa luminii, creșterea de masă devine sensibilă. Pentru $v \to c$, $m \to \infty$, de unde rezultă că trebue comunicată electronului o energie infinită pentru a-l aduce la vitesa luminii ceeace este evident imposibil.

Variația masei electronului cu variația vitesei a fost supusă probelor experimentale. In principiu se măsoară valoarea raportului $\frac{e}{m}$ pentru electroni cu vitesa din ce în ce mai mare. Se consideră e constant și variația raportului $\frac{e}{m}$ permite verificarea formulei ce dă masa în funcție de vitesă. Rezultatele experimetale sunt arătate în fig. 9, care arată creșterea masei electronului cu vitesa. Vitesele electronului sunt cuprinse între 0,22 c și 0,49 c. In abscisă se pune valoarea raportului $\frac{v}{c}$ și în ordonată raportul maselor $\frac{m}{m_0}$. Rezultatele experimentale confirmă teoria relativității.

Vom mai adăuga numai câteva cuvinte despre corespondentul pozitiv al electronului — pozitronul — numire ce vine dela *pozitiv electron*. Această particulă a fost descoperită în 1932 de Andersen, studiind razele cosmice. Fizicianul sovietic Skobelţin a avut ingenioasa ideie să aşeze camera Wilson într'un câmp magnetic transversal, care încovoiază traectoria particulelor electrizate. O astfel de cameră a folosit Anderson. Câmpul folosit de el se ridică la 24000 Oerstezi. Razele cosmice sunt formate şi din unde electromagnetice de frecvenţă foarte mare, dar şi din particule electrizate. Anderson a constatat că foarte multe particule

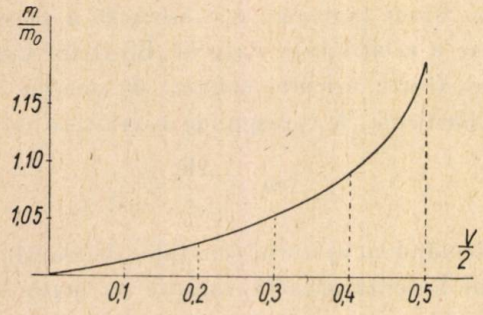


Fig. 9.

sunt electroni. Puţine clişee arătau însă existenţa unor particule cu aceiaşi curbură ca a electronilor, însă îndreptată în sens invers. Anderson a dovedit că aceste particule aveau aceiaşi masă şi aceiaşi sarcină electrică însă de semn contrar cu a electronilor. Pozitronii ca şi electronii veneau din partea superioară a camerii Wilson.

Dar şi undele electromagnetice — fotonii proveniţi din razele cosmice din frânarea electronilor rapizi din reacţii nucleare sau din dezintegrarea nucleelor radioactive — pot, dacă energia lor e mai mare de 1000 MeV să producă perechi de electroni şi pozitroni.

Această materializare a energiei fotonului se face în apropierea nucleului unui atom, care are numai un rol de sprijin. Putem arăta procesul ce are loc prin relaţia

$$\gamma = e^+ \text{ (pozitron)} + e^- \text{ (electron)}.$$

Pentru ca să poată avea loc fenomenul — energia fotonului — trebue să fie mai mare decât 1.000.000 electronvolţi — energia minimă — ce corespunde masei celor două particule născute.

Tot în camera Wilson s'a putut observa şi fenomenul invers. Prin întâlnirea unui pozitron cu un electron — masele lor de repaus se anihilează şi apare o energie corespondentă masei sub forma unei raze.

In timp ce electronii se pot obţine liberi — cu uşurinţă — în fenomene variate, după cum am arătat, pozitronii sunt deosebit de instabili, unindu-se numai decât cu electronii pentru a da cuante γ — ceeace explică şi descoperirea lor târzie.

Am arătat în articolul de faţă experienţele şi considerentele teoretice pe baza cărora s'a dovedit existenţa electronului şi a pozitronului şi cum s'au putut deduce principalele mărimi ce caracterizează aceste particule elementare de electricitate. Teoria electronică — prin esenţă materialistă — dovedeşte că una din formele de energie — electricitatea — are structură granulară. Ea a făcut un mare pas în interpretarea ştiinţifică, căutând să descrie efectele electromagnetice microscopice.

Teoria electronică completează şi extinde teoria electromagnetică. Numeroasele fenomene prevăzute şi confirmate experimental pe baza teoriei electronice, precum şi succesul cu care s'a putut aborda structura atomului, arată bazele solide ale acestei teorii. Departe de a fi un capitol încheiat, teoria electonului este acum în plină desvoltare şi constitue una din principalele probleme ale teoriei moderne a câmpului.

$i^i = x$

PROBLEME REZOLVATE

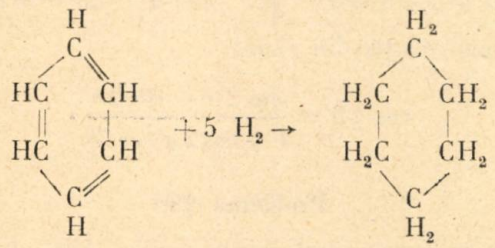
$x = e^{-\frac{\pi}{2}}$

Problema 216

Câți litri de hidrogen la 20° și 25 atmosfere trebue pentru hidrogenarea a 50 g. de naftalină în decalină, considerând randamentul hidrogenării 75%.

Achim Marinescu

Soluție. Din această reacție reese că la o moleculă gram naftalină trebue 5 molecule gram de hidrogen.



Exprimând în greutăți moleculare, avem

$$128 \text{ g } C_{10}H_8 + 10 \text{ g } H \rightarrow 138 \text{ g } C_{10}H_{18}$$

Dacă pentru hidrogenarea a 128 g naftalină trebuesc 10 g hidrogen, pentru cantitatea dată de 50 g vor trebui $\frac{50 \times 10}{128} = 3{,}9068$ g H.

Ținând seama că randamentul este 75% $\left(r = \frac{\text{cantitate utilă}}{\text{cantitate consumată}}\right)$ vor trebui $\frac{75}{100} = \frac{3{,}9068}{x}$; Deci $x = 5{,}21$ g. hidrogen.

Cum 1 g mol. din orice substanță în stare de gaz ocupă 22,4 litri la temperatura de 0° și presiunea de 760 mm, va trebui să știm ce volum molecular ocupă cantitatea de 5,21 g Hidrogen necesară hidrogenării.

Dacă 2 g H ocupă la 0° și 760 mm 22,4 l, 5,21 g H va ocupa $\frac{5{,}21 \times 22{,}4}{2} = 58{,}35$ l.

Conform problemei ni se cere volumul de H la 10° și 25 atmosfere (25 atmofere $= 25 \times 760 =$ 19.000 mm).

Acest volum este dat de relația

$V_{t^\circ} P_{t^\circ} = V_{o^\circ} P_{o^\circ} (1 + \alpha t)$ din care scoatem valoarea

$$V_{t^\circ} = \frac{V_{o^\circ} P_{o^\circ} (1 + \alpha t)}{P_{t^\circ}}$$

Inlocuind obținem volumul de Hidrogen necesar.

$$V_{20^\circ} = \frac{38{,}35.760\,(1 + 0{,}00366.20)}{19000} = 2{,}49 \text{ litri.}$$

Problema 234

Să se găsească cinci numere consecutive, primul divizibil cu 5, al doilea cu 7, al treilea cu 11, al patrulea cu 13 și al cincilea cu 17.

L. C. Vasile
elev, Tecuci

Soluția I-a. Ținând seama de enunț, notăm numerele 5a, 7b, 11c, 13d, 17e unde a, b, c, d, și e sunt numere întregi.

Avem

$$13d = 17e - 1, \quad \text{sau}$$

$$d = \frac{17e-1}{13} = e + \frac{4e-1}{13} = e + k_1;$$

$$e = \frac{13k_1 + 1}{4} = 3k_1 + \frac{k_1 + 1}{4} = 3k_1 + k_2;$$

$$k_1 = 4k_2 - 1,$$

de unde

$$d = 4(4l_2 - 1) + k_2 = 17k_2 - 4.$$

Mai putem scrie

$$11c = 13d - 1 = 13(17k_2 - 4) - 1 = 221k_2 - 53;$$

$$c = \frac{221k_2 - 53}{11} = 20k_2 - 4 + \frac{k_2 - 9}{11} = 20k_2 - 4 + k_3;$$

$$k_2 = 11k_3 + 9,$$

de unde

$$e = 20(11k_3 + 9) - 4 + k_3 = 221k_3 + 176.$$

Acum avem

$$7b = 11c - 1 = 11(121k_3 + 176) - 1; \quad \text{sau}$$

$$7b = 2431k_3 + 1935, \quad \text{de unde}$$

$$b = \frac{2341k_3 + 1935}{7} = 347k_3 + 276 + \frac{2k_3 + 3}{7}$$

sau

$$b = 347k_3 + 276 + k_4;$$

$$k_3 = \frac{7k_4 - 3}{2} = 3k_4 - 1 + \frac{k_4 - 1}{2} = 3k_4 - 1 + k_5$$

$$k_4 = 2k_5 + 1. \quad \text{Deci}$$

$$b = 347[3(2k_2 + 1) - 1 + k_5] + 267 + 2k_5 + 1;$$

sau

$$b = 2431k_5 + 971$$

In fine,

$5a = 7b - 1 = 7(2431\,k_5 + 971) - 1 = 17017\,k_5 + 6796$;

de unde

$$a = \frac{17017\,k_5 + 6796}{5} = 3403\,k_5 + 1359 + \frac{2k_5 + 1}{5}$$

notăm

$$\frac{2k_5 + 1}{5} = k_6, \quad \text{deci} \quad k_5 = \frac{5k_6 - 1}{2} =$$

$$= 2k_6 + \frac{k_6 - 1}{2} = 2\,k_6 + k_7,$$

de unde $k_6 = 2k_7 + 1$; Rezultă

$a = 17017\,k_7 + 8166.$

Primul număr $N = 5a = 85085\,k_7 + 40830.$

Deci numerele căutate sunt:

$k_7 = 0$; 40830, 40831, 40832, 40833, 40834

$k_7 = 1$; 125915; 125916; 125917; . . .

$k_7 = 2$; 211000; 211001; etc. . . .

Soluţia II-a. Notăm cu N primul număr din cele cinci numere consecutive. Fie $N = 5\,k$ (1)

Vom exprima pe k succesiv ca să verifice toate relaţiile impuse de enunţ.

$N + 1 = 5\,k + 1 = 7k_1$, de unde rezultă $k = 7\,k_2 + 4$.

Deci

$$N = 5\,(7\,k_2 + 4); \qquad (2)$$

$N + 2 = 35\,k_2 + 22 = 11\,k_3$, de unde

$k_2 = 11\,k_4$, deci

$N = (577\,k_4 + 4) = 385\,k_4 + 20$ (3)

$N + 3 = 385\,k_4 + 23 + 13\,k_5$, de aici,

$k_4 = 13\,k_6 + 2$ şi prin urmare

$N = 385\,(13\,k_6 + 2) + 20 = 5005\,k_6 + 790.$

In fine

$N + 4 = 5005\,k_6 + 794 = 17\,k_7$, de unde rezultă

$$k_6 = 17\,k_8 + 8.$$

Prin urmare

$$N = 5005\,(17\,k_8 + 8) + 790$$

sau

$$N = 85085\,k_8 + 40830 \qquad (5)$$

Astfel am ajuns la acelaş rezultat ca la soluţia I-a, unde k_8 poate fi zero sau orice număr întreg.

Problema 246

Să se arate că dacă

$$\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg} a\ \operatorname{tg} b$$

avem

$$\cos 2\theta = \frac{\cos 2a + \cos 2b}{1 + \cos 2a\ \cos 2b}$$

M. I. Adam

Soluţia I-a. Relaţia de condiţie se mai poate scrie

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg} a.\ \operatorname{tg} b$$

Ridicând la patrat, ţinând seama că

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$$

efectuând, obţinem

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1 - \cos 2a - \cos 2b + \cos 2a\,\cos 2b}{1 + \cos 2a + \cos 2b + \cos 2a\,\cos 2b}$$

$$\frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\cos^2\theta - \sin^2\theta} = \frac{1 + \cos 2a\,\cos 2b}{\cos 2a + \cos 2b},$$

Inversând fracţiile şi ţinând seama că

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ şi $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta$

obţinem relaţia din enunţ.

$$\cos 2\theta = \frac{\cos 2a + \cos 2b}{1 + \cos 2a\,\cos 2b}.$$

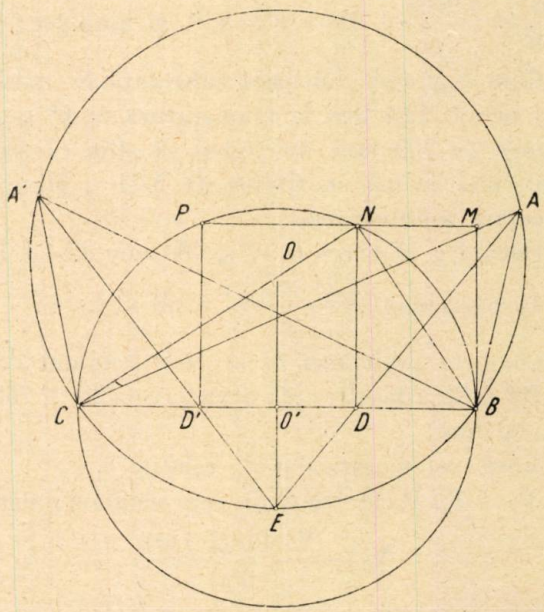
Problema 280

Să se construiască un triunghiu ABC, *în care cunoaştem latura* $BC = a$, *unghiul opus* A, *ştiind că bisectoarea lui* A *tae pe* BC *într'un punct* D, *aşa fel încât* $BD \times DC = m^2$.

N. Gaiu

Soluţie. Facem următoarea construcţie:

Luăm un segment de dreaptă $\overline{BC} = a$ şi apoi construim cercul O în care BC este capabil de unghiul A; construim un unghiu $BAC = \sphericalangle A$ şi ducem cercul circumscris triunghiului ABC. Pe BC apoi



ca diametru construim un alt cerc O′ și din B ridicăm o perpendiculară BM pe BC astfel ca $BM = m$. Din M ducem apoi o paralelă la BC care taie cercul O′ în N și P. Coborîm acum perpendicularele ND și PD′ pe BC.

Fie E mijlocul arcului BC care satisface relația arc $BC = \sphericalangle 2A$.

Dreptele ED și ED′ taie a doua oară cercul O în A și A′. Triunghiurile ABC și A′BC sunt triunghiurile cerute.

Într'adevăr: Triunghiul NBC este dreptunghic în N; iar $ND \perp BC$. Avem deci

$$\overline{BD} \times \overline{DC} = \overline{ND}^2.$$

Dar $\overline{ND} = \overline{BM} = m.$

Așa dar $\overline{BD} \times \overline{DC} = m^2.$

Este necesar să existe inegalitatea $2m \leqslant a$.

Punctul E fiind la mijlocul arcului BC avem arc BE = arc CE și deci $\sphericalangle BAD = \sphericalangle CAD$.

Rezultă că AD este bisectoarea unghiului A.

În mod analog se arată că și triunghiul A′BC verifică condițiile cerute.

Problema 299

Cifrele sutelor, zecilor și unităților unui număr fiind a, b, c, se formează numărul care are ca cifră a sutelor $a + b$, a zecilor $b + c$ și unităților $c + a$. Să se arate că suma celor două numere e divizibilă cu 3. Ce condiție să îndeplinească numărul dat pentru ca suma lor să fie multiplu de 12.

D. I. Flondor

Soluție. Fie N numărul dat, N_1 numărul format prin combinarea cifrelor numărului N. Avem:

$$N + N_1 = \overline{abc} + \overline{|a+b|\,|b+c|\,|c+a|} \text{ sau}$$

$$N + N_1 = 100a + 10b + c + 100a + 100b + 10b + 10c + c + a$$

$$N + N_1 = 201a + 120b + 12c = 3(67a + 40b + 4c).$$

Numărul $N + N_1$ conținând pe 3 ca factor se divide prin 3. Pentru ca suma numerelor să fie multiplu de 12 trebue ca a să fie multiplu de 4, adică 4 sau 8, trebuind să avem $a \leqslant 9$. De asemenea pentru a forma numărul N_1 trebue ca: $a + b \leqslant 9$; $b + c \leqslant 9$; $c + a \leqslant 9$.

Exerciții

Demonstrați

$$\left(\frac{125}{64}\right)^{10} < 1000$$

EXERCIȚII ȘI PROBLEME PROPUSE

Probleme

A, B = puncte fixe; Locul geometric M?

$$\frac{1}{AM} - \frac{1}{BM} = \text{const.}$$

545. Pe baza ABC a unei piramide SABC se ia un punct M prin care se duc dreptele paralele muchiilor SA, SB, SC până la intersecția lor cu fețele SBC, SCA, SAB respectiv în punctele P, Q, R. Notând

$$\overline{SA} = a,\ \overline{SB} = b,\ \overline{SC} = c;$$

$$\overline{MP} = x,\ \overline{MQ} = y,\ \overline{MR} = z,$$

să se găsească suma

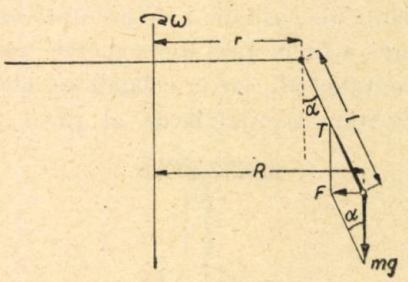
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}.$$

P. Modenov (Moscova)

546. Să se demonstreze că suma ariilor pe care le determină un plan paralel cu un altul, pe care sunt așezate trei sfere de raze diferite, este maximă atunci când planul trece prin centrul de greutate al triunghiului ale cărui vârfuri sunt centrele celor trei sfere. Discuție.

O. Sacter

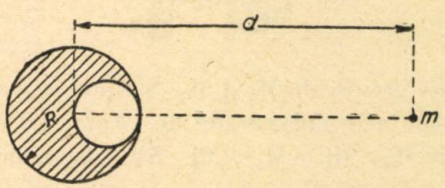
547. Pe un disc care se învârtește este fixat un fir cu plumb care se stabilește sub unghiul a față de verticală. Este cunoscută distanța r dela punctul de suspensie până la axa de rotație și lungimea



firului l. Să se afle viteza unghiulară de rotație. (Figura).

C. d. P.

548. Într'o sferă de plumb de rază R este făcută o cavitate sferică, a cărei suprafață atinge sfera și trece prin centrul ei. Masa sferei înainte de a fi

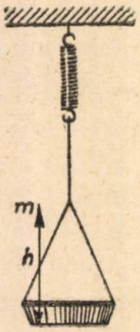


făcută cavitatea a fost egală cu M. Cu ce forță (după legea gravitației universale) sfera de plumb

va atrage sfera mică de masă m, care se află la distanța d dela centrul sferei de plumb pe dreapta care unește centrele sferelor și cavității (figura).

C. d. P.

549. Pe un taler suspendat de un arc cu coeficientul de elasticitate k, cade dela înălțimea h greutatea masei m și rămâne pe taler (figura). Talerul



începe să oscileze. Să se afle amplitudinea oscilațiilor talerului. (Pentru simplificare să se examineze cazul când masa talerului poate fi neglijată).

C. d. P.

550. Să se arate că într'un triunghiu oarecare există relația

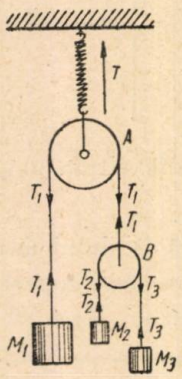
$$(\cos A + \cos B \cos C) \sin A =$$

$$= (\cos B + \cos C \cos A) \sin B =$$

$$= (\cos C + \cos A \cos B) \sin C = \sin A \sin B \sin C.$$

C. Ionescu-Țiu

551. Printr'un scripete A de greutate neglijabilă este trecut un fir la unul din capetele căruia este fixată greutatea M_1. iar la celălalt un alt scripete tot de greutate neglijabilă de al cărui fir sunt



atârnate greutățile M_2 și M_3. Scripetele A cu toate greutățile este atârnat de un cântar cu arc.

$M_2 \neq M_3$, $M_1 > M_2 + M_3$. Să se determine accelerația greutății M_1 și tensiunea arătată de cântarul cu resort.

C. d. P.

552. Se dă un cerc O și un punct A fix pe cerc. Un unghiu constant cu vârful în A se deplasează, laturile sale AB, BC fiind coarde ale cercului. Se cere:

Locul punctului de intersecție al medianelor triunghiului ABC, precum și locul punctului de intersecție al înălțimilor triunghiului ABC.

V. Claudian

553. Se consideră o piramidă regulată, poligonul de bază având n laturi. Fie x unghiul plan al diedrului format de planul bazei cu o față, iar y unghiul plan al diedrului a două fețe alăturate. Să se demonstreze relația:

$$\cos \frac{y}{2} = \sin \frac{\pi}{n} \sin x.$$

Gh. Dumitrescu

554. In triunghiul ABC medianele din B și C în tâlnesc înălțimea AA' în punctele M și N.

Să se demonstreze relația:

$$\frac{\overline{MA'}}{\overline{MA}} + \frac{\overline{NA'}}{\overline{NA}} = 1.$$

Gh. Bazacov

555. In triunghiul $A_1A_2A_3$ se iau punctele $B_1B_2B_3$ respectiv pe laturile A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 astfel încât dreptele A_1B_1, A_2B_2 și A_3B_3 sunt concurente într'un punct N din interiorul triunghiului.

Fie

$$\frac{A_2B_1}{B_1A_3} = p_1; \quad \frac{A_3B_2}{B_2A_1} = p_2 \text{ și } \frac{A_1B_3}{B_3A_2} = p_3;$$

$$\frac{A_1N}{NB_1} = a_1; \quad \frac{A_2N}{NB_2} = a_2 \text{ și } \frac{A_3N}{NB_3} = a_3.$$

Să se arate că:

$$(1 + p_1)(1 + p_2)(1 + p_3) = a_1a_2a_3$$

și

$$a_1a_2a_3 = 2 + a_1 + a_2 + a_3.$$

Eugen Onofraș
student, Iași

556. Un atom de heliu ionizat are un electron pe prima orbită, de rază 0,26 Å. Să se calculeze forța electrostatică cu care se atrag nucleul și electronul precum și forța cu care s'ar atrage masele lor dacă n'ar fi electrizate. Să dă masa nucleului de heliu $3{,}34.10^{-24}$ grame și constanta atracției universale $6{,}67.10^{-8}$.

Nicolae Stănescu

557. Energia electrică înmagazinată de un acumulator format din 2 celule prin încărcarea lui timp de 12 ore cu un curent de 5A, este fo-

losită la nichelarea unui obiect cu aria de 5 dm^2. Știind că se lucrează cu un curent de 0,5A pentru fiecare decimetru patrat din suprafața obiectului și că acumulatorul are un randament de 0,8; să se afle grosimea stratului de nichel depus și timpul necesar nichelării.

Mihai Stănescu
elev, București

558. O pendulă este așezată la nivelul mării unde $g = 981$ cm. sec^{-2} și raza pământului $R = 6360$ km. Să se determine sensul și variația zilnică dacă este mutată la o altitudine $z = 2120$ metri.

I. Munteanu
elev, Lupeni

559. Un patrulater *convex* ABCD are laturile $AB = BC = CD$ și $\sphericalangle BAD = 90°$. Se notează $\sphericalangle ABC = \alpha$.

1°. Să se arate că dacă patrulaterul îndeplinește condițiile de mai sus, atunci: $60° < \alpha \leqslant 90°$.

2°. În cazul $\alpha = 75°$ să se construiască patrulaterul numai cu rigla și compasul.

Să se calculeze, în acest caz, valoarea unghiului ABD.

Gh. D. Simionescu

560. Fie triunghiul isoscel ABC ($AB = AC$) și un punc M în planul triunghiului iar M_1, M_2, M_3 proecțiile lui M respectiv pe BC, AB, AC. Să se afle locul lui M astfelca $\overline{MM_1}^2 = \overline{MM_2} \cdot \overline{MM_3}$.

Marius Iosifescu
elev, Ploești

561. Pe laturile AB, AC ale triunghiului ABC, ca baze, construim două triunghiuri isoscele ABK, ACJ astfel că unghiurile dela bază sunt de 75°; iar pe BC, ca bază, construim un triunghiu isoscel BIC, cu unghiurile dela bază, de 30°.

Să se arate că cercurile ABK. ACJ, BCI trec printr'un punct comun M, care este situat pe dreapta AI.

N. N. Mihăileanu

562. Două prisme exagonale regulate sunt înscrise în aceiași sferă, prima are aria laterală S_1 și volumul maxim V_1, iar a doua are volumul V_2 și cu aria laterală maximă S_2.

Să se stabilească relația

$$2 \cdot S_1 \cdot V_2 = 3 \cdot S_2 \cdot V_1$$

Muedin M. Sureia
elev, Constanța

563. Mediatoarele laturilor BC, AC și AB, taie cercul circumscris respectiv în A_1, B_1, C_1. **Notând cu S, R, r, aria, raza cercului circumscris și raza cercului înscris triunghiului ABC și S_1 aria triunghiului $A_1B_1C_1$, să se arate că**

$$R \cdot S \cdot = 2rS_1 .$$

Gh. I. Bercea
elev, Oravița

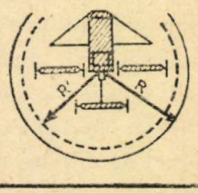
564. Să se arate că polinomul:

$$\frac{npx^m}{(m-n)(m-p)} + \frac{pmx^n}{(n-m)(n-p)} + \frac{mnx^p}{(p-m)(p-n)} - 1$$

este divizibil prin $(x-1)^3$. Să se determine câtul diviziunii.

Cezar Coșniță

NOUTĂȚI DIN ȘTIINȚA ȘI TEHNICA SOVIETICĂ



«Explozia rece».

Cu toate că luminiscența corpurilor solide se cercetează de mai bine de 300 ani, teoriile fundamentale asupra luminiscenței fosforului cristalizat, au fost create numai în ultimele două decenii, mai ales datorită lucrărilor fizicienilor sovietici: S. I. Vavilov, D. I. Blohințev, E. N. Adirovici, V. L. Levșin, V. V. Antonova-Romanovschi și alții.

Nu de mult, s'a prevăzut de către E. I. Adirovici pe cale teoretică, iar apoi s'a descoperit prin experiență un nou fenomen interesant, denumit de el «explozia rece» [1]).

In literatură se afirmă deobiceiu, ca un fapt dela sine înțeles, că încălzirea fosforului accele-

[1]) E. I. Adirovici. Câteva chestiuni asupra teoriei luminiscenței cristalelor. Gostehizdat, 1951,

rează fosforescența prin energia de lumină înmagazinată în el, iar că răceala oprește desfășurarea acestui proces. Aceasta se verifică printr'un imens material experimental. După concepția actuală, absorbția luminii de către fosforul cristalizat duce la ruperea electronului de atomul activ și la formarea unui «centru de fosforescență» ionizat. Recombinarea electronului cu centrul de fosforescență ionizat este însoțită de emisiune de lumină. Dar, între ionizare și recombinare poate trece un timp însemnat (apreciabil) și, călătorind pe cristal, rămâne în drum din cauza defectelor structurii lui (așa cum se denumește gradul de alipire), de care se poate elibera numai datorită oscilației termice a rețelei cristalului. Incălzirea cristalului ușurează eliberarea electronilor cu gradul de alipire și îi accelerează fosforescența; răceala, dimpotrivă, reține electronii la nivelele de alipire, slăbindu-i astfel luminiscența.

Insă în această schemă, în care se descrie procesele petrecute în fosforul cristalizat, nu se ține seama că la recombinarea electronului cu centrul de fosforescență neutralizat, este în stare de excitare și că fosforescența apare numai la trecerea lui în stare normală. Intrucât pentru ionizarea centrului de fosforescență excitat, este necesară o energie mai puțin însemnată decât pentru ionizarea unui centru neexcitat — de aceea oscilațiile termice ale rețelei cristaline pot provoca o ionizare termică a centrului excitat. Prin urmare acest electron va fi din nou rupt de atomul activ și emisiunea de lumină nu va mai avea loc. Incălzirea cristalului se va mări probabil prin ionizare termică, micșorând fosforescența. Dimpotrivă, răcirea cristalului micșorează, probabil, ionizarea termică, mărind fosforescența.

Influența temperaturii se manifestă nu numai la eliberarea electronilor cu un nivel de alipire, dar și la ionizarea termică a centrelor de fosforescență și, față de intensitatea fosforescenței, acționează în direcții contrarii. Incălzirea cristalului favorizează eliberarea electronilor cu un nivel de alipire, contribuind astfel la intensificarea fosforescenței; dar, în același timp, mărește ionizarea termică a centrelor de fosforescență, slăbind fosforescența.

Dacă cel de al doilea proces petrecut cu un tip oarecare de cristal de fosfor se manifestă ca preponderant într'un interval oarecare de temperatură, atunci un astfel de fosfor se va comporta într'un mod neobișnuit și anume: fosforescența lui va fi slăbită la încălzire și se va intensifica la răcire. Dacă răcirea se produce foarte repede, atunci trebue să se producă o explozie vie de luminiscență — «explozia rece».

Experiențele făcute cu $Zn\,S$ — fosfor, au confirmat pe deplin această prevedere. Fosforul se pune în două eprubete, pe care le excităm cu lumina unei lămpi cu mercur și atunci el va licări (fosforescent) la temperatura camerei până la încetarea fosforescenței. La contactul fundului eprubetei cu suprafața aerului lichid, se produce o explozie, care durează aproximativ 10 secunde.

Descoperirea «exploziei reci» joacă un rol mare în studiul ulterior al luminiscenței fosforului cristalizat.

2. *Legătura telefonică fără baterie*

La institutul interunional de cercetări științifice pentru industria carboniferă s'a prelucrat și actualmente s'a înrădăcinat în mine întrebuințarea unei noi legături telefonice, fără baterie. In acest sistem microfonul cu cărbune este înlocuit prin niște electromagneți, care numai necesită să fie alimentați dela sursă.

Drept telefon, s'au întrebuințat niște capsule electromagnetice (fig. a). Un indus de fer, ce

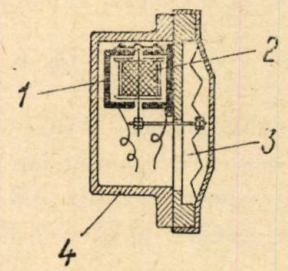


Fig. *a*

înconjoară bobina, la un capăt este fixat de corpul suportului magnetului, așezat într'un câmp magnetic constant. Celălalt capăt al indusului este fixat rigid de membrana gofrată. Datorită curenților magnetici reciproci și constanți, precum și bobinei cu curent, indusul se pune în mișcare oscilantă, în urma căreia membrana efectuiază oscilații.

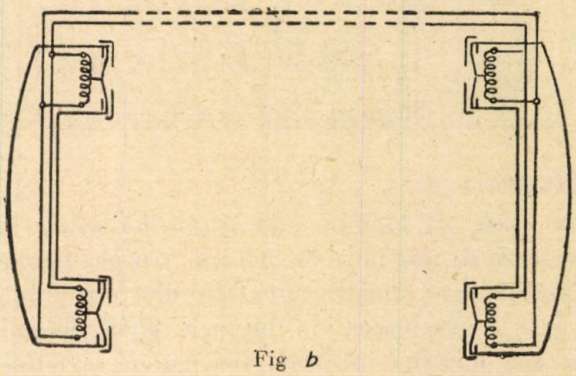


Fig *b*

Când capsula se utilizează ca microfon, atunci oscilațiile sonore acționează asupra membranei, care — la rândul său — pune în mișcare indusul.

Oscilaţiile indusului produc variaţii în câmpul magnetic al magneţilor constanţi, datorită cărora, în bobina ce le înconjoară, se induce un curent alternativ, a cărui frecvenţă şi amplitudine corespund cu oscilaţiile membranei.

Schema comunicării cu tuburile telefonice este arătată în fig. b. In locul inductorului rotativ, s'au folosit inductori cu impuls.

Recepţia apelului sonor se efectuiază la microtelefon şi, deaceea şi necesitatea ca soneria să fie desfiinţată.

Un astfel de sistem de legătură telefonică poate lucra la o distanţă de peste 20 km. Datorită lipsei bateriei de acumulatori şi microfoanelor cu cărbuni, se asigură evitarea primejdiilor pentru muncile din mine, unde există gaze uşor inflamabile.

Aparatura telefonului fără baterie are uneori un volum şi o greutate mai mică, decât cel utilizat anterior.

$x = 1 + \frac{1}{x}$

PAGINA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

S'au evidenţiat prin rezolvări de probleme din Revista Matematică şi Fizică, primite în cursul lunii Februarie 1952: *Iosifescu Marius* (clasa IX, Piteşti), *Torjescu Florin* (clasa IX, Ploeşti), *Culiţă T. Cezar* (clasa X, Focşani), *Istrate Mircea* (Focşani), *Butunoiu Emil* (Brăila), *Păun Gheorge* (clasa X Piteşti), *Decu D. Ionel* (Brăila), *Petrovici Liviu* (clasa X, Oradea), *Bichir Ionel* (Bârlad), *Codreanu Irinel* (Buzău), *Lupu Vasile* (Rădăuţi), *Silişteanu Mihail* (Oraşul Stalin), *Dulamă P. I.* (Turnu-Severin), *Condrea Nelu* (clasa IX, Bârlad), *Maglaviceanu Nelu* (Calafat) *Seurtu E. Florin* (Oraşul Stalin), *Bondar Constantin* (anul IV Şcoala hidrotehnică Constanţa), *Ursache Eugen* (Iaşi).

* * *

In cursul lunii Februarie 1952 am primit soluţii bune la cel puţin 5 probleme, sau probleme propuse (P), note (N), articole (A), dela următorii:

AIUD. Clasa X-a: Olteanu Victor (364, 388, 392, 429, 437, 443, 444, 445).

ALEXANDRIA. Classa XI-a B. Guja Nicolae (257, 259, 278, 298, 340, 341, 342, 349, 358, 433).

ARAD. Clasa XI-a: Ioanaş Ioan (307, 323, 328, 505, E: 119).

BACĂU. Clasa X-a. Cozma Mihai (299, 427, 480, 499, 501, 506, 508), Clasa XI-a: Munteanu Epaminonda (242, 264, 279, 364, 371, 392, 426, 443, 454, 465, 499, P).

BAIA MARE. Cadar Ioan (352, 358, 359, 387, 431, 461, 481, 499, E: 137, P), Couţi Romeo (264, 271, 278, 289, 299, 353, 358, 363, 371, 387, 439, 440, 442, 449, 466, 468, 508 P).

BÂRLAD. Şcoala Tehnică Financiară Anul I. Condrea E. Petre (229, 290, 353, 374, E: 70, 99, 108, 109, 113, 119, 121, 127); Liceul de băieţi, clasa 9 B. Condrea Nelu (321, 335, 338, 346, 348, 351, 353, 354, 369, 374, 377, 386, 392, 404, 443, 450, 468, 484, E: 70, 108, 109, 113. 119, 121, 122, P). Clasa X-a. Bichir Ionel (231, 260, 264, 270, 283, 289, 329, 335, 340, 359, 362, 363, 364, 365, 367, 368, 369, 370, 371, 375, 383, 387, 392, 404, 408, 429, 432, 436, 439, 440, 443, 487, 498), Clasa XI-a. Coman Marcel (230, 251, 278, 313, 323, 343, 345, P).

BEIUŞ-BIHOR. Clasa XI-a: Kiss Francisc (474, 475, 476, 481, 482, 488, 490).

BRĂILA. Clasa XI-a. Butunoiu Emil (358, 364, 367, 369, 371, 372, 374, 375, 377, 379, 386, 388, 392, 404 406, 410, 413, 415, 416, 429, 432, 436, 437, 439, 443, 444, 445, 449, 454, 456, 459, 463, 466, 468, 472, 474, 475, 476, 480, 481, 484, 485, 488, 505, 508), Decu D. Ionel (242, 245, 264, 270, 274, 280, 283, 290, 297, 300, 303, 306, 313, 317, 321, 329, 346, 353, 369, 404, 413, 415, 429, 432, 436, 440, 443, 445, 449, 456, 463, 466, 475, 480, 481, 484, 488, 508), Iordache Mitică (363, 374, 375, 386, 392, 448, 456, 459, 466, 488).

BUCUREŞTI. *Şcoala de Statistică* Anul I. Sandu Olimpia (E: 134, 135, 137, 138, 139, 140, 145, 149, 150, 153), *Liceul 4 băieţi*. Clasa IX-a B. Filimon Constantin (290, 307, 352, 369, 386, 429), Clasa XI-a E. Stănescu Mihai (257, 305, 307, 346, 347, 369, 388, 404, 422, 426, 454, 455, 461, 466, 474, 476, 482, 486, 493, 496, P). *Liceul 5 băieţi*. Matei Gheorghe (246, 263, 301, 313, 358, 364, 371, 429, 437, 441, 457, 466, 488), *Liceul 6 băieţi*. Oprea Constantin (300, 306, 322, 440, 443, P). *Liceul 10 băieţi*. Clasa X-a C: Nicolae Mircea (257, 263, 353, 354, 374, 468), Şincan Corneliu (392, 460, 465, E: 145, 147, 153), Stoicescu Teodor (226, 241, 255, 259, 271, 300, 343, 348, 350, 482), Vintilă N. Virgiliu (315, 371, 374, 379, 392, E: 67, 109, 120).

BUZĂU. Clasa V-a: Suciu Tita (E: 75, 104, 108, 114, 115), Clasa X-a: Codreanu Irinel (269, 270, 292, 297, 300, 312, 316, 317, 335, 341, 342, 345, 346, 347, 371, 388, 389, 401, 410, 429, 433, 434, 441, 449, 500, 505, 506, 508), Clasa XI-a: Bârliba Eugenia (298, 305, 317, 353 363, 374, 404, 415, 479, 506), Negulescu Paul (351, 352, 354, 358, 367, 401, 474, 422, 439, 455, 468, 497, 501).

CALAFAT. Maglaviceanu Nelu (375, 377, 379, 382, 383, 386, 387, 388, 389, 392, 401, 404, 416, 419, 420, 426, 427, 429, 437, 440, 443, 445, 450, 456, 457, 458, 459, 466, P), Plăviţ I. Gheorghe (259, 268, 269, 297, 303, 315, 316, 317, 349 369, 371, 466, 488, 499), Tobă Petre (358, 359, 363, 364, 367, 369, 371, 375, 379, 386, 389, 398, 404).

CĂLĂRAŞI. Clasa XI-a. Nicolescu A. Ştefan (257, 375, 386, 387, 390, 401, 404, 426, 432, 439, 468).

CARANSEBEŞ. Ciric Ioan (448, 459, 484, E: 114, 119, 130).

CONSTANȚA. Școala medie hidrotehnică. Anul III. Ibadula Zia (269, 277, 278, 290, 307, 317, 325 351, 367, 369, 371, 386, 401, 439, 455, 466, 468), Muedin Sureia (314, 322, 350, 352, 357, 367, 372, 379, 390, 408, 422, 428, 459, 469,472, 474, P), Anul IV. Bondor Constantin (297, 329, 363, 377, 413, 416, 429, 460, 466, 468, 473, 474, 475, 476, 477, 481, 485, 486, 488, 493, 495, 496, 497, 499, P), Mircea M. Vasile (269, 290, 291, 292, 317, 342, 346, 351, 369, 371, 386, 401, 439, 466, 468), Șatrapel Tașcu (264, 266, 277, 298, 303, 313, 379, 428, 431, 434, 440, 460).

CRAIOVA. Popescu Pavel (350, 386, 387, 392, 410, 426, 432, 476, 484, E: 79, 107, 109, P), Tutunaru Gh. Gheorghe (290, 292, 369, 392, 426, 427), Vasiescu Tamara (317, 351, 377, 386, E: 83).

FOCȘANI. Clasa X-a: Culiță T. Cezar (263, 264, 273, 285, 289, 290, 291, 292, 298, 307, 321, 323, 324, 329, 332, 333, 335, 341, 342, 343, 346, 354, 358, 364, 367, 368, 369, 372, 375, 377, 379, 386, 387, 388, 389, 400, 403, 404, 410, 416, 427, 429, 433 434, 448, 449, 463, 468, 484, P). Ionescu Stoian (426, 432, 436, 438, 443, 445, 456, 457, 466, 468, 474, 476, 477, 483, 484, 486), Istrate Mircea (263, 264, 283, 289, 290, 291, 297, 298, 299, 306, 307, 311, 329, 335, 283, 289, 290, 291, 29, 298, 299, 306, 307 311, 329, 335, 336, 347, 354, 368, 369, 374, 377, 386, 388, 389, 429, 439, 448, 454, 461, 466, 477, 481, 482, 484, 486, 487).

GIURGIU. Școala Tehnică Profesională. Anul IV: Ghinescu M. Nicolae (257, 346, 350, 398, E: 73, 77, 79, 102, 107, 114, 115, 120, 121, 123, 125, 137, 138, 142, 147).

IAȘI. Clasa X-a: Ursache Eugen (241, 244, 245, 251, 252, 263, 269, 270, 275, 278, 290, 297, 298, 300, 306, 346, 364, 369, 436, 439, 449, 466, 468, 475, P) Magda Rădulescu 475 (E: 142, 145, 147, 148, 149, 150.).

LUGOJ. Clasa XI-a. Nahaiciuc T. Mihai (343, 349, 350, 351, 352, 415, 421, 443, 464, 471, 480, 488, 489, 491, 499, E: 122. 128).

ORADEA. Clasa X-a B. Petrovici Șt. Liviu (234, 326, 328, 333, 372, 374, 387, 416, 420, 422, 429, 433, 471, 477, 479, 480, 482, 484, 485, 488, 495, 499, 501, 502, 505, 506, 509, 510).

ORAȘUL STALIN. Clasa XI-a: Doca Ion (323, 364. 368, 369, 443, 448, 461,), Coandă I. Viorel (240, 242, 260, 263, 269, 271, 305, 317, 341, 342, 348, 363, 372, 433, 439, 468, 476, 491, 495), Goia Ion (242, 246, 245, 257, 260, 297, 301, 303, 306, 308, 316, 320, 323, 324, 325, 333, 429), Scurtu E. Florin (263, 264, 271, 276, 279, 285, 295, 350, 408, 422, 426, 440, 445, 474, 476. 479, 482, 484, 488, 489, 493, 496, 499, 505, 506, P), Silișteanu Mihai (237, 257, 268, 280, 294, 299, 305, 350, 356, 360, 396, 401, 407, 419, 426, 431, 441, 446, 476, 482, 483, 484, 488, 491, 493, 495, 496, 499, 505, 508, P), Rudeanu Sergiu (294, 321, 456, 457, 458, 459, 466, 468, 474, 476, 481, 484, 488, 491, 495, 496, 499). Student anul I Klausner Robert (364, 368, 374, 375, 386, 392, 456, 466).

PITEȘTI. Clasa IX A. Iosifescu V. Marius (71, 79, 208, 230, 471, 472, 473, 475, 476, 477, 479, 480, 481, 482, 483, 484, 485, 486, 487, 488, 489, 490, 491, 493, 494, 495, 496, 497, 498, 499, 500), Clasa X A, Păun Gh. (269, 270, 274, 276, 278, 291, 292, 294, 298, 300, 303, 305, 306, 316, 317, 320, 321, 322, 313, 329, 347, 348, 354, 368, 389, 390, 404, 405, 432, 448, 449, 456, 3457, 461, 464, 466, 480, P).

PLOIEȘTI. Clasa VII B. Torjescu Mihai (E: 22, 32, 69, 79, 82, 109, 122, 137, 142, 147, 148), Clasa IX-a: Făgăraș Constantin (314, 334, 364, 368, 375, 392, 404, 434, 443, 466), Mihai Julian (229, 348, 358, 371, 375, 404, 466 E: 69, 109), Popescu I. Dumitru (348, 351, 354, 359, 369, 375), Pușcașu A. Alexandru (231, 257, 259, 266, 269, 317, 358, 371, 375 410, 455,), Torjescu Florin (226, 227, 229, 231, 229, 236, 241, 246, 248, 257, 259, 260, 263, 264, 266, 269, 271, 273, 274, 276, 277, 279, 283, 285, 290, 292, 294, 295, 298, 300, 303, 306, 307, 314, 317, 320, 322, 323, 324, 326, 332, 333, 335, 337, 341, 342, 345, 346, 348, 349, 350, 355, 359, 363, 364, 367, 368, 369, 370, 371, 372, 374, 387, 351, 388, 392, 401, 403, 407, 410, 416, 433, 434, 443, 445, 448, 455, 457, 458, 459, 460, 461, 463, 475, 477, 480, 481, 482, 484).

RĂDĂUȚI. Clasa IX-a. Chelba Constantin (294, 307, 333, 335, 367, 371, 439, 455, 468, 482, 484), Clasa XI-a: Lupu Vasile (269, 191, 292 296, 297, 298, 299, 300, 306, 307, 317, 321, 347, 364, 371, 372, 379, 401, 413, 445, 454, 466, 473, 474, 476, 480, 484, 496, P).

RÂMNICUL-SĂRAT. Clasa XI-a: Andrei Șt. Gheorghe (271, 323, 353, 354, 368, 432, 448, 458, 501).

ROMAN. Clasa XI-a: Buga I. Ioan (329, 353, 374, 441, 475, 484, 505, 506, 509), Dumea Cezar (323, 351, 353, 367, 368, 369, 371, 372, 375, 379, 389, 410, 413, 416, 448, 458, 459, 461, 466, 484).

SLATINA-OLT. Clasa X-a. Mitrache Marin (375, 401, 422, 426, 437, 448, 445, 484, P), Mișcă Petre (264, 298, 299, 301, 351, 369, 371, 375, 443, 484), Clasa XI-a Cochințoiu St. Ion (371, 408, 499, E: 76, 77, 79, 83, 88, 91, 95, 99, 100, 102, 105, 107, 109, 114, 116, 120, 123, 124, 125, 129, 137, 138, 142, 147, 148, 149, 153, P).

TÂRGOVIȘTE: Clasa VII-a Oprea A Aurelian (E: 63, 72, 142, 147, 148, 149, P), Stoian I. Gheorghe (449, 452, 463, E: 136, 137), Clasa X-a: Andreescu Gh. Const. (290, 291, 292, 297, 300, 306, 307, 317), Clasa XI-a Oprea A. Nicolae (294, 296, 299, 325, 329, 374, 377,379, 388, 410, 416), Miclescu O.P) (325, 374, 448, 466, E: 123), Plămădeală T. Silvia (279, 363, 367, 369, 375, 387, 392, 484), Stroe R. Dumitru (290, 294, 296, 297, 300, 303, 306, 375, 377, 379, 387, 388, 389, 404, 410, 413, 456, 477).

TÂRGU-JIU. Clasa VIII-a. Clonda Ovidiu (E: 48, 107, 116, 125, 137).

TÂRGU-MUREȘ. Clasa IX-a: Weszely Tiberiu (227, 229, 263, 264, 273, 280, 278, 283, 298, 304 348, 363, 364, 374, 377, 379, 400, 413, 416, 420, 429, 443, 484).

TIMIȘOARA. Clasa XI-a: Golea Aurelian (377, 379, 387, 389, 392, 396), Ivanov L. Deiom (367 386, 398, 406, 407, 416, 426).

TURNU-SEVERIN. Clasa IX-a B. Păunescu Ion (434, 443, 497, E: 86, 92, 132, 142, 153), Zorileanu M. Dan (457, 458, 459, 497, 505, 508, E: 142, 145), Clasa X-a: Dulamă P. I. (377, 379, 389, 401, 403, 406, 410, 413, 415, 416, 422, 443, 448, 449, 450, 457, 459, 461, 463, 466, 468, 477, 482, 484, 486, 487, 488, 500), Zaharescu Marius (386, 443, 497, E: 147, 148), Clasa XI-a: Truică Nicoale (363, 375, 376, 389, 390, 401, 410, 448, 449, 459, 463, 477, 481, 483, 488, 497, 499).

VASLUI. Clasa XI-a: Ardeleanu Eduard (375, 429, 437, 443, 445, 458), Didilescu Sergiu (251, 265, 343, 437, 457, 458, P), Tămășanu Iulian (429, 432, 443, 458, 485).

REVISTA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

ORGAN AL SOCIETĂŢII DE ŞTIINŢE MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R.

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

APARE SUB ÎNGRIJIREA UNUI SECRETARIAT DE REDACŢIE

REDACŢIA: B-DUL 6 MARTIE, 63 — BUCUREŞTI
RAIONUL LENIN

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică şi fizică a şcolilor, precum şi orice material informativ care ar interesa redacţia noastră se vor trimite pe adresa de mai sus

ABONAMENTE:

Tarif general ... ... *Lei 60*

Tarif redus pentru elevi, studenţi şi profesori ... ... *Lei 10*

Abonamentele se fac numai prin:

Centrul de Difuzare a Presei

Pentru Bucureşti: Str. Const. Mille Nr. 14 — Telef. 5.28.90

Pentru Provincie: Centrul de Difuzare a Presei din Capitalele Regiunilor sau Raioanelor — Banca de Stat în Contul C.D.P. Nr. 038.068

CĂRTI APĂRUTE IN

EDITURA TEHNICĂ

LEXICONUL TEHNIC ROMÂN:

Vol. I (A—C)	952 pagini
Vol. II (D—H)	986 pagini
Vol. III (I—M)	1115 pagini

I. Creangă, Gh. Gheorghiev, A. Haimovici, N. Haimovici, O. Mayer, I. Popa şi M. Roth:

«CURS DE GEOMETRIE ANALITICĂ»
(traducere din limba rusă)
706 pagini, 40 lei

I. I. Privalov, S. A. Galpern:

«BAZELE ANALIZEI INFINITEZIMALE»
(traducere din limba rusă)
240 pagini, 10,07 lei

D. Papalexi:

«CURS DE FIZICĂ»
(traducere din limba rusă)
536 pagini, 27,84 lei

N. N. Buchholz, I. M. Voronkov, A. Manokov:

«CULEGERE DE PROBLEME DE MECANICĂ RAŢIONALĂ»
(traducere din limba rusă)
340 pagini, 12,07 lei

I. G. Petrovschi:

«LECŢII DE TEORIA ECUAŢIILOR INTEGRALE»
(traducere din limba rusă)
120 pagini, 4,25 lei

C. 315. — CENTRUL POLIGRAFIC Nr. 2. FILIALA 3.
Taxa poştală plătită în numerar conform aprobării Nr. 168.026/946

Lei 1.—

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE ȘI FIZICE DIN R.P.R.

KAT

E/1426

REVISTA MATEMATICĂ și FIZICĂ

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR

Elevi, pregătirea și desfășurarea examenelor din anul acesta trebue să constitue o etapă importantă pe drumul ridicării calității învățământului nostru la înălțimea sarcinilor construirii socialismului.

★

MAI

1952

5

EDITURA TEHNICĂ

REVISTA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

SUMARUL:

		Pag.
1.	*Facultăţile de Matematică şi Fizică de prof. N. Teodorescu*	101
2.	*Noţiunea de grup în matematici de Eugen Rusu* ...	103
3.	*Lumina rece de C. Ionescu-Timuş*	109
4.	*Chestiuni de examen*	116
5.	*Probleme rezolvate (298, 310, 311, 314, 347, 359)*	117
6.	*Exerciţii şi probleme propuse*	120
7.	*Exerciţii propuse pentru învăţământul elementar*	122
8.	*Din ştiinţa şi tehnica sovietică*	123
9.	*Poşta redacţiei*	124
10.	*Pagina rezolvitorilor de probleme*	125

ANUL III 5 MAI 1952

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR
KAT

REVISTA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ
PUBLICAŢIE PENTRU TINERET A SOCIETĂŢII DE MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ DIN R. P. R.
Anul III, Nr. 5 Mai 1952

FACULTĂŢILE DE MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

Prof. ***N. Teodorescu***
Fac. de Matematici şi Fizică Univ. C. I. Parhon Bucureşti

Epoca examenelor constitue pentru elevii clasei a XI-a o răscruce hotărîtoare a cărei apropiere trezeşte în ei preocupare. In faţa lor se deschid numeroase drumuri, multiple posibilităţi de a păşi în viaţă, de a-şi alege specialitatea cea mai potrivită.

In regimul burghezo-moşieresc această alegere nu era liberă. Inainte, numai o parte neînsemnată a tineretului şcolar putea urma Universităţile. Porţile facultăţilor erau aproape ermetic închise în faţa fiilor oamenilor muncii, lipsiţi de mijloace materiale. Dar nici acei care se îndreptau spre Universitate — nu erau liberi să aleagă pofesiunea în care şi-ar fi putut desvolta cel mai bine capacităţile în folosul ridicării poporului asuprit şi ţinut în întuneric. Partea cea mai însemnată a studenţilor era orientată de setea de profit şi de interesele de exploatare şi de asuprire ale burgheziei şi ale moşierimii spre îndeletniciri lucrative şi birocratice.

Astăzi însă, când întreaga ţară este un uriaş şantier, când toate ştiinţele sunt preţuite de poporul nostru, când nevoile planului de stat cer contribuţia masivă a tuturor tehnicienilor şi a oamenilor de ştiinţă şi orientarea justă a tinerelor cadre, alegerea carierii a devenit liberă, ea nu mai este influenţată de interesele meschine ale exploatatorilor.

Rămâne însă deschisă problema orientării pentru fiecare din candidaţi, problemă pe care elanul cu care se desfăşoară munca în toate domeniile o amplifică nemăsurat.

Tânărul elev al clasei a XI-a, care a cunoscut în învăţământul mediu, bazele fizicii, chimiei, geologiei, care şi-a dat seama de puterea de pătrundere a instrumentelor matematice, de realizările tehnicii moderne, se va simţi chemat deodată din mai multe locuri. Deaceea, este necesar ca el să cunoască din vreme modul în care se desfăşoară învăţământul în numeroasele facultăţi ale învăţământului superior, materiile de studiu, viaţa studenţească, sprijinul pe care îl capătă din partea conducerii, a profesorilor şi asistenţilor, a organizaţiilor de U. T. .M., şi a sindicatelor studenţeşti.

Matematica şi fizica, a căror istorie este împletită, sunt două specialităţi ce atrag pe mulţi dintre tinerii absolvenţi, care simt că dincolo de marginile cunoştinţelor lor li se deschid perspective nemărginite de cercetare, de cunoaştere şi stăpânire a unor domenii esenţiale din ştiinţele naturii.

Cititorii Revistei de Matematică şi Fizică nu se găsesc nepregătiţi în faţa acestor perspective. Ei au cunoascut şi frământat numeroase probleme elementare, dar nu mai puţin importante, ei bănuiesc şi simt ce înseamnă cercetarea într'un laborator de fizică sau într'o bibliotecă de matematică, totuşi ansamblul învăţământului le rămâne necunoscut.

Deaceea, iniţiativa Sfaturilor Populare, de a se prezenta elevilor clasei a XI-a un tablou cât mai complet al învăţământului în diversele facultăţi este binevenită şi va contribui hotărîtor la rezolvarea problemei alegerii specialităţiilor, în modul cel mai just.

In acest scop ea îşi trimite reprezentanţi în cele patru centre hotărîte în care se adună elevii pentru a primi vizitele profesorilor, asistenţilor şi studenţilor. Ea va primi în două duminici consecutive vizita tuturor elevilor ce doresc să cunoască activitatea ce se desfăşoară între zidurile sale şi va organiza reuniuni tovărăşeşti între studenţi şi elevi.

Ca un îndreptar pentru cititorii revistei, a căror curiozitate legitimă cere cât mai multe şi cât mai amănunţite lămuriri, cred folositor să completăm tabloul vieţii şi activităţii din facultatea de matematici şi fizică printr'o trecere rapidă în revistă a liniilor mari pe care se desfăşoară învăţământul în ea.

Facultatea de matematică și fizică din București pregătește cercetători științifici în domeniile variate ale matematicii și fizicii: cercetătorii în domeniul matematicilor teoretice (ecuații diferențiale, teoria funcțiunilor de variabilă reală și complexă, geometrie modernă, etc.), în domeniul matematicii aplicate (teoria probabilității, hidrodinamica, elasticitatea, astronomia), în domeniul fizicii (fizica teoretică, optica, electronica, fizica atomică, seismologia, etc.).

Materiile predate asigură ca tinerii specialiști să-și însușească în mod temeinic cultura de specialitate — și să primească o educație științifică modernă bazată pe ideile atotbiruitoare ale materialismului marxist-leninist. Prin studiul permanent al limbii ruse, studenții facultății vor fi ajutați să-și însușească roadele celei mai înaintate științe și culturi din lume: a științei rusesovietice.

In primul an studenții își pregătesc baza solidă pentru înțelegerea domeniilor superioare din anii următori și pentru specializare. Ei urmează cursuri de Analiză, Geometrie analitică, Algebră, Fizică generală, precum și cursurile catedrei de științe sociale care se continuă și în anii următori.

In anul al doilea despărțirea celor două secții se accentuează, unele cursuri având totuși același obiect, ca de exemplu Mecanica rațională. In programul fizicienilor se studiază Căldura, Optica, Electricitatea, Mecanica, Ecuațiile fizicii matematice. Matematicienilor li se predă Geometria diferențială, Ecuații diferențiale, Funcțiuni reale, Funcțiuni complexe, Astronomie, Mecanică, Fizica generală.

Cursurile anului al treilea completează învățământul de specialitate al celor două secții. Pe lângă materiile predate anterior care sunt aprofundate apar în program pentru matematicieni Ecuațiile fizicii matematice Calculul probabilităților, iar pentru fizicieni Chimia fizică, Structura materiei, Teoria câmpurilor, Fizica statistică.

Cursurile anului IV sunt de strictă specialitate, materialul lor putând varia dela un an școlar la altul. Studenții își aleg cursurile pe care doresc să le urmeze și care corespund cu aspirațiile lor spre cercetare. In același timp își pregătesc lucrarea de diplomă de stat lucrând în strânsă legătură cu preofesorii și asistenții.

Invățământul este organizat pe catedre, care reunesc mai multe cursuri de specialități înrudite în vederea coordonării programelor, a supravegherii procesului de învățământ, a formării cadrelor, a pregătirii examenelor, etc.

Seminariile și lucrările practice se fac pe grupe de studenți sub conducerea asistenților, fiecare grupă având un asistent responsabil care cunoaște pe fiecare student în parte urmărindu-l și sprijinindu-l în întreaga sa activitate școlară.

In anii superiori, studenții încep să cerceteze independent, citind memorii originale și făcând referate asupra lor în seminare și la cercuri studențești. Prin aceasta ei pășesc în rândurile cercetătorilor mai înaintați și se găsesc alături de profesorii și asistenții lor.

La sfârșitul studiilor și chiar în ultimul an, li se deschid numeroase perspective: cercetarea științifică în Institutele Academiei R.P.R. colaborarea la institute și instituții tehnice, care au nevoi permanente de matematicieni și fizicieni, cariera didactică în învățământul superior sau mediu în care nevoia de cadre crește din an în an. Am întâlnit adesea foști studenți ai facultății care au intrat ca fizicieni în laboratoare din industrie, unde cercetează și rezolvă probleme importante, aducând astfel contribuția lor imediată și entuziastă la construirea socialismului, mândri și mulțumiți de prețuirea ce li se dă.

Alături de ei, alături de armata de matematicieni și fizicieni care crește mereu, viitorii studenți ai facultății de matematici și fizică se vor simți siguri, sprijiniți de cei mai vârsnici. Intăriți prin experiența și priceperea conducătorilor, profesori și asistenți, ei își vor însuși știința și vor păși în viață cu hotărîre pe un drum ales de ei însăși, conform cu asipirațiile și aptitudinile lor.

Oameni de știință eminenți, cum sunt Acad. prof. S. S. Stoilov, Acad. prof. Gr. Moisil, Acad. prof. E. Bădărău, prof. G. Vrănceanu, prof. M. Nicolescu, membru corespondent al Academiei R. P. R., prof. Caius Iacob, prof. G. Mihoc și alții asigură prin munca lor devotată ca tinerii slujitori ai științei să-și însușească cuceririle clasice consacrate ale științei și să facă la timp cunoștință cu noile direcții de cercetare. Ei utilizează în munca lor didactică și educativă cu mult succes experiența minunată a științei ruse și sovietice, care se află în fruntea realizărilor științifice din lumea întreagă.

Tovarășul Gheorghe Gheorghiu-Dej, conducătorul iubit al poporului nostru, a pus ca sarcină în fața profesorilor de specialitate de a ridica necontenit nivelul de predare al matematicii. In orașele cu vechi tradiții științifice și culturale Iași și Cluj — funcționează deasemenea facultăți de matematică și fizică — de un înalt

nivel științific. La Iași profesori ca Mendel Haimovici, membru corespondent al Academiei R. P. R., Ștefan Procopiu, Ion Creangă și alții inițiază tinerele cadre în tainele științelor matematice și fizice. La Cluj pregătirea studenților este asigurată de oameni de știință ca Tiberiu Popovici, membru corespondent al Academiei R. P. R., prof. Victor Marian, prof. Gh. Pick, Laslo Tihomir și alții. In fine, la Timișoara un Institut Pedagogic cu o facultate de matematică-fizică se îngrijește de pregătirea unei noi generații de profesori de matematică-fizică, propagandiști însuflețiți ai științei înaintate în rândurile tineretului și ai populației muncitoare.

Cadrele didactice din facultățile de matematică-fizică din țara noastră își fac o datorie de cinste din această sarcină — ei se străduesc din răsputeri să dea Patriei o generație nouă bine pregătită, însuflețită de spiritul devotamentului față de popor, gata să-și pună toate talentele și cunoștințele în slujba construirii socialismului.

NOȚIUNEA DE GRUP ÎN MATEMATICI

Eugen Rusu

Inainte de a încerca să deschidem poarta pentru a privi puțin în domeniul atât de vast al matematicii moderne și pentru a ne da seama cum se racordează drumul, să privim puțin și înapoi.

Cunoștințele căpătate în învățământul elementar corespundeau cu faza egipteană. In geometrie, desenul era totul. Măsuram și ne convingeam cu ochii că așa este precum spune regula. Faza egipteană a științei e caracterizată prin metoda ei strict empirică; adevărurile se scot din îndeletniciri practice, prin verificări directe, pe teren. Metoda raționamentului deductiv nu a apărut încă; deci adevărurile apar izolate și independente unul de altul. Egiptenii știu că triunghiul cu laturile 3,4,5, este dreptunghiu (și ei utilizează acest adevăr pentru a duce perpendiculare pe teren cu ajutorul unui triunghiu de laturi 3,4,5, făcut din sfoară și ținut întins). Ei mai știu poate și despre laturile 5, 12, 13 că formează un triunghiu drepunghiu, dar acestea erau pentru ei două adevăruri complet distincte, căci ei nu știau *de ce* acest triunghiu e dreptunghiu, ei nu știau cum trebue să fie laturile în general pentruca triunghiul să fie dreptungiu — adică, în alt limbaj ei nu cunoșteau teorema lui Pitagora.

Un mare salt calitativ a realizat geometria trecând dela faza egipteană la cea greacă, organizată ca sistem deductiv.

Evul mediu cunoaște în special desvoltarea algebrei venită, prin Arabi, dela învățați cum e Alhorezmi care a trăit în localitatea Horezmi situată în Republica Socialistă Tadjecă de astăzi. Geometria cunoaște o etapă de stagnare; se pare că nimic nu mai e de adăogat la edificiul atât de armonic construit de școala lui Euclid.

Desvoltarea burgheziei în sânul orânduirii feudale, problemele puse de marile călătorii geografice și desvoltarea astronomiei impusă de ele, probleme puse matematicii din nevoia de a se studia și utiliza energiile naturii, care trebuiau să înlocuiască munca sclavilor și a animalelor, produc un nou salt în știință care pune bazele desvoltării matematicii moderne: geometria analitică, analiza, geometriile moderne.

Cuceririle științei devin extrem de numeroase. In urma unei uriașe acumulări cantitative de teorii, se simte nevoia unei ordine, se pune problema unei coordonări a matematicii în ansamblul ei.

Se observă un lucru care la început uimește dar apoi devine explicabil. Teorii matematice diverse — în domenii complet distincte — îmbrăcate în haine deosebite și găsite indepedent una de alta se dovedesc, la o analiză atentă, că au o *structură* comună.

A studia *structura* teoriilor, a face un nou efort de abstractizare, pentru a găsi ce este comun lor, iată sarcina principală a matematicii moderne. Ideea de grup este esențială în această privință.

Articolul de față își propune să comunice elevilor definiția noțiunii de grup — evident fără desvoltări ale teoriei grupurilor — pentru a-i informa asupra unor teorii ale matematicii moderne.

2. *Compunerea translațiilor.*

1°. Să plecăm dela lucruri care sunt deja tratate în manualul nostru de geometrie: transformările de figuri. Să considerăm întâi translația. Într'o translație toate punctele unei figuri descriu drumuri egale paralele și de același sens. Pentru

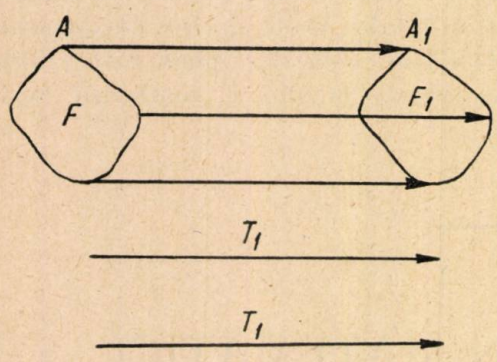


Fig. 1.

ca translația să fie perfect definită (să știm exact ce mișcare trebue să dăm figurii) e suficient să ni se dea drumul descris de *un* punct.

Acest lucru ni se poate indica printr'o săgeată desenată chiar separat de figură, indiferent unde — ceea ce interesează e numai direcția, sensul și mărimea acestei săgeți și nu punctul de unde pleacă ea (un vector *liber*).

Exercițiu. Inchipuiți-vă, pe fig. 1, că vectorul T_1 care definește translația e desenat în altă parte însă are aceiași direcție, sens și mărime; efectuați mișcarea ghidându-vă la acest al 2-lea vector; veți vedea că mișcarea este aceiași. Imaginați-vă

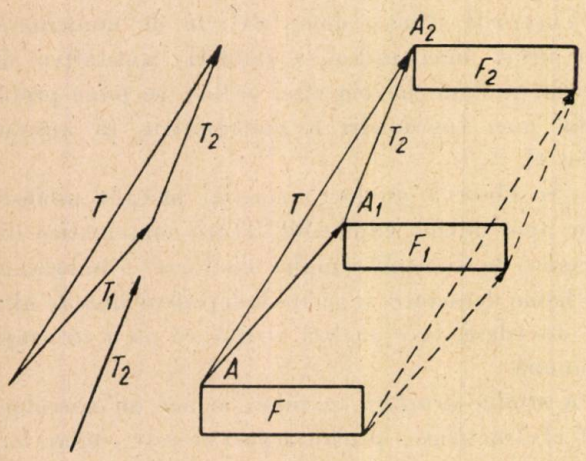


Fig. 2.

acum că această săgeată își schimbă pe rând, direcția, sensul sau mărimea (sau și direcția și mărimea, etc.) și vedeți de fiecare dată ce translație se definește astfel.

2°. Să presupunem acum că aplicăm figurii date F translația T_1— obținem figura F_1; figurii F_1 îi aplicăm o a doua translație T_2— obținem figura F_2. Intrebarea care se pune este: ce mișcare ne duce *direct* dela F la F_2?.

Vedem cu ajutorul unor triunghiuri cu laturi paralele și egale (fig. 2) că putem ajunge dela figura F direct la figura F_2 tot printr'o translație T al cărui vector îl găsim din vectorii T_1 și T_2 prin regula paralelogramului de compunere a vectorilor.

Rezultatul acesta îl enunțăm astfel: *compunerea a două translații ne dă tot o translație.*

Să nu credem că acest rezultat e valabil pentru orice transformare de figură. De ex. el nu e valabil pentru simetriile axiale (față de o dreaptă) cum vom arăta mai târziu.

Această compunere a translațiilor se mai numește și produs într'un înțeles cu totul lărgit al cuvântului produs.

Se notează $T_1 . T_2 = T$.

Dar nu trebue să vedem aici o înmulțire algebrică ci numai ceea ce s'a spus mai sus: anume că dacă unei figuri oarecare îi aplicăm translația T_1 și figurii obținute translația T_2, rezultatul este că în totul figura a suferit translația T definită prin regula paralelogramului.

Să aprofundăm proprietățile de care se bucură compunerea translațiilor.

3°. In primul rând observăm că dacă aplicăm figurii F întâi translația T_2 și apoi figurii obținute translația T_1 ajungem la același rezultat. E suficient să ne convingem despre aceasta lucrând asupra unui punct, căci cu toate punctele se lucrează la fel. Figura 3 ne arată că dacă A suferă întâi mișcarea dictată de T_1 și apoi pe cea dictată de T_2 sau invers: întâi pe T_2 și apoi pe T_1 ajunge în același loc — e o proprietate simplă a paralelogramului. Vom scrie acest lucru astfel: $T_1 \cdot T_2 = T_2 \cdot T_1$ și vom zice — ca și la produsele de numere — produsul translațiilor este comutativ.

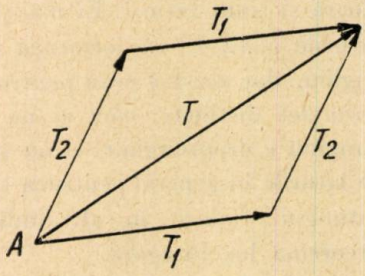


Fig. 3

4°. Să compunem acum 3 translații T_1, T_2, T_3, adică să găsim produsul $T_1 \cdot T_2 \cdot T_3$. Aceasta înseamnă: aplicăm figurii F translația T_1, figurii obținute translația T_2 și figurii obținute acum translația T_3.

Figura 4 urmărită cu atenție ne arată că $(T_1 \cdot T_2) \cdot T_3 = T_1 \cdot (T_2 \cdot T_3)$. (Vectorial această relație s'ar scrie

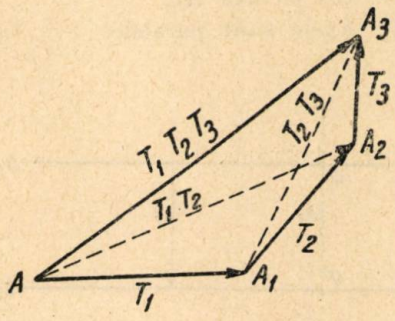


Fig. 4

$$\overline{A A_2} + \overline{A_2 A_3} = \overline{A A_1} + \overline{A_1 A_3}.$$

Vom zice (ca și la produsele de numere) produsul translațiilor este asociativ.

5°. Fiind dată o translație T (definită printr'un vector) există o translație cu aceeași direcție și mărime dar de sens opus, s'o numim T'.

Să facem produsul T. T'. Aceasta înseamnă

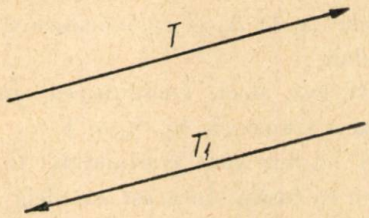


Fig. 5

conform celor spuse mai sus să aplicăm unei figuri F translația T și figurii pe care o găsim să-i aplicăm translația T'. Unde credeți că ajungem? Exact de unde am plecat, pentrucă fiecare punct a făcut pe aceeași dreaptă același drum dus și întors. Deci iată un caz de excepție la proprietatea 2°.

Avem aici două translații al căror produs nu e o translație, ci rămânerea figurii pe loc. Am putea însă considera această rămânere pe loc tot ca o translație în care însă vectorul ei de definiție are lungimea zero — ea se mai numește transformarea identică; s'o numim E. E ușor de văzut că $E \cdot T = T \cdot E = T$, adică produsul prin E — ca și produsul numerelor prin 1 — nu duce la alt rezultat.

Să rezumăm și să sistematizăm. 1) Noi am considerat toate translațiile pe care le poate suferi o figură plană în propriul ei plan (mulțimea translațiilor plane); 2) Am stabilit o lege de compunere, adică am definit ce se înțelege prin produsul a două translații; 3). Am stabilit că acest produs este comutativ; 4) este asociativ; 5) există un element neutru E astfel ca $T \cdot E = T$; 6) pentru orice translație există o altă translație T' astfel ca $T \cdot T' = E$.

*

Matematicienii au observat că și în cadrul altor mulțimi de elemente matematice (transformări de figuri, numere reale, numere complexe, vectori, polinoame, etc.) pot fi definite legi de compoziție — alta în fiecare domeniu — dar având aceleași proprietăți.

Iată un al 2-lea exemplu. Să considerăm mulțimea tuturor numerelor raționale diferite de zero (fracții ordinare și întregi). Să luăm ca lege de compoziție înmulțirea (în sensul ei obișnuit); să vedem dacă sunt verificate propietățile de mai sus. Proprietatea 2°: prin înmulțirea a două numere raționale obținem tot un număr rațional; 3° produsul e comutativ; 4° e asociativ; 5° există un element neutru 1; $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$; 6° Oricare ar fi numărul rațional există un invers astfel ca produsul să fie 1.

$$\text{Ex. } \frac{3}{5}, \text{ inversul e } \frac{5}{3} \text{ și } \frac{3}{5} \times \frac{5}{3} = 1.$$

3. Definiția noțiunii de grup. O mulțime de elemente matematice în care s'a definit o lege de compunere (pe care o numim produs) și se verifică următoarele proprietăți:

1°. Produsul a două elemente ale mulțimii considerate este un element care face și el parte din mulțimea considerată.

2° produsul este asociativ;

3° există un element neutru e astfel că oricare ar fi elementul a al mulțimii: $a \cdot e = e \cdot a = a$;

4° oricare ar fi elementul a al mulțimii, există un element a' în acea mulțime astfel ca $a \cdot a' = e$ se zice că formează grup (față de acea lege de compoziție)

5° Dacă e verificată și propietatea că produsul e comutativ, se zice că mulțimea considerată formează *grup comutativ*.

Rezultatele de mai sus pot fi acum enunțate:

Translațiile din plan formează grup comutativ față de înmulțire.

Numerele raționale (fără zero) formează grup comutativ față de înmulțire.

Exerciții. 1° Numerele întregi pozitive (naturale) formează grup față de înmulțire? Răspuns: 1° produsul a două numere întregi e un număr întreg; 2° produsul este asociativ; 3° există în această mulțime elementul neutru 1; 4° fiind dat un număr întreg *nu* există un alt număr întreg astfel ca produsul să fie 1. Deci, proprietatea 4° nefiind satisfăcută, mulțimea considerată *nu* este grup.

2° Numerele complexe (din care se exclude 0) formează grup față de înmulțirea numerelor complexe.

Să trecem la analiza, din acest punct de vedere, a altor transformări de figuri studiate în cl. 8-a. Vom studia [1]):

Simetria axială. Ea este perfect definită dacă ni se dă o dreaptă —axa de simetrie.

Rotația. Ea este perfect definită dacă ni se dă un punct — centrul de rotație — și un unghiu orientat. Fiecare punct al figurii descrie un arc de cerc cu centrul în centrul de rotație, cu amplitudinea și sensul dat de unghiul care definește rotația.

Rotația de 180° e identică cu simetria centrală (în raport cu un punct).

4. *Compunerea simetriilor axiale.*

Cazul 1°. Axele celor două simetrii sunt concurente.

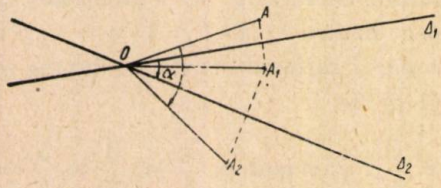


Fig. 6.

Pe figura 6, din egalitatea triunghiurilor dreptunghice formate, cititorul deduce ușor că: $OA_2 = OA$; $AOA_2 = 2\alpha$ (α fiind unghiul celor două axe cu sensul indicat pe figură). Dacă am considera un alt punct al figurii, B, găsim la fel: $OB_2 = OB$ și $BOB_2 = 2\alpha$. Unghiul este un unghiu fix, determinat de cele două axe. Așa dar toate punctele figurii descriu arce de cerc cu centrul în 0 și cu amplitudinea 2α. Pentru o demonstrație completă, cititorul va examina și cazul când un punct al figurii este în alte regiuni ale planului (de ex. între axele Δ_1 și Δ_2) și se va convinge că pentru orice poziție a punctului M avem relațiile menționate: $OM_2 = OM$ și $MOM_2 = 2\alpha$.

Dacă deci se dă o figură F și prin simetria S_1 (de axă Δ_1) obținem figura F_1 iar din figura F_1 prin simetria S_2 (de axă Δ_2) obținem figura F_2, putem ajunge direct dela F la F_2 *printr'o rotație cu centrul în punctul de concurență a axelor și cu amplitudinea dublul unghiului celor două axe* (cu același semn).

Așa dar compunerea celor două simetrii axiale conduce nu la o simetrie ci la o rotație — ceea ce putem scrie $S_1 . S_2 = R$ (unde S_1 e simetria de axă Δ_1 și S_2 cea cu axa Δ_2).

Cazul 2°. Axele sunt paralele.

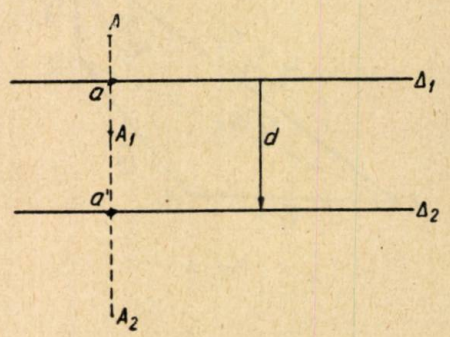


Fig. 7

Figura 7 ne arată că:

$$AA_2 = AA_1 + A_1A_2 = 2a\,A_1 + 2\,A_1a' = 2aa' = 2d$$

Examinând și alte cazuri de figură posibile, ne convingem că oricare ar fi poziția punctului M al figurii F, avem $\overline{MM_2} = 2\bar{d}$, unde $\bar{d}$ e un vector perpendicular pe direcția comună a axelor, cu sensul dela Δ_1 la Δ_2 și cu mărimea egală cu distanța axelor.

In acest caz, deci, compunerea simetriilor ne conduce la o translație $S_1 . S_2 = T$.

Cazul 3°. Axele sunt confundate. Compunem o simetrie cu ea însăși. In acest caz dela A_1 ajungem din nou la A, adică obținem figura dela care am plecat. S. S = E (E fiind transformarea identică.)

In nici unul din cele trei cazuri, compunând două simetrii nu am obținut o simetrie. Proprietatea 1° din definiția noțiunii de grup nu este satisfăcută. Deci: *mulțimea simetriilor axiale din plan nu formează grup.*

Mai observăm că produsul a două simetrii *nu este comutativ.* Dacă facem produsul $S_2 . S_1$ adică aplicăm unei figuri F întâi simetria S_2 și apoi figurii găsite simetria S_1, ajungem dela figura dată la figura finală în mod direct printr'o rotație (dacă axele sunt concurente) sau printr'o translație (dacă axele sunt paralele) fiecare de sens *invers* decât acea pe care o obținem făcând produsul $S_1 . S_2$, deci $S_2 . S_1 \neq S_1 . S_2$.

5. *Descompunerea translațiilor și rotațiilor.*

Problema se pune acum invers: fiind dată o translație, putem găsi două simetrii axiale a căror compunere să ne conducă la această translație? Pentru a putea răspunde, trebue să mai revedem odată paragraful precedent. Compunerea a două simetrii conduce la o translație dacă axele

[1]) Unele demonstrații vor apare ca prea schematic expuse. Cititorul care dorește cu adevărat să pătrundă în acest domeniu, trebue: 1° Să revadă capitolul «Transformarea figurilor» din manualul de geometrie de cl. 8-a; 2° să citească articolul cu creionul în mână și o hârtie pentru încercări alături; el va trebui să refacă singur demonstrațiile prea schematice; el va trebui să caute să descopere singur, chiar înainte de citirea unui paragraf, numai după titlu, ce se va expune acolo. Numai citind în acest fel, cititorul se formează ca matematician. Nu primind lucrurile de-a gata, ci făcând astfel ca și când el ar căuta să le descopere singur acum.

sunt paralele iar vectorul translației e perpendicular pe direcția axelor cu mărimea dublul distanței axelor și cu sensul dela prima la a doua.

Deducem că pentru descompunerea translației date, putem proceda în modul următor: luăm o dreaptă Δ_1 perpendiculară pe vectorul translației date $\overline{T}$; luăm dreapta Δ_2 paralelă cu Δ_1 și la o distanță de ea cât jumătate din vectorul T. Sensul care merge dela Δ_1 la Δ_2 să fie același cu sensul lui $\overline{T}$.

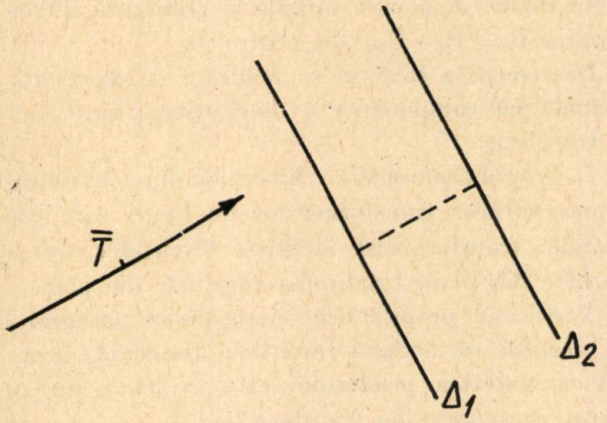


Fig. 8.

Observație. Dreapta Δ_1 o putem alege după voe (cu condiția să fie perpendiculară pe $\overline{T}$); odată Δ_1 aleasă, Δ_2 este perfect determinată. Putem însă alege pe Δ_2 după voe (cu aceeași condiție) atunci Δ_1 e perfect determinată.

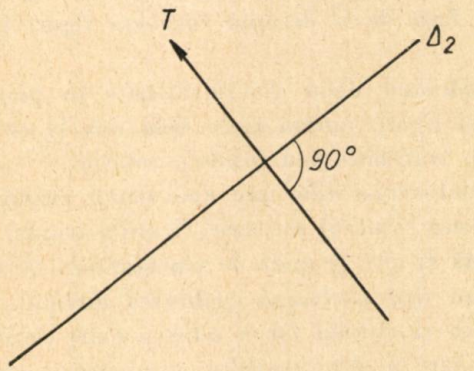


Fig. 9.

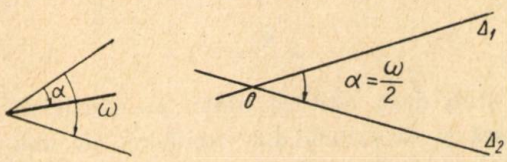


Fig. 10

Exercițiu. In fig. 9 așezați pe Δ_1 așa fel ca $S_1 \cdot S_2 = T$.

Descompunerea rotației se face analog, ținând seama de cazul 1 al paragrafului precedent.

Fiind dată o rotație R definită de un punct dat O și un unghiu orientat ω, ducem prin O o dreaptă oarecare Δ_1; apoi ducem tot prin O o dreaptă Δ_2 astfel ca unghiul dreptelor Δ_1 și Δ_2 să fie egal (în mărime și sens) cu unghiul $\frac{\omega}{2}$ Atunci compunerea $S_1 \cdot S_2$ ne va duce la rotația dată R.

Exercițiu. In figura 11 fixați pe Δ_1 astfel ca $S_1 \cdot S_2 = R$.

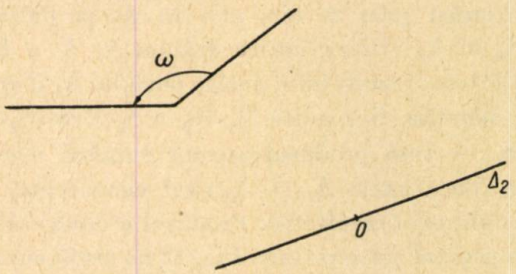


Fig. 1

6. *Compunerea a două rotații.* Fiind date rotațiile R_1 (de centru O_1 și unghiul ω_1) și R_2 (de centru O_2 și unghiu ω_2), să vedem la ce ne conduce compunerea $R_1 \cdot R_2$. Este o problemă mai grea. Ne vom servi de descompunerea rotației într'un produs de două simetrii, alegând una din axe în mod convenabil (comună).

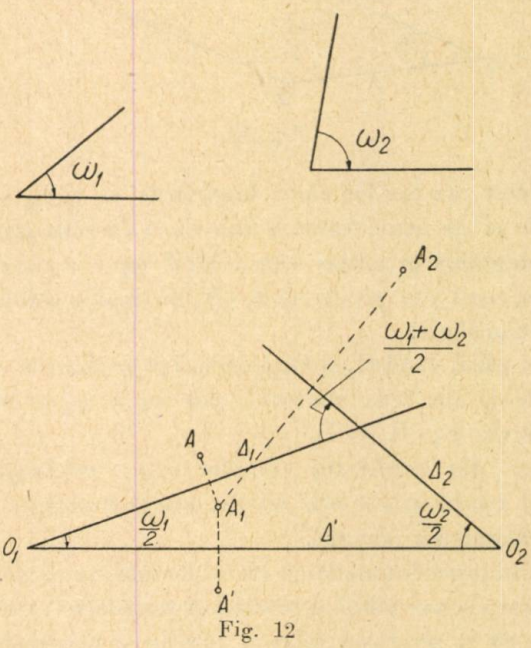


Fig. 12

Fie Δ' dreapta $O_1 O_2$. Ducem prin O_1 o dreaptă Δ_1 astfel ca $S_1 \cdot S' = R_1$ (urmăriți și figura 12, sau mai bine o refaceți separat pe măsura expunerii).

Ducem prin O_2 o dreaptă Δ_2 astfel ca $S' \cdot S_2 = R_2$ (atenție la sensul unghiului). Aceasta înseamnă că în loc să aplicăm punctului A rotația R_1, îi putem

aplica simetria S_1 (față de Δ_1) și punctului găsit simetria S', ajungem în A'. Pentru a aplica lui A' rotația R_2, îi putem aplica simetria S' și punctului găsit simetria S_2.

In rezumat: în loc să aplic lui A rotația R (care ne duce la A' și lui A' rotația R_2 care ne duce dela A' la A_2, pot aplica lui A, succesiv simetriile S_1, S', S', S_2, de unde $R_1 \cdot R_2 = S_1 \cdot S' \cdot S' \cdot S_2$. Acum urmăriți pozițiile prin care trece A. El ajunge prin S_1 în A_1, de aici prin S' în A', acuma iarăși prin S' din nou în A_1 și de aici prin S_2 în A_2. Observăm că drumul A_1 A' a fost dus și întors; rezultatul e acelaș dacă lui A_1 îi aplic direct simetria S_2, adică $R_1 \cdot R_2 = S_1 \cdot S' \cdot S' \cdot S_2 \cdot = S_1 \cdot S_2$. — Insă produsul acestor simetrii este o rotație (dacă axele Δ_1 și Δ_2 sunt concurente).

Deci obținem rezultatul: Produsul a două rotații este în general tot o rotație. Fig. 12 ne arată cum se găsește centrul; cu ajutorul unghiului exterior triunghiului OO_1O_2, găsim că unghiul rotației $R = R_1 \cdot R_2$ este egal cu suma unghiurilor rotațiilor R_1 și R_2.

Rămâne să studiem cazul când Δ_1 și Δ_2 ar fi fost paralele.

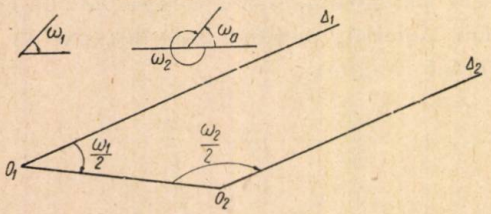


Fig. 13

Acest caz are loc când unghiurile ω_1 și ω_2 sunt egale și de semn contrar sau dacă lucrăm numai cu unghiuri în același sens, când $\omega_1 + \omega_2 = 360°$

In acest caz produsul $S_1 \cdot S_2$ nu mai e o rotație ci o translație.

In cazul când O_1 și O_2 coincid iar unghiurile sunt egale și de sens contrar (sau $\omega_1 + \omega_2 = 360°$) obținem $R_1 \cdot R_2 = E$.

Așa dar rezultatul complet este: *produsul a două rotații este sau o rotație, sau o translație sau transformarea identică.*

Prin procedee analaoge cu cel de mai sus (descompunerea convenabilă a rotației și translației) putem găsi că și produsul între o rotație și o translație sau între o translație și o rotație este tot o rotație. (Lăsăm demonstrația ca problemă.)

Recomandare. Este bine ca cititorul să se convingă și *experimental* despre rezultatele obținute. Pe o hârtie plană așezată pe o planșetă, el desenează fig. 12 mărită. In loc de un punct A, el va desena o figură F de ex. un triunghiu scalen. Cu ajutorul rotației vârfurilor el va desena cât mai exact figura F' obținută prin rotația R_1 și F_2 obținută din F' prin rotația R_2. Apoi va copia pe hârtie transparentă numai figura F și centrele de rotație O_1, O_2, O. Infige un ac în O_1 și realizează rotația R_1; ține hârtia pe loc până ce scoate acul din 0_1 și îl înfinge în 0_2, realizează rotația R_2. Apoi revine la poziția inițială și realizează direct rotația $R = R_1 \cdot R_2$, de centru 0.

Deasemeni e bine să se realizeze și experiența vizuală cu compunerea a două rotații care dau o translație.

7. *Grupul deplasărilor.* Să considerăm acum mulțimea tuturor transformărilor de figuri care cuprinde: transformarea identică, totalitatea translațiilor din plan, totalitatea rotațiilor din plan.

Verificând proprietățile enunțate în paragraful 3, rezultă că această mulțime formează grup. (Asociativitatea produsului este evidentă pentru orice compunere de transformări).

Acest grup se numește grupul deplasărilor plane.

Aplicând unei figuri oarecare o transformare din acest grup obținem o figură direct egală cu ea (se numesc figuri direct egale acele figuri care pot fi aduse să coincidă fără a le scoate din propriul lor plan; se numesc figuri invers egale, acele figuri care pot fi aduse să coincidă, cu condiția de a răsturna o figură pe partea cealaltă; — prin simetria față de o dreaptă obținem figuri invers egale).

Considerând două poziții diferite în plan ale aceleiași figuri, putem trece dela una la cealaltă printr'o translație sau printr'o rotație

Studiul deplasărilor are aplicațiuni practice în cinematica (studiul mișcării) figurilor solide.

Există și alte grupuri de transformări de figuri (care nu mai păstrează egalitatea directă). Considerarea și studiul lor a adus o mare clarificare și ordonare a proprietăților geometrice care se clasifică după grupul de transformări în raport cu care ele rămân aceleași.

Ideea de grup de transformări este fundamentală în studiul și clasificarea proprietăților geometrice.

* * *

Nu știm dacă cititorii noștri au reușit să urmărească și să prindă din expunerea de mai sus ideea de grup. De aceia îi rugăm ca în plicul cu probleme pe care ei îl trimit în mod obișnuit redacției să scrie dacă subiectul i-a interesat.

Dacă un număr destul de mare de cititori își vor exprima dorința să adâncim și să mergem mai departe cu noțiunea de grup, atunci vom da

în numerele viitoare ale revistei un articol asupra grupului deplasărilor în spațiu (deosebit de important în Mecanică); apoi vom putea înfățișa și alte grupuri de transformări geometrice. In fine am putea arăta și cum se prezintă noțiunea de grup în Aritmetică.

Extensiunea tratării acestui subiect depinde de interesul pe care i-l vor arăta cititorii.

Exerciții.

1°. Totalitatea rotațiilor din plan în jurul unui acelaș punct fix împreună cu transformarea identică (rotația de unghiu zero) formează grup.

2°. Se dau două triunghiuri direct egale ABC și $A_1B_1C_1$. Ele pot fi aduse să coincidă prin translația care duce pe A în A_1 urmată de o rotație. Să se deducă că cele două triunghiuri pot fi aduse să coincidă printr'o singură rotație; să se găsească grafic centrul și unghiul acestei rotații.

3°. Se dă un patrulater oarecare ABCD. Se ia un punct oarecare M și i se aplică succesiv simetriile față de dreptele AB, BC, CD, DA (dacă laturile ar fi oglinzi, acestea ar constitui imaginile succesive ale lui M). Obținem punctul M_4. Există o poziție a punctului M astfel încât punctul M_4 să coincidă cu M? (se va ține seama că produsul celor 4 simetrii este egal cu produsul a două rotații de centre B și D, deci cu o rotație. Apoi ne vom întreba: într'o rotație există un punct care rămâne pe loc?) In ce caz nu există un asemenea punct?

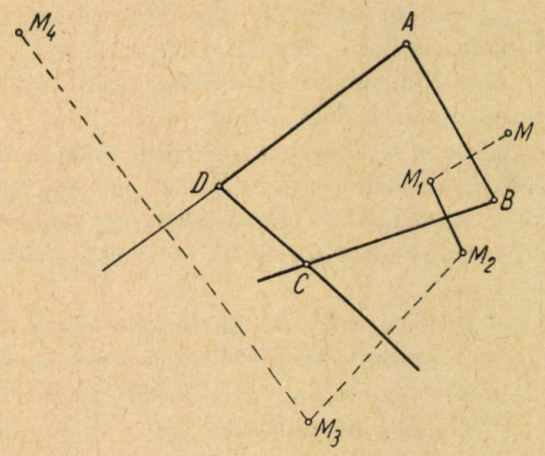


Fig. 14

4°. Dacă considerăm mulțimea numerelor întregi pozitive și negative inclusiv zero și luăm ca lege de compunere adunarea algebrică, obținem un grup?

LUMINA RECE

C. Ionescu-Timuș

Izvorul natural de lumină este soarele. El trimite lumina albă a zilei plăcută ochiului care este un amestec de lumină galbenă ce vine direct dela soare și lumină albastră a cerului. O bună parte a energiei radiante emise de soare este concentrată în regiunea vizibilului, adică între 365 și 750 mμ.

De lumina zilei nu ne putem servi decât atât timp cât se află soarele pe bolta cerească și, cum timpul de lucru la lumina zilei este redus iarna numai la puține ore, a apărut necesitatea iluminatului artificial.

Lucrul la lumina artificială s'a impus deci, ca o necesitate economică și tehnică.

Astăzi tehnica iluminatului caută să producă izvoare de lumină, care să se adapteze cel mai bine condițiilor iluminatului, adică să construiască sisteme optice care să dea un iluminat corect spre a se putea lucra în mod productiv, fără ca vederea celor ce muncesc să sufere.

U.R.S.S. este țara unde se dă o foarte mare importanță problemei iluminatului, în vederea desvoltării industriei, agriculturii și a ridicării nivelului cultural al populației. Și în R.P.R. problema luminatului prin electrificare capătă o atenție deosebită.

O bună iluminare mărește randamentul de lucru cu 30—40%. Raționalizarea iluminatului este un mijloc tehnic puternic în mărirea productivității muncii și a înbunătățirii calității produselor.

Este necesar ca lumina artificială să fie cât mai asemănătoare și la coloare și ca distribuție spectrală, cu lumina zilei și totodată să fie cât mai ieftină.

Izvoare de lumină. Orice sursă care poate da lumină poartă numele de izvor de lumină. Izvoarele de lumină se evaluează după fluxul lor luminos. Ochiul are diferite sensibilități, pentru diferitele lungini de undă. Ochiul normal este cel mai sensibil pentru lumina galbenă verzuie de o lungime de undă $\lambda = 0{,}556\mu$. Diferite radiațiuni monocromatice, căzând asupra ochiului, produc sensații diferite de culori. Culoarea luminei depinde de lungimea ei de undă. Totalitatea radiațiunilor vizibile, combinate în anumite proporții, produc sensația de alb. Știm că deoparte și de alta a spectrului vizibil se găsesc radiațiile ultraviolete și infraroșii. Radiațiile ultraviolete au lungimea de undă mai mică decât $\lambda = 0{,}4\mu$, iar cele infraroșii mai mare ca $\lambda = 0{,}76\mu$. Cum am spus, maximul de sensibilitate a retinei corespunde la $\lambda = 0{,}556$

mμ. Marginile spectrului vizibil, unde predomină radiațiile albastre și roșii, produc o sensație mai slabă de lumină.

Mijloacele pentru producerea luminii. Pentru producerea luminii artificiale, care formează subiectul articolului de față, ne servim de anumite tipuri de lămpi. Principiul acestor lămpi poate fi: 1) incandescența și 2) luminiscența.

Lămpile de incandescență (becurile electrice) sunt bazate pe incandescența corpurilor, iar lămpile bazate pe fenomenul de luminiscență sunt lămpi care produc lumină fără o ridicare prea mare a temperaturii lor.

Pentru ca un corp să aibă cea mai mare eficacitate luminoasă, trebue ca el să absoarbă complect toate razele de orice lungime de undă care ar cădea asupra lui și să nu reflecteze nici o rază. Corpul care absoarbe mai multă lumină pare mai închis la culoare. Un corp de coloare închisă poate să radieze mai bine lumina prin incandescență, decât unul de coloare deschisă. Dacă se încălzesc la aceeași temperatură o bucată de cărbune și o egală bucată de cretă, cărbunele va fi mai luminos. De aceea corpul «*absolut negru*» este *radiatorul ideal*, pentrucă el absoarbe întreaga lumină care cade pe el și *prin încălzire dă maximum de radiație pentru orice coloare. El are cea mai mare putere de emisie.*

Distribuția energiei solare este aproape identică cu distribuția energiei radiante emisă de așa numitul corp absolut negru, când se găsește la temperatura de circa 6500° K (absolute). Corpul negru este un radiator care emite toată gama radiațiunilor. El este un radiator termic și este capabil să absoarbă complect toate radiațiunile ce cad pe el.

In natură nu există un corp negru natural dar se poate realiza în laborator.

Dacă temperatura unui corp negru crește dela 500° K la 1000° K, energia totală emisă de el crește de $2^4 = 16$ ori. Cu cât crește temperatura, cu atât maximul energiei radiate se deplasează spre lungimi de undă mai mici, trecând din infraroșu în vizibil.

Evoluția lămpii cu incandescență. Lămpile cu incandescență numite și becuri electrice, sunt astăzi cele mai răspândite isvoare de lumină. Din toată energia radiată în spațiu de un corp incandescent, numai o parte foarte mică este formată din radiațiuni vizibile. Acesta este un fapt de care trebue să se țină seama la fabricarea de izvoare de lumină artificială prin incandescență. Este necesar să se utilizeze material care să suporte temperaturi cât mai înalte.

Primul fir întrebuințat în secolul trecut pentru un bec cu incandescență a fost o sârmă de platină, deoarece acest fir nu se oxida la aer chiar la temperaturi ridicate. Platina însă, nu rezistă decât la o temperatură de 2064° K, iar eficacitatea luminoasă era redusă, de aceea s'a trecut dela platină la cărbune, care rezistă la temperaturi mult mai ridicate (3770° K). Incă în 1803 savantul rus V. V. Petrov apropiind două bețișoare de cărbune legate la polii unei puternice baterii electrice descoperii arcul electric. Incercările ce urmară n'au depășit însă stadiul experimental până la P. N. Iablocicov și A. N. Lodâghin.

Iablocicov obține în 1876 patentul pentru o lampă electrică «lumânarea lui Iablocicov» bazată tot pe principiul arcului electric, ce a avut o largă răspândire în lume, iar numele lui Lodâghin este legat de realizarea — pentru prima oară în lume a lămpii electrice cu incandescență. Firul de cărbune a fost înlocuit apoi cu filamente metalice: osmiu, tantal și wolfram.

Wolframul este astăzi singurul metal folosit pentru confecționarea filamentelor lămpilor cu incandescență, pentru calitățile sale și anume: punctul de topire foarte ridicat 3660° K, mare rezistență mecanică, are o mare selectivitate de radiație în partea vizibilă a spectrului, iar evaporarea lui este foarte redusă la temperaturi mari. Temperatura filamentului poate ajunge la 2400° K. Prin umplerea cu gaz inert (argon + azot) a globului de sticlă, s'a putut ridica temperatura de funcționare a lămpilor la 3000° K. Acest gaz inert a făcut ca evaporarea filamentului să devină cât mai mică, și acest gaz inert reflectă atomii metalului ce se evaporă întorcându-i tot pe metal, evitându-se astfel formarea depozitului ce se observă pe pereții sticlei, la becurile fără atmosferă gazoasă.

In 1936, becurile au fost perfecționate prin introducerea gazelor Kripton și Xenon în para becului. Ele dau un randament optic mult mai mare.

Temperatura soarelui este de circa 6000° K. Soarele radiază mult mai mult în violet decât un bec electric. Randamentul optic al unui corp negru este optim la temperatura de 6000° K.

Randamentul mic al filamentului unui bec se datorește temperaturii joase la care se află filamentul. Un bec electric cu incandescență emite multe raze infraroșii. Lumina emisă de un bec electric obosește ochiul, mai ales când este nevoie să se lucreze încontinuu la lumina electrică.

Numai 5% din toată energia unui bec se transformă în lumină, restul se pierde sub formă de căldură.

Pentru realizarea unei lămpi cu un randament mare și care să nu obosească ochii, fizicienii sovietici au căutat alte izvoare de lumină artificială. Ei au ajuns la fenomenul de luminiscență, descoperind « lumina rece ». Ca să înțelegem ce este « lumina rece » trebue să vorbim ceva despre tuburile de descărcări electrice în gaze rarefiate. Acestea se numesc radiatori de luminiscență.

Prin luminiscență înțelegem, în general, emisiunea de radiație luminoasă, vizibilă sau invizibilă, de către un corp care absoarbe alte feluri de energie decât cea termică.

Să vedem care este diferența între radiatorii termici și cei de luminiscență, sub forma de descărcări electrice în gaze.

La radiatorii termici, energia se distribue pe diferite lungimi de undă, fără ca noi să putem influența această distribuție, pe când radiațiunile emise de gaze în descărcările electrice pot fi influențate de noi.

Radiatorii de luminiscență dau linii spectrale datorită ridicării temperaturii gazului și datorită ciocnirii electronice.

Fenomenele de luminiscență au fost cunoscute încă de multă vreme, iar luminiscența a devenit obiectul cercetării științifice încă de acum trei secole. Unul dintre primii cercetători a fost Galileu; iar de atunci s'au ocupat cu luminiscența, într'o măsură mai mare sau mai mică, Boyle, Newton Lomonosov, Euler, Boscovich, V. Petrov, Arago, Brewster, Stockes, Becquerel, Limmel și alții. In timp de 3 secole, luminiscența nu a căpătat aproape nici o aplicare practică.

Lichidele luminiscente au fost folosite uneori numai pentru scopuri de reclamă, în baloane de sticlă mari, în vitrinele farmaciilor.

Explicarea teoretică a fenomenelor de luminiscență a fost dată de către Lomonosov, însă pe baza concepțiilor « clasice ». Lomonosov presupunea că lumina apare și se propagă în eter, când au loc vibrații mecanice rapide ale corpurilor. Astfel el explică luminiscența verde a vaporilor de mercur într'un tub vidat, în care erau agitate câteva picături de mercur.

Descoperirile lui Röntgen și Becquerel au adus pentru prima oară luminiscența pe tărâmul practic. Ecranele luminiscente pentru radioscopie, de care medician a avut nevoe, imediat după descoperirea razelor Röntgen, au devenit prima aplicație serioasă a luminiscenței.

Numărul specialiștilor care studiau luminiscența a crescut foarte mult. Concomitent cu această etapă a tehnicizării, s'a ivit una complect nouă și hotărîtoare în domeniul teoriei.

Pe baza teoriei cuantice, Einstein a explicat regula lui Stockes, iar în 1913, teoria cuantică a structurii atomilor (Bohr) a făcut să fie înțelese toate trăsăturile caracteristice ale întregului domeniu al luminiscenței.

Pentru înțelegerea fenomenului de luminiscență este necesar să reamintim structura atomului. Se știe că atomul este o particulă materială de dimensiuni foarte mici care se poate reprezenta ca un sistem planter, în care nucleul ocupă centrul sistemului, iar electronii se învârtesc în jurul nucleului cu viteze foarte mari, pe niște orbite mai apropiate sau mai depărtate de nucleu. Masa nucleului este foarte mare față de masa mică a electronului. Sarcina electrică pozitivă a nucleului este echilibrată de sarcinile electrice negative ale electronilor, astfel încât atomul este totdeauna neutru din punct de vedere electric.

Dacă se smulge un electron, atomul rămâne încărcat pozitiv și poartă numele de ion. Forța de atracție a nucleului față de electronii periferici este mai mică decât aceea față de electronii mai apropiați de nucleu, așa că pentru a smulge un electron periferic este nevoe de mai puțină energie decât pentru a smulge un electron mai apropiat de nucleu.

Atât electronii cât și ionii, fiind particule încărcate electric, sunt supuși legilor de atracție și respingere electrostatice.

Pentru a ioniza un atom este deajuns a-i smulge un electron. Această smulgere se face prin șoc. Șocul poate fi produs de un proiectil care să lovească electronul, iar proectilul poate fi format dintr'un alt electron liber, accelerat de un câmp electric. Din cionirea lor pot rezulta două efecte:

1) Electronul periferic să fie smuls

2) Electronul să fie îndepărtat de pe orbita sa pe altă orbită, pentru a reveni după un timp foarte scurt pe orbita inițială.

In primul caz are loc ionizarea atomului, iar în al doilea caz, electronul de pe o orbită primește, prin ciocnire, o energie care îl îndepărtează de pe orbita lui pe altă orbită, energie insuficientă însă, pentru a-l sustrage atracției nucleului. După un timp foarte scurt (10^{-7} — 10^{-8}) secunde) electronul revine pe orbita sa inițială cedând energia ce o primise. Această cedare de nergie se face *prin emiterea unei radiații* a cărei lungime de undă depinde de diferența dintre energia atomului înainte și după șoc, adică emite diferența de energie dintre nivelul inițial și cel final sub forma unei cuante.

Această cuantă de energie este emisă sub formă de energie radiantă (lumină).

Spectrul dat de lumina astfel obținută este un spectru discontinuu, pe când spectrul dat de lumina unei lămpi cu incandescență este un spectru continuu.

Un atom care a primit energie din afară poartă numele de atom excitat.

Radiația emisă de un electron care trece dela starea de excitație a atomului la starea de echilibru se numește *radiație de rezonanță.*

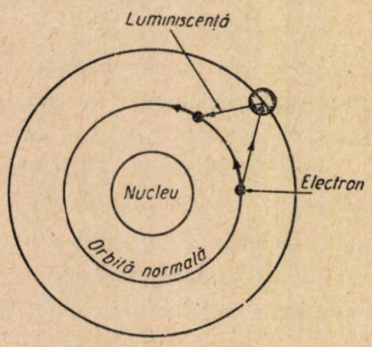


Fig. 1. — Atomul excitat

Un gaz excitat prin ciocniri electronice are atomii pe diferite nivele energetice.

Un exemplu va lămuri această teorie.

Pentru a ridica atomul de Na din starea lui inițială, la nivelul imediat superior, trebue să i se dea o energie de 2,1 electron-volți [1]). Atomul axcitat revine după scurt timp, la stare normală și atunci emite radiația de 589 mμ, care reprezintă linia spectrală galbenă a sodiului. In concluzie, prin ciocniri aplicate diferiților atomi, se pot realiza izvoare de lumină.

Scopul tehnicii este obținerea de *lumină rece,* adică un izvor având o eficacitate luminoasă cât mai mare, așa fel încât să nu dea naștere la cantități mari de radiații infraroșii sau de căldură în general, ci lumină albă, adică lumina să aibă o distribuție spectrală apropiată de céa a luminei zilei. Problema a fost atacată pe baza fenomenelor luminoase ce însoțesc trecerea electricității prin gaze

Descărcările electice în gaze sunt însoțite de emisiune de lumină caracteristică gazului.

Descăricările electrice în gaze rarefiate se studiază cu ajutorul unor tuburi în care se poate rarefia gazul cu ajutorul unei pompe, variindu-se astfel presiunea. Descărcările depind de natura gazului, de presiunea lui și de tensiunea electrică aplicată.

Să considerăm un tub cilindric lung de vreo 50 cm, plin cu aer uscat, sub presiunea atmosferică și să punem electrozii în legătură cu polii unei bobine de inducție. Dacă presiunea gazului este încă destul de mare, descărcarea nu trece prin tub: dacă rărim mai mult aerul, adică la vreo 50 mm de Hg, se produce o descărcare sub forma unui filament luminos șerpuitor.

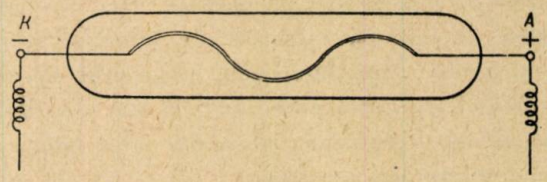


Fig. 2. — Aspectul descărcării electrice într'un gaz sub presiunea de 50 mm Hg.

Pe măsură ce vidul înaintează, banda luminoasă se îngroașă și se preface într'o coloană luminoasă, roșietică. Această coloană pleacă dela anod (A) și prezintă însușirile unui flux de electricitate pozitivă, care este deviată de un magnet. Pe măsură ce vidul înaintează, coloana pozitivă se scurtează, depărtându-se de catod (C) și devine mai puțin luminoasă, iar între capătul coloanei pozitive și catod se observă un spațiu întunecos (negru), iar catodul prezintă un punct ce luminează viu, în coloare albastră.

La presiunea de 1 mm Hg, banda luminoasă își schimbă coloarea roșie în albă și se ivesc o serie de straturi alternativ luminoase și obscure.

In fața catodului apare un spațiu luminos mic —lumina catodică, apoi un spațiu întunecos numit spațiul lui Crookes, apoi o zonă luminoasă numită zonă de lumină catodică sau lumină negativă; apoi un alt spațiu întunecos numit spațiul lui Faraday, după care urmează coloana luminoasă pozitivă. (fig. 3)

Fig. 3. — Descărcări electrice la presiunea de 1 mm Hg.

Care este explicația acestui fenomen? In interiorul tubului se află electroni liberi proveniți din cauze exterioare, ca razele cosmice sau radiațiile radioactive. Acești electroni liberi sunt accelerați datorită câmpului electric rezultat din tensiunea aplicată celor doi electrozi, spre electrodul legat la potențial + adică spre anod. In drumul lor ei ciocnesc atomii gazului din tub și, după felul cum se produce ciocnirea, atomii pot fi ionizați sau excitați. Dacă atomii sunt excitați, ei emit o radiație

[1]) Prin electron-volt se înțelege variația de energie a unui electron când parcurge tensiunea electrică de un volt.

de rezonanță. Dacă sunt ionizați, atunci ionii pozitivi formați se îndreaptă spre polul negativ (catod). Din ionizare au rămas electroni liberi, care se îndreaptă spre anod, ionizând sau excitând în drumul lor alți atomi. Pe măsură ce se ridică tensiunea, se mărește ionizarea, pentrucă electronii liberi au acumulat o energie suficientă pentru a produce ionizarea prin șoc. Electronul ciocnește un atom și, după cionire rezultă un ion din atomul lovit și 2 electroni liberi. La rândul lor, acești electroni, accelerați de câmpul electric, se ciocnesc cu alte molecule ale gazului din interior, producând noi ionizări. Electronii obținuți vor fi atrași de anod, iar ionii vor fi atrași de catod. Acești ioni, ciocnindu-se de catod, mai smulg o serie de electroni. O parte din ei servesc pentru neutralizarea ionilor care i-au smuls, iar restul vor fi lansați de câmpul electronic în masa gazoasă din interiorul tubului și, prin șoc vor creia noi ioni. Datorită câmpului electric și presiunii din interiorul tubului, acești noi ioni pot să atingă catodul, smulgând din nou electroni care vor neutraliza ionii și iarăși vor rămâne electroni liberi. Din acest exemplu, se vede că nu mai este nevoie de o sursă exterioară (raze cosmice sau radiații radioactive) pentru a întreține descărcarea din tub. Din acest moment descărcarea devine de sine stătătoare. Pentru a provoca emiterea unei mai mari cantități de electroni, catodul se acoperă cu substanțe ca oxid de bariu, care prin căldură dau naștere unei bogate emisiuni de electroni. Acești catozi se numesc catozi calzi. Pe măsură ce catodul se încălzește, el emite un număr crescând de electroni. Acest fenomen se numește efect termoionic.

Zonele luminoase din tubul de descărcare sunt produse prin radiația atomilor excitați.

Radiațiunile luminoase emise de gazele excitate se folosesc în tehnica iluminatului. Coloana pozitivă este folosită ca izvor de lumină. Spectrul dat de coloana pozitivă este un spectru continuu, fără liniile lui Frauenhofer, deci lumina coloanei pozitive nu seamănă cu lumina soarelui.

In afară de lumina pozitivă, într'un tub de descărcare există și limina negativă care, după cum am văzut, este lumina dintre spațiul Crookes și spațiul Faraday; și această lumină a găsit o aplicare practică în tehnica iluminatului, dar numai în cazul lămpilor de semnalizare. Aceste lămpi poartă numele de *lămpi cu licărire.* La aceste lămpi, distanța dintre electrozi este mică, din care cauză coloana pozitivă dispare iar lumina este emisă într'un spațiu care înconjoară catodul.

Lumina coloanei pozitive a descărcării de joasă și mare presiune este folosită în tehnica iluminatului. Lămpile care folosesc radiația coloanei pozitive sunt de 2 feluri:

1) lămpi cu descărcare în regim de arc și
2) lămpi cu descărcare normală.

Din prima categorie fac parte lămpile cu mercur de înaltă presiune și arcul propriu zis, iar celelalte sunt formate din lămpile de descărcări de mare tensiune în vapori și gaze cu mică presiune; sunt lămpile cu mercur, sodiu, neon și argon.

Lămpile cu descărcări în vapori de sodiu. Sodiul radiază o lumină galbenă, pentru care ochiul este foarte sensibil. Lămpile cu sodiu au o mare eficacitate luminoasă de 4—5 ori mai mare ca lămpile cu incandescență. Dacă în lampă există numai vaporî de sodiu, ea nu se poate aprinde, de aceea în lampă în afară de Na, se introduce neon la o presiune de câțiva mm Hg. La aprindere descărcarea se formează mai întâi în neon și durează până ce lampa se încălzește la 300°C, după care încetează descărcarea în neon. rămânând numai descărcarea în vaporii de sodiu, formați datorită temperaturi lămpii. Neonul adăugat la vaporii de sodiu servește pentru a mări lungimea parcursului electronilor între catod și anod. Această mărire a parcursului electronilor *mărește* considerabil numărul de atomi de sodiu excitați de un electron.

In laborator s'au putut obține tuburi speciale cu sodiu, la care 70% din energia consumată de coloana pozitivă a putut fi transformată în radiație galbenă, iar încălzirea lămpii s'a făcut din exterior, pentru a se putea produce vaporizarea sodiului. Pentru a împiedica efectul de înegrire pe care vaporii de sodiu îl au asupra sticlei ordinare, lămpile cu descărcări în vapori de sodiu sunt făcute dintr'o sticlă specială (de borosilicați) rezistentă la vaporii de sodiu. Tubul de sticlă propriu zis se introduce într'o cămașe de sticlă în interiorul căreia se face vid. Lămpile cu sodiu pot fi întrebuințate numai pentru iluminatul la care nu se cere nici un fel de percepere a culorile obiectelor (iluminatul șoselelor, turnătoriilor, etc.).

Lămpile cu descărcări în vapori de mercur. Descărcarea în vapori de mercur este folosită pentru iluminat, sub două forme: descărcare în vapori de mercur la joasă presiune (0,01—1 mm Hg) și descărcări la înaltă presiune (110 mm Hg până la sute de atmosfere). Lămpile cu descărcare în vapori de mercur de joasă presiune au catodul lichid sau solid, rece sau cald. Lămpile cu catod lichid sunt folosite pentru heliografie (copierea planurilor), iar cele cu catod solid, pentru iluminat. Aceste lămpi au căpătat o foarte mare extindere, prin aplicarea pe lămpi a substanțelor luminiscente. In lămpile cu vapori de mercur coloana pozitivă

părăsește pereții tubului și formează un arc de o strălucire mare pe axul acestuia. Eficacitatea luminoasă și strălucirea lămpilor cu vapori de mercur depinde de presiune. Mărirea presiunii provoacă întărirea unei serii de linii spectrale.

Electrozii unei lămpi cu vapori de mercur sunt formați din spirale de wolfram, acoperite cu oxizi. Tubul este făcut din sticlă greu fuzibilă (duran) sau din cuarț, deoarece temperatura din interiorul lămpii se ridică la 500° C. Lampa este umplută cu neon sau argon, la o presiune de câțiva mm Hg, care ușurează aprinderea și cu o cantitate oarecare de mercur. Aprinderea se produce în neon sau argon și apoi se vaporizează mercurul și descărcarea se produce numai în vapori de mercur. Radiațiile unei lămpi cu vapori de Hg de mare presiune dau un spectru cu liniile: galben, verde, albastru și violet. Lumina lor diferă de lumina zilei, prin absența radiațiilor roșii. Presiunea vaporilor de mercur se mărește prin mărirea curentului. Pe măsură ce se mărește presiunea, crește și strălucirea lămpii. Lămpile cu descărcări în vapori de mercur de foarte mare presiune se folosesc pe căile ferate și pe aerodromuri. Lămpile sunt formate dintr'un tub de cuarț cu un diametru de 10 mm. Lămpile cu mercur cu tub de cuarț sunt folosite în medicină, ca izvoare de raze ultraviolete. Se întrebuințează tub de cuarț deoarece cuarțul este transparent pentru razele ultraviolete. De astfel de lămpi se servește medicina pentru a face băi de raze ultraviolete copiilor, în orice anotimp. Razele ultraviolete, au acțiune vătămătoare asupra ochilor. De aceea se recomandă a se purta ochelari negri.

Culoarea luminii dată de o lampă cu mercur este verzuie.

Lămpile fluorescente. Un izvor artificial de lumină este cu atât mai bun, cu cât culoarea luminii dată de el este mai aproiată de aceea a luminii zilei.

Lumina naturală a zilei este câte odată mai roșcată, altă dată bate mai mult în albastru, după cum predomină razele directe ale soarelui sau razele difuzate pe cerul senin sau prin nori. Pentru a exprima în ce măsură o lumină este mai albă, se recurge la noțiunea de *temperatură de culoare.*

Temperatura de culoare a luminii unei zile însorite la amiază corespunde la 5300° K, cea dată de cerul complect acoperit de nori la 6500° K, iar cea dată de cerul senin la 11000° K.

Lumina albă a fost obținută prin izvoarele așa numite de «lumină rece». Se numește «lumină rece» acea lumină care este întovărășită de mai puține radiații de căldură și care au o mai mare parte a radiațiilor în partea vizibilă a spectrului. Izvorul de lumină care dă și lumina albă și în același timp și lumina cea mai rece realizată până acum este lampa fluorescentă. Lampa fluorescentă este un tub de descărcări electrice (din sticlă) cu peretele interior acoperit cu substanțe flourescente.

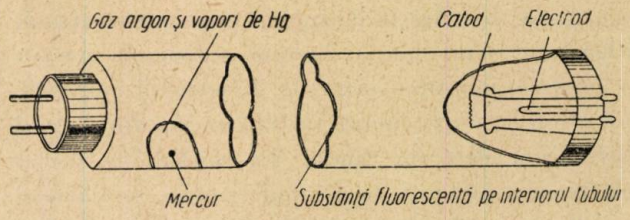


Fig. 4. — Lampă fluorescentă

Lămpile fluoresente sunt alimentate cu un curent alternativ. Cei doi electrozi dela capetele tubului servesc pe rând ca pol pozitiv și pol negativ (anod și catod). Electrozii pot fi reci sau calzi, de aceea lămpile fluorescente se împart în lămpi cu electrozi reci (catod rece) și lămpi cu electrozi calzi (catod cald). Temperatura catodului rece este 150—200° C, iar a celui cald 900—950° C. Lampa cu catod rece produce mai multă căldură decât lampa cu catod cald, deoarece masa catodului rece este mult mai mare ca a celui cald. Impărțirea catozilor în reci și calzi se face după temperatura de funcționare a catodului și nu după căldura desvoltată în lampă. Catodul rece este format dintr'un păhărel cilindric sau cilindric-conic, din tablă de fier acoperit cu substanțe emisive ca azotură de bariu.

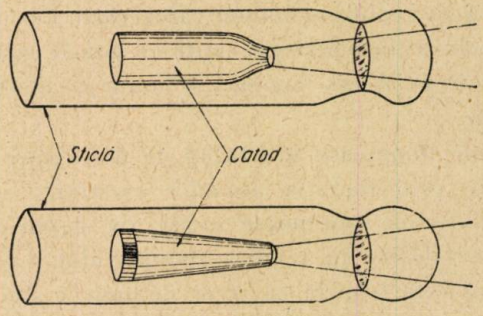


Fig. 5. — Catod rece

Electrozii funcționează la fel cu cei dela tuburile de semnalizare cu neon-argon. Ei funcționează la tensiuni înalte.

Catodul cald este format dintr'o spirală *a* dublă de wolfram, acoperită cu un strat de substanță emisivă (carbonat de bariu și carbonat de strontiu) și prinsă de 2 coloane b. Sunt și alte sisteme: suportul ferește spirala de eforturile la care este supusă în timpul descărcării. Spirala emite electroni când este încălzită prin trecerea curentului, fără a avea nevoie de tensiuni înalte ca la catodul rece. Lămpile fluorescente sunt umplute cu argon, la o presiune de 3—4 mm Hg și conțin și câteva mg

de mercur. Argonul uşurează aprinderea descărcării. Căldura produsă prin această descărcare evaporă o parte din mercurul din lampă, pentru ca apoi, întreaga descărcare să se producă numai în vapori de mercur, datorită căreia se produc radiaţii. O parte din aceste radiaţii sunt plasate în spectrul vizibil şi o mare parte a lor se găseşte în regiunea ultravioletă a spectrului.

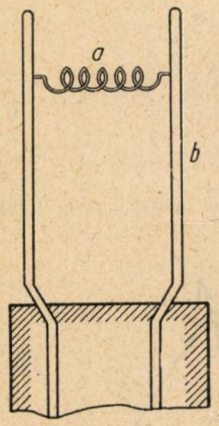


Fig. 6 — Catod cald.

Aceste radiaţii ultraviolete sunt transformate în lumină vizibilă cu ajutorul substanţelor fluorescente depuse pe peretele interior al sticlei din care este făcută lampa.

Substanţele care au proprietatea de a absorbi radiaţii de anumite lungimi de undă şi de a emite imediat sau după un timp oarecare, radiaţii de altă lungime de undă se numesc *luminofori.*

Dacă substanţa absoarbe radiaţii şi emite alte radiaţii după un anumit timp, acest fenomen se chiamă *fosforescenţă.* Dacă emite însă radiaţii imediat după ce a absorbit alte radiaţii, este *fluorescenţă.*

Dacă un ecran dintr'o substanţă fluorescentă se aşează lângă sau în interiorul unui tub de descărcare, unele radiaţiuni de o anumită culoare, se pot transforma în radiaţiuni de altă culoare de care este nevoie, pentru ca lumina totală să fie asemănătoare cu lumina zilei.

Un ecran fluorescent de rodamină (substanţă organică) transformă o parte a radiaţiunilor ultraviolete şi vizibile în radiaţiuni de culoare roşie şi care substaţă, pusă în lumina unei lămpi cu vapori de mercur, dă o lumină totală mult mai apropiată de lumina albă.

S'au găsit în ultimii ani, o mulţime de luminofori care, fiind introduşi în tuburi de descărcare, schimbă culoarea luminii emise, după necesităţi, în lumină albă sau de alte colori.

Numărul substanţelor fluorescente este foarte mare, însă numai câteva din ele se folosesc la confecţionarea lămpilor fluorescente. Cele mai importante dintre ele sunt: Wolframatul de magneziu $Mg\,WO_4$, silicatul de zinc $Zn_2\,SiO_4$ şi silicatul de zinc şi beriliu $(ZnBe)\,SiO_4$. Wolframatul de magneziu dă o lumină albastră, silicatul de zinc dă o lumină verde, iar silicatul de zinc şi beriliu dă o lumină dela roz până la galben, după cum conţine mai mult sau mai puţin beriliu.

Lumina dată de lămpile fluorescente este « rece ».

Lămpile fluorescente dau circa 20% din puterea consumată, sub formă de lumină, pe când lămpile cu incandescenţă dau numai 10—15%.

Eficacitatea luminoasă a lămpilor fluorescente este mult influenţată de dimensiunile lor, de temperatura la care sunt puse să funcţioneze şi de culoarea lor. Cu cât lămpile sunt mai lungi, cu atât eficacitatea luminoasă este mai mare. Insă lungimea nu trebuie să treacă peste anumită limită căci eficacitatea începe să scadă.

Lămpile fluorescente au o strălucire mică faţă de lampa cu incandescenţă, deci ele pot fi întrebuinţate descoperite; fără a prezenta pericolul orbirii. Astfel de tuburi sunt întrebuinţate foarte mult pentru luminarea sălilor, hallurilor de hotel, teatrelor şi, în general cu scop decorativ.

Lămpile mai sus descrise emit o lumină aparţinând în special spectrului vizibil şi sunt foarte sărace în raze infraroşii şi ultravilolete. Lumina emisă de asemenea lămpi este odihnitoare pentru ochi, iar coloarea corpurilor nu mai schimbă de nuanţe; oamenii muncii pot lucra în condiţiuni mult mai prielnice la lumina acestor lămpi.

Studiul luminiscenţei căpătă din an în an, o importantă tot mai mare.

In ultimii ani, luminiscenţa a căpătat o răspândire uriaşă, în cele mai diverse ramuri ale tehnicii, medicinii, agriculturii, ştiinţei şi artei.

Un bun iluminat asigură igiena generală a muncii, dă posibilitate să se lucreze în mod productiv, fără ca vederea să fie jenată. In industrie el reduce numărul accidentelor de muncă, măreşte productivitatea muncii şi ajută la menţinerea curăţeniei în uzină.

Azi studiile îndreptate în acest domeniu sunt foarte numoroarse. Progresul acesta este determinat de colaborarea strânsă dintre cercetările ştiinţifice şi tehnice.

Lămpile cu lumina rece inventate de marele fizician S. I. Vavilov, premiat post-mortem cu premiul Stalin, funcţionează la o tensiune normală de 110 sau 220 Volţi şi durează mult mai mult decât cele cu filament. In U.R.S.S., multe clădiri, străzi, pieţe şi întreprinderi sunt luminate cu asemenea lămpi.

Analiza luminiscentă, datorită cercetărilor lui S. I. Vavilov a început să fie folosită în chimie, medicină, mineralogie şi alimentaţie.

Azi, în Uniunea Sovietică se lucrează mult în diferite ramuri speciale ale luminiscenţei. Toată lumea recunoaşte poziţia de avantgardă a ştiinţei sovietice şi în acest sector.

Noi datorăm foarte mult revoluției învingătoare pentru acest succes și pentru toate succesele științei sovietice, care servește ca exemplu demn de urmat pentru tânăra noastră republică în pașii ei pentru construirea socialismului.

U.R.S.S. este țara care a stabilit pricipiul legăturii indisolubile între teorie și practica științifică. O astfel de legătură este piatra fundamentală și chezășia unei desvoltări continui și sănătoase a științei.

CHESTIUNI DE EXAMEN

Concursul de matematică și fizică din anul 1952. Etapa I

MATEMATÍCI GRUPA I (CLASA VIII LICEE)

I. — Se dă un triunghiu oarecare ABC, și fie I punctul în care se întâlnesc bisectoarele sale interioare.

1. Să se demonstreze că $\sphericalangle BIC = 90^0 + \sphericalangle \frac{BAC}{2}$

2. Punctele B și C fiind fixe, să se determine locul geometric al punctului I atunci când punctul A se mișcă în planul triunghiului, așa fel ca unghiul A să rămână constant.

3. Fie I′ centrul cercului tangent laturii BC și prelungirilor laturilor AB, AC. Să se demonstreze că cercul care trece prin punctele B, C, I trece și prin punctul I′.

4. Cercul ce trece prin punctele B, I, C, mai taie latura AB în C′ și latura AC în B′. Să se demonstreze că triunghiurile ABC și AB′C′ sunt egale între ele.

II. — Doi bicicliști A și B merg dela București la Ploești, distanța dintre aceste orașe fiind de 60 km. Ei pornesc în același timp din București: A face, în medie, cu 3 km. pe oră mai mult ca B și ajunge la Ploești cu o oră înaintea lui B. Se cere vitezele celor doi bicicliști.

(Ambele chestiuni obligatorii, durata 2 ore)

MATEMATICA ETAPA I-a GRUPA II-a CLASA IX LICEE ȘI ANUL II ȘCOLI SPECIALE DE 2 ANI.

I. Planul unei țesătorii prevede o producție de 625 m stofă pe zi. Luni, țesătoria rămâne în urmă față de plan cu un anumit procent; Marți, ea mărește producția față de Luni cu un procent care este cu 3% mai mare decât procentul cu care a rămas în urmă Luni, și produce astfel 641,25 m. stofă.

1. Cu cât la sută a rămas fabrica în urmă Luni?

2. Ecuația problemei are și o soluție negativă, care este înțelesul ei?

II. Să dă un cerc O și doi diametri AB, CD perpendiculari unul pe celălalt. Prin punctul A se duce o secantă AN care taie diametrul CD în M și cercul în N.

1. Să se demonstreze că produsul AM × AN este constant când dreapta AN se rotește în jurul punctului A.

2. Prin punctul M, se duce o perpendiculară pe diametrul CD, care taie cercul în P.

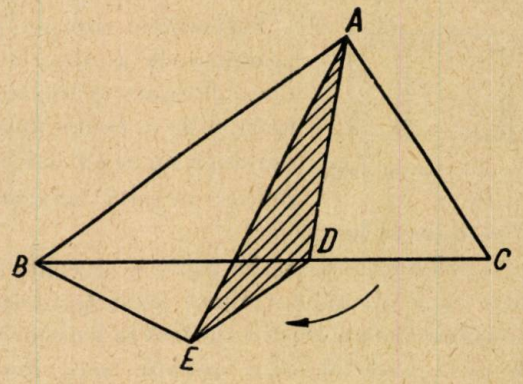
Să se demonstreze că $MA \times MN = MP^2$

3. Ce poziție trebue să ocupe coarda AN pentru ca produsul MA × MN să fie maxim.

(Ambele chestiuni obligatorii)

MATEMATICA GRUPA III-a Cl. X-a LICEE) ETAPA I-a

I. — O placă are forma unui triunghiu dreptunghic cu catetele AB = 20 cm., AC = 15 cm. Fie AD înălțimea triunghiului. Rotim partea ADC a triunghiului în jurul dreptei AD așa fel ca dreapta AC, care ocupă poziția AE să formeze cu AB un unghiu de 60°.



Se cere:

1. Distanța BE

2 Unghiul diedru cu care a trebuit să rotim triunghiul ADC.

3. Volumul tetraedrului

4. Distanța dela punctul D la planul EABC.

II. — Avem în fața noastră, o statuie înaltă de 5 m. Dintr'un punct A, vedem statuia sub un unghiu oarecare, iar dacă ne apropiem de statuie cu AB = 13 m., o vedem sub un unghiu de două ori mai mare. Se cere:

1. Sub ce unghiu am văzut statuia când am fost în punctul A.

2. Cu cât trebue să ne apropiem de statuie pentru a o vedea sub un unghiu de trei ori mai mare ca din A. (se neglijează înălțimea observatorului.

N O T A. Unghiul se consideră aflat când se determină o funcție trigonometrică a sa. Nu se vor folosi niciun fel de table.

(*Ambele chestiuni obligatorii*)

MATEMATICA GRUPA IV (CLASELE XI LICEU) ETAPA I-a

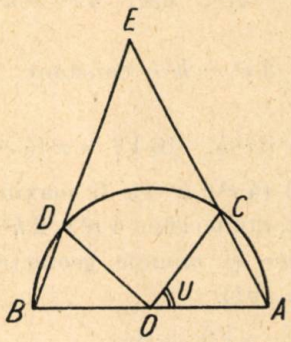
I. — Se consideră un semicerc limitat de diametrul AB. Un unghiu drept cu vârful în centrul O al semicercului se rotește în jurul lui O. Intr'o poziție oarecare laturile lui taie semicercul în C și D, iar dreptele AC și BD se taie în E. In momentul inițial OC este în poziția OA, iar în momentul final OC este perpendicular pe OA

Se cere:

a) Locul geometric al punctului E.

b) Lungimea liniei care reprezintă locul geometric cerut prin întrebarea *a*.

c) Unghiul AOC = U, iar raza semicercului R. Să se exprime în funcțiune de R. și U, volumul născut prin rotația de 360° a triunghiului ABE în jurul diametrului AB.



II. — Un muncitor are o anumită normă. Luni el rămâne în urmă față de normă cu X%; Marți el mărește producția față de Luni cu (X+5)% și ajunge astfel să îndeplinească tocmai bine norma.

Se cere:

1. Să se afle cu cât la sută a rămas în urmă Luni?
2. Ecuația problemei are și o soluție negativă, Ce înțeles are ea?
3. Să se demonstreze că, în general, dacă un muncitor rămâne în prima zi cu X% în urma normei, iar în a doua zi el mărește producția față de prima zi cu Y%, condiția ca el să îndeplinească a doua zi norma este:

$$\frac{XY}{Y-X} = 100$$

(Ambele chestiuni obligatorii)

FIZICA ETAPA I-a GRUPA II-a (CLASA VIII LICEE)

1. Legile fundamentale ale Mecanicii. Importanța lor pentru desvoltarea Mecanicii și a tehnicii.
2. Problemă.

Intr'o fabrică un rezervor situat la 10 m înălțime e umplut cu apă cu ajutorul unei pompe acționată de un motor.

Lucrul mecanic necesar pentru umplere este de 3.400.000 kgm. Inainte de naționalizarea principalelor întreprinderi industriale, munca nefiind mecanizată, pompa era manevrată de 4 muncitori fiecare desvoltând o putere de 0,19 C.P.

Știind că lucrul mecanic folosit pentru ridicarea apei este numai jumătate din lucrul cheltuit de muncitori, se întreabă:

1. Capacitatea rezervorului
2. Cât timp foloseau muncitorii pentru a-l umple.

(Ambele chestiuni obligatorii)

FIZICA ETAPA I-a GRUPA II-a (CLASA IX-a LICEE)

1. Dilatarea corpurilor solide și lichide.
2. Un autobuz având greutatea de 3 tone a pornit având 10 kg de benzină în rezervor. Pentru câți km de drum o să-i ajungă benzina, știind că coeficientul de frecare pe șosea este de 0,2, că benzina are puterea calorifică 11.000 K cal/kg și numai 15% din căldura produsă de explozia benzinei se transferă în lucru util.

(Ambele chestiuni obligatorii)

FIZICA ETAPA I-a GRUPA III-a (CLASA X-a LICEE)

1. Refracția luminii. Fenomene din natură explicate cu ajutorul cunoștințelor despre refracție.
2. Ce poziție trebue să aibă un obiect luminos față de vârful unei oglinzi concave, pentru a căpăta o imagine reală de 4 ori mai mare decât obiectul? Dar pentru ca imaginea să fie virtuală și de 4 ori mai mare?

Raza de curbură a oglinzii este de 50 cm

Să se facă construcțiile grafic.

(Ambele chestiuni obligatorii)

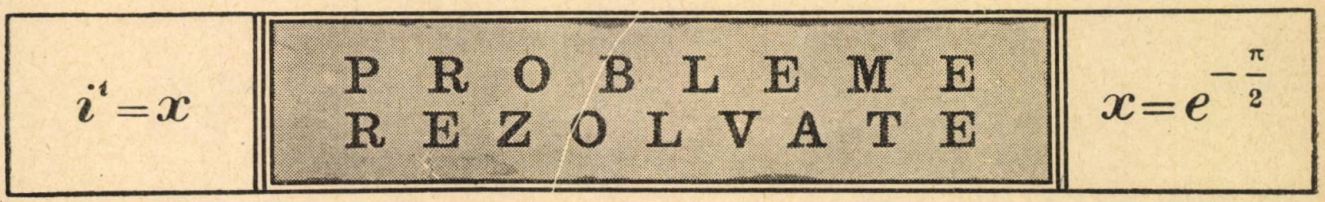
FIZICA ETAPA I-a GRUPA IV-a (Cl.XI LICEE și ANUL II ȘCOLI SPECIALE DE 2 ANI)

1. Câmpul electric. Producerea lui și mărimile care-l caracterizează.
2. O pilă electrică cu rezistență interioară necunoscută, închide un circuit exterior cu rezistența de 2 ohmi.

Diferența de potențial la borne este de 1 volt.

Care este rezistența interioară a pilei dacă forța electromotoare este de 1,8 V?

(Ambele chestiuni obligatorii)



Problema 298

Se consideră triunghiul ABC *dreptunghic în* A *înscris în cercul* O. *Se notează cu* D *și* E *intersecțiile lui* AC *și* AB *respectiv cu tangentele duse în* B *și* C *la cerc. Se cere*:

1. *Să se arate că perpendicularele coborîte din centrul cercului pe* AB *și* AC *trec respectiv prin mijloacele segmentelor* BD *și* CE.
2. *Să se demonstreze relația*:

$$AE \times BD \times CD = AD \times BE \times CE.$$

3. *S fiind suprafața trapezului* DBEC *se cere valoarea razei* R *a cercului* O *când* $\sphericalangle C = 30^\circ$.

Nicolae Chirculescu

Soluție. 1°. Perpendiculara coborîtă din O pe AB, trece prin mijlocul acesteia, iar AC fiind paralelă cu ea rezultă că în triunghiul ABD mijlocul lui BD este intersecția perpendicularei cu BD, folosind proprietatea că într'un triunghi dreapta care trece prin mijlocul unei laturi și e

paralelă cu una din celelalte două trece prin mijlocul laturei a treia. Analog demonstrăm că perpendiculara coborîtă din O pe AC trece prin mijlocul lui CE.

2°. Triunghiurile dreptunghice ABD și ACE sunt asemenea având $\sphericalangle ABD = \sphericalangle AEC$ alterne interne față de paralelele BD, CE tăiate de secanta BE. Rezultă:

$$\frac{BD}{CE} = \frac{AB}{AE} \qquad AB = \frac{BD \times AE}{CE} \qquad (1)$$

Se mai observă că triunghiurile BCD și BED sunt echivalente având baza comună (BD) și vârfurile pe CE care este paralelă cu BD. Putem deci scrie:

$$BE \times AD = AB \times CD$$

de unde

$$AB = \frac{BE \times AD}{CD} \qquad (2)$$

Comparând valorile lui AB date de (1) și (2) obținem:

$$\frac{BD \times AE}{CE} = \frac{BE \times AD}{CD}$$

$$BD \times AE \times CD = BE \times AD \times CE$$

adică relația cerută.

3°. Intr'un triunghi dreptunghic în care un unghi este de 60° cateta alăturată unghiului este jumătate din ipotenuză. Avem:

$$CE = \sqrt{3}\, BC = 2\sqrt{3}\, R$$

$$BD = \frac{BC}{\sqrt{3}} = \frac{2R}{\sqrt{3}}$$

deci

$$S = \frac{\left(2\sqrt{3}\, R + \frac{2R}{\sqrt{3}}\right) 2R}{2} = \frac{8R^2}{\sqrt{3}}$$

de unde:

$$R = \sqrt{\frac{\sqrt{3}S}{8}}$$

In general $S = 2\, R^2\, (\operatorname{tg} C + \operatorname{cotg} C)$.

Poblemea 310

Dacă S_1 *și* V_1 *sunt suprafața laterală și volumul cilindrului de volum maxim înscris în sfera de rază* R *și* S_2, V_2 *sunt suprafața laterală și volumul cilindrului de suprafață laterală maximă înscris în aceeași sferă, să se arate că:*

$$\frac{S_1}{V_1} = \frac{S_2}{V_2} \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Claudiu C. Ionescu-Bujor

Soluție. In primul caz: $V_1 = \pi r^2 h$ pentru ca să fie maxim observăm suma

$$r^2 + \frac{h^2}{4} = R^2, \quad \text{deci} \quad 4r^2 + h^2 = 4R^2 \qquad (1)$$

$$4r^2 + h^2 = \text{constant} \qquad (1')$$

Dar

$$V_1 = \pi r^2 h, \quad 16\, V_1^2 = \pi (4r^2)^2 h^2$$

deci produsul $(4r^2)^2 h^2$ va fi maxim, $(4r^2 + h^2)$ fiind constant, atunci când $4r^2 = 2h^2$ sau $h = r\sqrt{2}$. (Vezi «Maxime și minime geometrice» de Ion Ionescu, pag. 161).

In cazul $h = r\sqrt{2}$ avem:

$$V_1 = \frac{4\pi\sqrt{3}\, R^3}{9} \text{ iar } S_1 = \frac{4\pi\sqrt{2}\, R^2}{3}$$

deoarece înlocuind în (1) avem:

$$6r^2 = 4R^2; \qquad r = R\frac{\sqrt{6}}{3}$$

și

$$3h^2 = 4R^2; \qquad h = \frac{2\sqrt{3}\, R}{3}.$$

2°. In al doilea caz, $S_2 = 2\pi rh$ sau

$$S_2^2 = 16\pi^2 r^2 \left(\frac{1}{2}h\right)^2$$

dar $r^2 + \left(\frac{1}{2}h\right)^2 = R^2 = \text{constant}$, deci $r^2 \left(\frac{1}{2}h\right)^2$ va fi maxim, suma fiind constantă când

$$r^2 = \left(\frac{1}{2}h\right)^2 \quad \text{sau} \quad r = \frac{h}{2}, \quad h = 2r$$

și

$$h = 2r = R\sqrt{2}$$

ne dă:

$$S_2 = \pi h^2 = 2\pi R^2$$

și volumul este

$$V_2 = \pi r^2 h = 2\pi r^3 = \frac{\pi R^3 \sqrt{2}}{2}.$$

Făcând raporturile, găsim:

$$\frac{S_1}{V_1} = \frac{\sqrt{6}}{R}; \quad \text{și} \quad \frac{S_2}{V_2} = \frac{2\sqrt{2}}{R}$$

și relația cerută este verificată.

Problema 311

Se consideră triunghiul echilateral ABC. *Din vârful* C *ca centru cu raza* x *mai mică decât latura triunghiului echilateral, se construește un arc de cerc, situat în afara triunghiului și care întâlnește laturile triunghiului* CA *și* CB *respectiv în* D *și* E. *Din punctele* A *și* B *ca centre, cu raze* AD

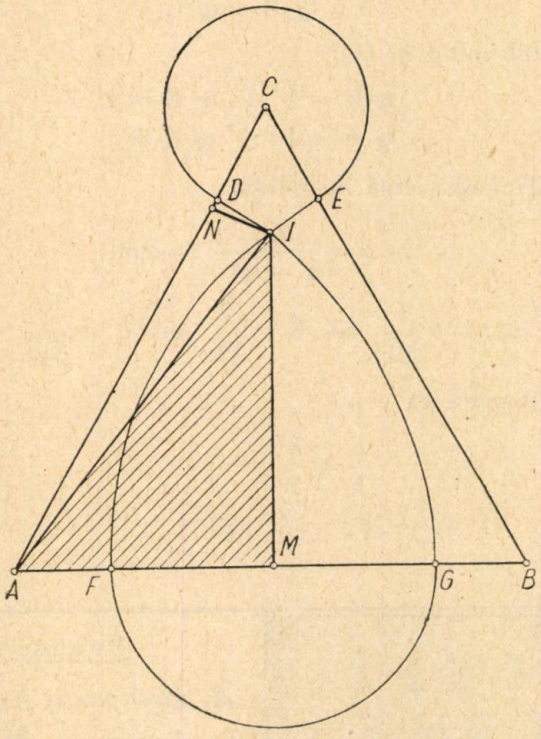
și BE *se construesc arce de cerc ce întâlnesc latura* AB, *în* F *și* G. *Pe* FG *ca diametru, se construește în afara triunghiului un semicerc.*

Se cere să se demonstreze că lungimea liniei curbe astfel obținute este independentă de x. *Se consideră cazul când arcele* DG *și* EF *se întâlnesc în* I. *Se cere să se calculeze distanțele punctului* I *de laturile triunghiului, în funcțiune de latura* l *a triunghiului și* x.

I. N. Sager

Soluție. Lungimea arcului DE exterior triunghiului este:

$$\frac{\pi x \,.\, 300^0}{180^\circ} = \frac{5\pi x}{3}.$$



Lungimea arcului DG este:

$\frac{\pi(l-x)}{3}$. Deasemeni și lungimea arcului EF.

Diametrul semicercului FG este: $l - 2x$. Deci lungimea sa este:

$$\frac{\pi(l-2x)}{2}.$$

Lungimea liniei curbe va fi:

$$L = \frac{5\pi x}{3} + \frac{2\pi(l-x)}{3} + \frac{\pi(l-2x)}{2}\ ;\ \text{sau}$$

$$L = \frac{7\pi l}{6}$$

Fie I punctul de întâlnire al arcelor DG și EF, M proiecțiunea lui I pe AB. Triunghiul dreptunghic AIM dă: $IM^2 = (l-x)^2 - \frac{l^2}{4}$

$$\overline{IM}^2 = \frac{3l^2 + 4x^2 - 8xl}{4},\quad \text{Deci}$$

$$IM = \sqrt{\frac{3l^2 + 4x^2 - 8lx}{2}}$$

Distanțele lui I de laturile CA și CB sunt:

$$\overline{IN} = \frac{l\sqrt{3} - \sqrt{3l^2 + 4x^2 - 8lx}}{4}.$$

Problema 314

Să se arate că dacă

$$a = x\sqrt{1+y^2}\quad b = y\sqrt{1+x^2}\quad c = x + y$$

avem:

$$4c^2(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) = (c^4 - a^4 - b^4 + 2a^2b^2)^2.$$

C. Ionescu-Țiu

Soluție. Notăm cu E prima parte a egalității:

$$E = 4c^2[(b+c)^2 - a^2][a^2 - (b-c)^2] =$$
$$= 4c^2[b^2 + 2bc + c^2 - a^2]\cdot[a^2 - b^2 + 2bc - c^2] =$$
$$= 4c^2[4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2] = 4c^2(-a^4 - b^4 - c^4 + 2b^2c^2 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2) =$$
$$= 4(x+y)^2[x^4(1+y^2)^2 - y^4(1+x^2) - (x+y)^4 + 2x^2y^2(1+x^2)(1+y^2) + 2x^2(1+y^2)(x+y)^2 + 2y^2(1+x^2)(x+y)^2].$$

Inmulțind și făcând reducerile, obținem

$$E = 4(x+y)^2(4x^4y^2 + 4x^2y^4 + 8x^3y^3) = 16x^2y^2(x+y)^4.$$

Fie F partea doua a egalității.

$$F = [(c^4 - (a^2 - b^2)^2]^2 = [(x+y)^4 - (x^2 - y^2)^2]^2 =$$
$$= (x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 - x^4 + 2x^2y^2 - y^4]^2 = [4xy(x^2 + 2xy + y^2)]^2 =$$
$$= 16x^2y^2(x+y)^4.\ \text{Deci } E = F.$$

Problema 347

Intr'un vas de aluminiu de greutate $G = 150$ *gr se află* $G_1 = 500$ *gr apă la temperatura de* $t = 20^\circ$. *In apă este introdusă o rezistență electrică de* 22 Ω, *prin care trece un curent de* 5 A. *După cât timp dela momentul în care începe să treacă curentul prin rezistență, se va evapora jumătatea*

din apă, conținută în vas, știind că pierderile de căldură sunt de 20%?

(Căldura de vaporizare a apei la 100° este 539 cal/g, căldura specifică a aluminiului 0,212 cal/g°).

S. Fissgus

Soluție. Pentru a aduce vasul și apa la temperatura de 100° avem nevoie de

$$(100 - t)\,[0{,}212\ G + G_1) = 42544 \text{ cal.}$$

Pentru vaporizarea cantității cerute de apă, avem nevoie de

$$\frac{G}{2} \cdot 539 = 134750 \text{ cal,}$$

în total deci 177 294 cal.

Pierderile de căldură vor fi $\frac{177\,294 \cdot 20}{100} = 35\,459$ cal, rezistența în timpul t va trebui să producă deci 212 753 cal.

Căldura produsă în timpul t de un circuit de rezistență R, prin care trece un curent de intensitate I, este

$$Q \text{ cal} = 0{,}24 \cdot I^2 \cdot R \cdot t,$$

de unde timpul în care circuitul desvoltă Q calorii este

$$t = \frac{Q \text{ cal}}{0{,}24 \cdot I^2 \cdot R}$$

pentru cazul problemei avem deci

$$t = \frac{212\,755}{0{,}24 \cdot 25 \cdot 22} = 1612 \text{ sec} = 26 \text{ min } 52 \text{ sec.}$$

Problema 359

Tangentele unghiurilor unui triunghiu ABC *raportându-se la* 1 : 2 : 3, *să se afle raporturile dintre laturile a, b, c.*

S. Avanesean (Asev)

Soluție. Conform enunțului avem:

$$\frac{tg\ A}{1} = \frac{tg\ B}{2} = \frac{tg\ C}{3}$$

Ținând seama de proprietățile rapoartelor, avem:

$$\frac{tg\ A + tg\ B + tg\ C}{1+2+3} = \frac{tg\ A\ tg\ B\ tg\ C}{6} = tg\ A.$$

Intrucât $tg\ A \neq 0 \quad (A \neq 0)$

$$tg\ B\ tg\ C = 6$$

Mai avem:

$$1{,}5\ tg\ B = tg\ C.$$

Inlocuind în (1):

$$tg^2 B = 4 \ ; \quad tg\ B = 2$$
$$tg\ A = 1 \ ; \quad tg\ C = 3.$$

Ținând seamă de relația:

$$\sin \alpha = \frac{tg\alpha}{1 + tg^2} \quad \text{avem:}$$

$$\sin A = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin B = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad \sin C = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Rezultă că

$$\frac{a}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{b}{\frac{2}{\sqrt{5}}} = \frac{c}{\frac{3}{\sqrt{10}}}.$$

Exerciții

Demonstrați

$$\left(\frac{125}{64}\right)^{10} < 1000$$

EXERCIȚII ȘI PROBLEME PROPUSE

Probleme

A, B = puncte fixe;
Locul geometric M?

$$\frac{1}{AM} - \frac{1}{BM} = \text{const.}$$

565. Pe laturile AB, BC, CD, DA ale paralelogramului ABCD se iau respectiv punctele D_1, A_1, B_1, C_1, astfel ca:

$$\frac{AD_1}{D_1B} = \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{CB_1}{B_1D} = \frac{DC_1}{C_1A} = \frac{m}{n}$$

Segmentele AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 intersectându-se formează patrulaterul MNEF. Știind că S este aria paralelogramului ABCD, să se afle aria patrulaterului MNEF.

P. Erdniev (Regiunea Altai)

566. Să se arate să

$$100\,! > 11^{70}\,(11\,!)^{11}$$

H. Hamzin (Sterlitamac)

567. Să se rezolve ecuația

$$\frac{x^2+1}{x^2+11} = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{11x-6}{6-x}}$$

G. Kapâlov

568. Pentru a transmite apa din Don în partea cea mai superioară a canalului Volga-Don, cu dife-

rența de nivel de 44 m se vor folosi pompe cu o capacitate de 45 m^3/s apă. Ce forță trebue să aibă mașinile electrice ale acestor pompe dacă admitem randamentul de 90%.

C. d. P.

569. Tractorul electric, sovietic, V.I.M.E. 4—1000 cu o putere de 39 kW, ară cu viteza de 5,4 km/oră. Să se afle forța de tracțiune a tractorului și timpul necesar pentru a ara 1 Ha, dacă se cheltuiește 45 kW—ore la hectar.

C. d. P.

570. Să se construiască un triunghiu ABC, cunoscând mijlocul A′ al laturii BC, precum și mijloacele distanțelor unui punct M din planul triunghiului la vârfurile B și C. Discuție.

M. Ghermănescu

571. Fie M și N două puncte mobile, simetrice față de mijlocul laturii BC a triunghiului ABC. Să se arate că

$$\overline{AM}^2 + \overline{AN}^2 + 2\,\overline{BM}\cdot\overline{MC} = \text{constant}$$

$$\frac{\overline{AM}^2 - \overline{AN}^2}{\overline{MN}} = \text{constant}$$

Cazuri particulare.

N. N. Mihăileanu

572. Să se găsească toate numerele întregi N în baza 10, știind că N^{14} are 34 cifre.

Gh. D. Simionescu

573. Intr'un triunghi oarecare ABC se dă BC=6 m, AC = 10 m și R = 5,5 m. Să se calculeze mărimea laturii AB fără a se întrebuința tabele trigonometrice.

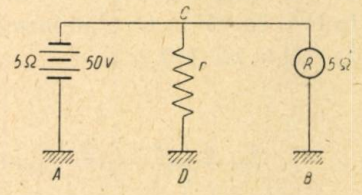
Vârful A are 2 poziții A_1 și A_2. Să se arate că raportul ariilor triunghiurilor A_1BC și A_2BC este același cu al laturilor A_1B și A_2B. Să se calculeze raza cercului înscris, în cele două cazuri.

C. Ionescu-Țiu

574. Stațiunea hidroelectrică dela Kahovka va avea o putere medie de 250.000 kW. Ce cantitate de cărbuni ar fi necesară în 24 ore pentru turbinele cu aburi care produc forța necesară, cunoscând că 1 kg cărbune desvoltă 7000 calorii mari iar randamentul turbinelor este 25%.

C. d. P.

575. Firul unei linii telegrafice are 80 ohmi, bateria are 50 volți și rezistența interioară 5 ohmi; iar receptorul are tot 5 ohmi. Inchiderea circuitului se face prin pământ (rezistență neglijabilă). In urma unui scurt circuit între fir și pământ intensitatea curentului la transmițător este de 0,758 amperi iar la receptor de 0,028 amperi.



Să se afle valoarea rezistenței de scurtcircuitare și locul unde s'a produs scurtcircuitarea, firul fiind de cupru cu secțiunea de 0.1 mm^2.

Mihai Stănescu
elev, București

576. Fie polinomul $x^{n+1} - (p+1)\,x^n + p$. Să se arate că acest polinom este divizibil prin $x - 1$ și să se afle câtul $f(x)$. Dacă $p > 0$, ecuația $f(x)=0$ are cel puțin o rădăcină reală.

N. Gaiu

577. Să se afle timpul de golire al unui rezervor cilindric printr'un orificiu cilindric de fund. Secțiunea orizontală a rezervorului este un cerc cu diametrul de 5 metri, iar înălțimea lichidului de 4 metri. Diametrul orificiului este 2 dm, coeficientul de corecție al debitului de lichid ce se scurge este $\mu = 0{,}62$, rezervorul fiind deschis la partea superioară.

Muedin M. Sureia
elev, Constanța

578. Să se arate că expresiile:

$$A = \frac{1-\sin x}{1-\operatorname{tg} x} + \frac{1-\cos x}{1-\operatorname{cotg} x}$$

$$B = \frac{\sin x}{1+\cos x} + \frac{\cos x}{1+\sin x} + \frac{(1-\sin x)\,(1-\cos x)}{\sin x\,\cos x}$$

sunt independente de x.

Cezar Coșniță

579. Să se calculeze limita expresiei

$$\frac{(\sqrt{\cos x}-1)\,(\sqrt[3]{\cos x}-1)\ldots(\sqrt[n]{\cos x}-1)}{x^{2n-2}}$$

când x tinde către zero.

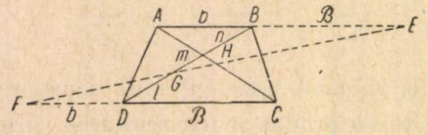
Gh. Dumitrescu

580. Să se rezolve ecuația

$$(1-a^2)(1+a^2)\,x^4 - 2a\,(1+a)\,[2+a\,(1-a)]\,x^3 + 6a^2\,(1+a)\,x^2 - 2a^3\,(2+a)\,x + a^4 = 0$$

Matei I. Nazarie
elev, București

581. Fie ABCD trapezul din figură, de baze B, b. Prelungim baza $\overline{AB} = b$, cu $\overline{BE} = B$ și baza $\overline{DC} = B$, cu $\overline{DF} = b$. Diagonala BD este tăiată de diagonala AC în H și de EF în G. S'au format segmentele $DG = l$, $GH = m$, $HB = n$.



Din triunghiurile asemenea ABH, DCH putem scrie

$$\frac{b}{B} = \frac{n}{m+l}$$

iar din triunghiurile asemenea FDG, BEG avem

$$\frac{b}{B} = \frac{l}{m+n}$$

aplicând și o proprietate a proporțiilor:

$$\frac{b}{B} = \frac{n}{m+l} = \frac{l}{m+n} = \frac{n-l}{m+l-(m+n)} = \frac{n-l}{l-n} = -1$$

deci $b + B = 0$. Suma bazelor unui trapez este nulă!

Unde este eroarea?

C. d. P.

582. Se dă un cerc de diametru AB și coardele egale AC și CD, punctele C și D fiind de o parte și de alta a diametrului AB, iar E fiind intersecția dreptelor AB și CD. Să se arate că

$$\overline{AE} \cdot \overline{DE} \cdot \overline{AB}^2 = 4\,\overline{CE} \cdot \overline{BE} \cdot \overline{CD}^2$$

Păun D. Nicolae
student, București

583. Fie A_1 B_1 C_1 picioarele înălțimilor unui triunghi oarecare ABC. Paralela din A_1 la AB taie latura AC în B_2, paralela din B_1 la BC taie latura AB în C_2, și paralela din C_1 la AC taie latura CB în A_2. Să se stabilească relația

$$\overline{AC_1} \cdot \overline{BA_1}\,\overline{CB_1} = \overline{AC_2} \cdot \overline{BA_2}\,\overline{CB_2}.$$

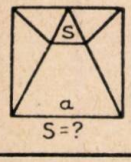
N. Gheorghiu student, Iași

584. Intr'un triunghiu oarecare ABC, se duce diametrul AD al cercului circumscris care taie latura BC în punctul E.

Să se arate că

$$\overline{AB}^2 \cdot \overline{EC}^2 (\overline{EB}^2 - \overline{ED}^2) = \overline{AC}^2 \cdot \overline{EB}^2 (\overline{EC}^2 - \overline{AC}^2)$$

Florea C. Constantin
elev, Câmpina



EXERCIȚII PROPUSE PENTRU INVĂȚĂMÂNTUL ELEMENTAR

E. 165. Pentru construirea turbinelor hidraulice, generatoarelor, porților dela stăvilare, ecluze și alte instalații ale stațiunii hidrotehnice dela Kuibâșev și Stalingrad, este nevoie de 140.000 tone oțel. Să se calculeze volumul metalului și numărul de vagoane necesare pentru transport, dacă într'un vagon se poate transporta 20 tone, densitatea oțelului fiind de 7,8.

F. v. Șc.

E. 166. Pentru construirea canalului principal Turcmen se vor scoate la fiecare metru liniar câte 400 m³ de teren.

Să se determine viteza de scurgere a apei în canal dacă capacitatea sa de scurgere va fi de 600 m³ pe secundă.

F. v. Șc.

E. 167. Să se verifice identitatea

$$\frac{a^5}{(a-b)(a-c)} + \frac{c^5}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^5}{(c-a)(c-b)} =$$

$$= (a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c) + abc.$$

Simon Șt. Petre

E. 168. Două lichide având greutățile specifice d_1 și d_2 se amestecă între ele, obținând un amestec de greutate specifică d.

Să se determine raportul greutăților lichidelor amestecate.

S. Fissgus
student, Petroșani

E. 169. Se dă un cerc cu centrul în O, de rază r și două drepte paralele cu distanța d între ele. Să se construiască tangentele la cerc ce determină între cele două paralele un segment de lungime l.

Câte soluții are problema?

Să se facă desenul în cazul:

$$r = 3 \text{ cm}; \; d = 4 \text{ cm}; \; l = 5 \text{ cm}.$$

Gh. D. S.

E. 170. Un submarin are un volum de aproximativ 55 m³ și o greutate totală de 25.000 kg.

1°. Să se arate ce cantitate de apă trebue să se tragă în rezervele sale pentru ca submarinul să meargă pe la fund și apoi jumătate scos din apă.

Densitatea apei de mare se va considera de 1,13 iar greutatea jumătății de sus a submarinului egală cu 5.000 kg.

Valentin N. Dihoru
elev, Buzău

E. 171. Un ceasornic arată ora 7 și 25 minute. Să se calculeze unghiul format de orar și minutar în grade minute și secunde sexagesimale.

C. I. Ț.

E. 172. Ce cantități de apă rece la temperatura de 4° și apă fierbinte cu temperatura de 70° trebuesc pentru a obține 250 kg apă cu temperatura 38°.

C. I. Ț.

E. 173. Un bec electric de 100 watti, pentru 120 volți, are o durată de 1250 ore și costă 9,20 lei. Se cere:

— Ce energie consumă becul pe tot timpul duratei lui, cât costă această energie dacă un kilowattoră costă 0,80 lei și de câte ori și-a acoperit prețul său?

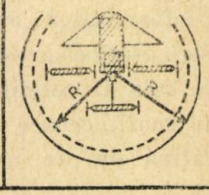
— Care este intensitatea curentului electric ce trece prin filamentul său?

— Care este rezistența electrică a filamentului?

— Ce cantitate de căldură a degajat becul pe tot timpul duratei lui de funcționare?

Dinu I. Schileru
elev, București

NOUTĂȚI DIN ȘTIINȚA ȘI TEHNICA SOVIETICĂ



Academicianul V. G. Fesencov despre meteoritul din Sihote-Alinsc

In anul 1947 a fost întreprinsă de către Academia de Științe a Uniunii Sovietice, o expediție specială pentru a cerceta amănunțit căderea imenselor mase de fier din regiunea lanțului de munți Sihote-Alinsc la distanța de 150 km de stația Iman, între Havarosc și Vladivostoc. Căderea meteoriților și unei adevărate ploi de mici schije, s'a petrecut la 12 Februarie 1947, sub ochii numeroșilor observatori și a lăsat multe urme sub forma de cratere ce au făcut ravagii în taigă stricăciuni de copaci, în urma cărora s'a reușit a se stabili multe amănunte importante ale acestui fenomen rar al naturii.

Este destul de greu dela aprecia în prezent masa întreagă de corpuri căzute pe pământ, deoarece meteoriții mari atingând pământul, s'au fărămițat în numeroase bucăți, lovindu-se de sol dintre care multe s'au oxidat și au dispărut. Meteoriții mai mici, reținuți de aer, au căzut pe suprafețe de câțiva km². Până la sfârșitul anului 1950 s'au adunat 37 de tone de substanță meteorică. In cratere și deschizături au fost găsiți bulgări mari de meteoriți, iar cel mai mare dintre aceștia, în greutate de 2 tone, a căzut pe un teren moale și s'a oprit la o adâncime de 4 m. Cel mai mare crater, din care au fost aruncate aproximativ 5000 tone de argilă și de rocă, s'a format probabil ca rezultat al căderii în acel loc al meteoritului, cu o masă în greutate de 2—3 tone. Cercetarea

tuturor craterelor, gropilor, numărarea masei de meteoriți găsiți, dau posibilitatea de a se trage concluzia că pe pământ au căzut aproximativ 100 — 150 de tone de substanță meteorică.

Această masă constitue totuși doar o mică parte (dela 5 până la 20%) din corpul meteoric primar care s'a întâlnit cu Pământul la 12 Februarie 1947. O mare cantitate de substanțe n'a ajuns până la suprafața Pământului; transformându-se în gaze sau sfărâmându-se în particule infime de fum, au lăsat o dâră enormă în atmosferă.

Studiind diferitele date care caracterizează căderea meteoritului din Sihote-Alinsc, academicianul V. G. Fesencov trage concluzia că acest meteorit, ieșind din centura asteroizilor, care se învârtesc între orbitele lui Marte și Jupiter, reprezintă un mic asteroid, tipic care putea fi observat prin telescop, atunci când s'a apropiat de pământ, aproximativ la distanța lunii. Orbita acestui asteroid reprezenta o elipsă, care intersecta orbita pământului. La 12 Februarie 1947, aceste două planete au fost prea aproape una de alta și atracția pământului a silit asteroidul să cadă pe el.

Astfel, meteoritul din Sihote-Alinsc este primul asteroid pe care savanții sovietici îl pot cerceta în laboratoarele lor.

S'a văzut că structura fizică și compoziția chimică a tuturor părților meteoritului din Sihote-Alinsc sunt absolut identice. Toate bucățile lui sunt compuse din 94% fier, 5,4% nichel, 0,16% cobalt cu o mică parte de amestec de alte elemente. Uniformitatea compoziției și identitatea structurii arată că acest meteorit trebue să fi fost format pe cale de solidificare a unei mase topite, destul de mari, ceeace confirmă părerea exprimată cu câțiva ani în urmă de academicianul sovietic Zavarițchi, că meteoriții puteau să se formeze în interiorul unui corp destul de mare, chiar de mărimea planetelor și la o temperatură ridicată.

Inregistrând o mare asemănare chimică și fizică a schijelor meteoritului din Sihote-Alinsc cu alți meteoriți, precum și forma lor specifică de schije neregulate, proprie deasemenea unui mare număr de asteroizi, academicianul Fesencov a emis ipoteza că după cum asteroizii, tot astfel și meteoriții s'au format ca rezultat al exploziei unei planete care se afla odată în sistemul solar între Marte și Jupiter, adică acolo unde astăzi se găsește o centură lată de planete mici. Cauza exploziei, după părerea acad. Fesencov putea fi apropierea acestei planete de Jupiter, care are o masă foarte mare. De altfel după noua teorie a lui Ramsay, planetele având o oarecare dimensiune critică, se pot afla în poziție nestabilă și exploada chiar fără nici o influență asupra lor a vreunui corp străin.

Schijele planetei care a exploadat, continuă să se învârtească în jurul Soarelui sub forma de asteroizi, iar o parte din aceștia au fost captate de planete mari și au devenit sateliții lor. Această ipoteză explică în parte prezența la câteva planete a așa zișilor sateliți neregulați, deasemenea și a cometelor. Acestea din urmă, după ipoteza acad. Fesencov s'au format din schijele planetei care a exploadat și care dela început s'au îndepărtat înspre Soare, însă n'au căzut pe el, din cauza acțiunii asupra lor a forței de atracție a stelelor. Studiul ulterior al meteoriților din Sihote-Alinsc și a altora, în lumina ipotezei academicianului Fesencov, fără îndoială are o foarte mare importanță pentru deslegarea problemei în ceeace privește origina și evoluția sistemului solar.

POȘTA REDACȚIEI

Bundaru Ion, elev (Tr.-Severin). Oricine poate trimite articole pentru a fi puublicate în R.M.F. Pe d-ta te sfătuim să-ți însușești bine cunoștințele din liceu, să citești articolele apărute în R.M.F. și alte reviste, să rezolvi din problemele propuse și vei putea deveni astfel un autor ale cărui articole și probleme propuse vor putea fi publicate. Problemele propuse de d-ta trebuiau însoțite de soluții.

Weiss Marian, elev (Gherla Reg. Cluj). Puteți trimite recenzii asupra unor cărți Gazetei Matematice și Fizice. Anunțarea soluțiilor în pagina rezolvitorilor se face în decurs de două luni dela primirea lor. Se pot adresa întrebări redacției; răspunsurile se dau, fie personal, fie la «Poșta Redacției».

Voiculescu Paul. Puteți trimite soluții la orice probleme încă nesoluționate în paginile revistei, potrivit instrucțiunilor de redactare a soluțiilor.

Stoicoiu Emil, elev (Tg.-Jiu). Deși v'ați luat angajamentul de a fi un colaborator al R.M.F., totuși nu ați mai lucrat în ultimul timp.

Gruia St. Lucian, elev (Turnu-Măgurele). Datele pe care le ceri, le găsești în manualul de Astronomie pentru clasa XI-a.

Popescu Nicolae, student (Galați). Am primit articolul «Ce spun astronomii sovietici despre Galatica».

Guja Nicolae, elev (Alexandria). Continuați să trimeteți probleme rezolvate; ținem seama de cererea d-tale.

Au apărut cursuri sovietice de fizică la « Editura Tehnică », ele vă pot fi de mare folos.

Victor Popescu, elev (București). Chestiuni de examen, propuse la admiterea în Institute Tehnice, s'au publicat în diferite numere ale R.M.F. Pentru cele nepublicate vă puteți adresa Institutului respectiv.

Ghinescu Nicolae, elev (Giurgiu). Câteva indicații despre « Sisteme de numerație » găsiți în primele pagini ale manualului de aritmetică pentru clasa V-a.

Mirea Nicolae, elev (Alexandria). Ai trimis multe soluții bune la problemele propuse în R.M.F. Continuă cu perseverență și-ți vei însuși temeinic cunoștințele de matematică și fizică.

Iosif Stein, profesor (Dorohoi); *I. Munteanu*, profesor Zăpodeni (Raionul Vaslui); *Constantin Petricu*, elev (Botoșani); *Mircea Șăbău*, elev (Turda); *Diaconescu N. Ion*, cl. X-a Pitești. Pentru abonament la R.M.F. sau pentru obținerea unor numere și pentru reclamații, vă puteți adresa « Centrului de Difuzare a Presei » din str. Constantin Mille 14, București.

Săcuiu Ion (Reg. Buzău); *Stoleru Marcel*, elev (Dorohoi); *Chimbău Mihalache*, elev (Bacău); *Moldovan Nicolae*, elev (Dej); *Tănăsescu D. Gheorghe*, cl. 8-a (Tg.-Ocna); *Ionașcu Gheorghe*, Școala medie tehnică, (Periș) (Reg. București).

Exercițiile și problemele propuse trebuiesc însoțite de soluții.

Inainte însă de a propune probleme, vă sfătuim să rezolvați cât mai multe din cele propuse și să urmăriți soluțiile problemelor ce se rezolvă în R.M.F.

$x = 1 + \frac{1}{x}$

PAGINA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

S'au evidențiat prin rezolvări de probleme din Revista Matematică și Fizică:

Mihalcea S. Ștefan (Ploești), Udrescu Valerian (Pitești), Dobre Gh. Dan (Buzău), Lazăr Al. Ioiam (Roman), Pantea Alexandru (Oradea), Bonciu S. Ioan (Orașul Stalin), Iosifescu V. Marius (Pitești), Miclăuș Vasile (Roșiori de Vede), Dogaru T. Mihai (Ploești), Prunache Gh. Gheorghe (Curtea de Argeș), Cristescu M. Dorin (Brăila), Raicu M. Alexandru (Turnu Măgurele), Bordeanu Stelian (Ploești), Mihăilescu Alexandru (Turnu Măgurele), Gora Dorin (Slatina), Stegăroiu I. Grigore (Tg. Jiu) Nahaiciuc T. Mihai (Lugoj), Goia Ion (Orașul Stalin), Matei M. Gheorghe (Curtea de Argeș), Rădulescu Marian (Turda) Nicolau Corina (Brăila), Culiță T. Cezar (Focșani), Buga I. Ion (Roman și Codreanu Irinel (Buzău).

* * *

In cursul lunii Martie 1952 am primit soluții bune la cel puțin cinci probleme dela următorii rezolvitori:

ALEXANDRIA. Clasa XI B. Guja Nicolae (294, 332, 335, 348, 363, 375, 379, 390, 445, 505, 506, 508, 517, 518, 523, P) Mirea Nicolae (298, 328, 341, 348, 350, 352, 368, 372, 377, 390, 392, 396 433, 443, 499 503, 505 506, 508, 510, P).

BACĂU. Calman Leon (514, 517, 518, 520, 522). Căpitanu Florin (459, 505, E: 67, 109, 113), Leibovici Emil (242, 336, 438, 468, 504, 508), Saveluc Virgil (292, 517, 518, E: 67, 109).

BÂRLAD. Clasa X B. Măceanca Constanța (306, 351, 352, 354, 368, 369, 374, 388, 389, 448, 466).

BISTRIȚA (Rodna). Purec Gheorghe (426, 427, 493, 496, 497 P).

BOTOȘANI. Clasa X-a Vizimberg I. Ioan (501, 506, 515, 517), Steinberg Baruch Chaim (501, 507, 505, 506, 515, 517, 518).

BRĂILA. Nicolau Corina (448, 455, 456, 457, 458, 463, 465, 466, 468, 469, 479, 480, 481, 485, 488, 491, 495, 497, 499, 502, 503, 505, 506, 508), Cristescu M. Dorin (241, 265, 271, 327, 341,342, 343, 360, 393, 432 439, 440, 445, 461, 474, 475, 480, 481, 482, 483, 484, 485, 488, 492, 496, 499, 501, 503, 505, 508, 512, 513, 514, 517, 518, 525, P)

BUCUREȘTI. Liceul 1 fete. Clsa VIII-a Filimon Rodica (290, 307, 367, 429, 517, E: 142, 144 146, 147, 148, 149), Clasa XI-a. Buzenchi Josette (483, 484, 485 502, 505, 508). Liceul 2 băieți. Clasa VII-a: Bonoiu Vasile (E: 51, 91, 105, 114. 132, 137, 147), Clasa XI-a: Romanescu Dan (379, 386, 506, 514, 517, 518, 522). Centrul școlar 2, 10, 13 fete. Clasa VIII-a D. Petrică I Zamfira (502, 505, E: 83, 91, 105). Liceul 5 băieți. Clasa XI-a Matei Gheorghe (276, 314, 322 340, 341, 342, 349, 392, 416, 432, 456, 499). Liceul 6 băieți. Clasa X-a Oprea Constantin (466, 512, 514, 517, 525, P). Școala Elementară 4 Băieți. Clasa VI-a Schileru I. Dinu (468, E: 135, 143, 150, 151, 152, 153). Liceul 10 băieți. Clasa X C. Șincan Corneliu (393, 422, 480, 497, 514, 517, 520, 523).

BUZĂU. Clasa VIII-a Cucu P. Dan (444, 484, 517, 518, 520, E: 131, 142). Clasa IX-a. Coman Ovidiu (307, 322, 427, 497, 518, 520, E: 149). Negulescu Paul (377, 427, 441, 444, 468, 507, 517, 518, 520, P), Pavel Constatin (427, 439, 443, 468, 501, 518, 525), Clasa X-a. Codreanu Irinel (243, 303, 307, 339, 340, 383, 407, 427, 440, 463, 480, 481, 482, 485, 490, 509, 512, 514, 518, 520), Dihoru N. Valentin (236, 276, 303, 306, 333, 350, 371, 413, 458, 482, 484, 505, 506, 507, 508. P) Clasa XI-a Dobre Gh. Dan (348, 349, 350, 351, 352, 353, 354, 358, 363, 367, 369, 371, 375, 377, 383, 386, 389, 390, 392, 403, 404, 426, 427, 432, 437, 439, 440, 441, 443, 444, 454, 455,458, 466, 468, 474, 484, 493, 514, 516, 517, 518, 520, 521, 525).

CĂLĂRAȘI. Clasa XI-a Marinache Gheorghe (412, 423, 493, 503, 505, 507).

CÂMPINA (Prahova). Școala medie tehnică de Utilaj Petrolifer. Florea C. Constantin (245, 276, 363, 367, 377, 386, 436, 488, 499, 503), Clasa XI-a: Babskov Alexandru (358, 369, 514, 518, 521), Jantea N. Gheorghe (353, 369, 488, 514, 518), Măinescu Nicolae (512, 513, 514, 515, 518, 525), Motoroiu I. Valeriu (307, 353, 468, 491, 520, 521, 530),

Scarlat C. Gheorghe (246, 290, 307, 317, 488, 499, 514, 520).

CARACAL. Clasa XI-a Olteanu I. Mihai (407, 452, 459, 471, 480, 491, 495, 499, 505, 507, P).

CARANSEBEŞ. Clasa XI-a Mursa Octavian (426, 443, 459, 480, 481, 485, 484, 490, 491).

CAREI. Clasa XI-a Ciura Romeo (473, 474, 493, 501, 503, 504 505, 606, 510).

CÂMPULUNG (Muscel). Clasa XI-a Olaru Elena (290, 307, 365, 374, 375, 410, 484, 489), Nichifor Gheorghe (449, (449, 456, 457, 458, 459, 463, 464, 466).

CLUJ. Clasa IX-a Bunea Constantin (439, 506, 516, 517, 522). Clasa XI-a Popiţian Mircea (375, 376, 377, 379, 389, 499).

CONSTANŢA. Şcoala hidrotehnică Anul I. Ionescu Ion (278, 325, 351, 386, 501, 507, 509, E: 76, 109), Anul III. Buzeţelu Constantin (501, 503, 506, 508, 512, 514, 517, 522, 525), Muedin M. Sureia (497, 499, 501, 502, 503, 504, 505, 506, 507, 508, 509, 510), Şcoala 13 elementară. Bistriceanu Ion (E: 14, 22, 24, 25, 76, 93, 138, 142m 148, 149, 150), Nedelcu Nicolae (E: 92, 114, 115, 138, 142), Gârbăcea Marcel (E: 126, 147, 148, 149, 150, 191), Osman Saim (E: 91, 92, 126, 124, 125), Spânu Constantin (E: 91, 109, 131, 138, 142, 148, 149, 150), Zăman I. Marian (E: 126, 132, 138, 142, 147, 148). Liceul de băieţi Clasa IX-a Abduraim Suleiman (505, 509, 517, 518, 522, 523), Mitescu D. Constantin (314, 392, 403, 439, 448, 468, 484, E: 130, 132, 138), Clasa XI-a Călinescu Paul 227, 235, 292, 317, 416).

CRAIOVA. Clasa IX-a Cazanacli Nicolae (422, 441, 448, 469, 475, 481, 484, 485, 502, 506, 514, 518). Clasa XI-a: Tutunaru Gh. Gheorghe (307, 323, 389, 432, 472, 518), Vasiescu Tamara (303, 335, 379, 383, E: 76, 79, 114).

CURTEA DE ARGEŞ. Clasa X-a Matei Gh. Gheorghe (317, 324, 325, 375, 379, 386, 398, 401, 416, 420, 429, 432, 437, 445, 449, 459, 643, 466, 481, 505, 508, 514, 518, 520, 525), Marinescu P. Constantin (351, 369, 437, 443, 445, 448, 463, 466, 459 518). Trofim V. Valeriu (263, 269, 351, 369, 379, 441, 443). Clasa XI-a: Boncea Vasile (317, 369, 388, 390, 445, 446), Pruncahe Gh. Gheorghe (263, 264, 269, 270, 276, 278, 316, 317, 323, 325, 340, 349, 351, 354, 369, 371, 379, 404, 416, 422, 432, 439, 441, 443, 448, 456, 466, 468, 472, 474, 481, 488), Puiu N. Florea (340, 351, 369, 404, 501, P).

FĂGĂRAŞ. Clasa X-a Trifu Romulus (404, 426, 456, 466, 488, 499).

FOCŞANI. Clasa X-a Culiţă T. Cezar (286, 297, 2 99 301, 303, 306, 311, 312, 317, 331, 348, 371, 374, 413, 422 432, 439, 443, 455, 466, 480, 482, 488).

GIURGIU. Şcoala Tehnică de Mecanică Agricolă, anul II. Bigan V. Stan (325, E: 48, 50, 51, 70, 79, 87, 109, 149). Clasa IX-a: Fota M. Stan (290, 307, 324, 346, 422, 505, 506, 517, 518, 525, E: 47, 48, 51, 55, 69, 70, 72, 79, 92, 93, 99, 109, 148). Clasa XI-a Daia Silviu (263, 264, 313, 321, 370, 387, 410, 416, 520).

IAŞI. Şcoala medie de textile. Anul II. Turcuman Maria (502 514, 516, 517, 520, 521, P). Clasa X-a liceu. Gafiţeanu Mihai (269, 270, 333, 335, 346, 347, 371, 372, 404, 454, 455, 459, 460, 461, 466, 468, 474, 475, 476, 484, 485, 486), Rotaru Emil (271, 278, 298, 317, 364, 369), Ursache Eugen (301, 322, 375, 386, 457, 458, 480, 505).

LUGOJ. Clasa V-a Lăpugeanu Petrică (E: 62, 63, 66, 67, 91, 105, 136), Clasa XI. Nahaiciuc T. Mihai (264, 268, 292, 294, 309, 310, 313, 321, 322, 329, 335, 339, 340, 345, 375, 379, 381, 408, 453, 481, 487, 493, 496, 503, 505, 510, 517).

MEDIAŞ. Clasa XI-a. Osvald Gemot (263, 264, 285, 290, 295, 311, 333, 336. 347, 446, 454, 468. 484, 501, 503, 505, P).

ORADEA. Pantea Alexandru (muncitor) 264, 269, 270, 271, 272, 278, 290, 292, 295, 297, 299, 303, 305, 306, 307, 310, 313, 316, 317, 323, 325, 328, 351, 352, 386, 387, 389, 393, 404, 406, 432, 436, 440, 444, 484, 485, 499, P). Clasa X-a Cruceru Laurenţiu (289, 290, 291, 292, 295, 297, 298, 299, 306, 307)

ORAŞUL STALIN. Clasa IX-a Bonciu S. Ioan (281, 286, 292, 308, 323, 324, 333, 335, 346, 351, 354, 367, 368, 369, 374, 375, 377, 389, 401, 403, 407, 420, 439, 443, 448, 455, 459, 468, 481, 482, 484, 501, 508). Purecel Remus (386, 403, 439, 501, E: 109) Clasa X-a Namolovan Virgil (269, 290, 347, 353, 354, 367, 369, 371, 404, 480, 505, 514, 518, 520). Clasa XI-a: Doca Ion (259, 336, 369, 375, 386, 388, 389, 395, 501, 504), Goia Ion (251, 264, 292, 311, 314, 323, 329, 335, 343, 367, 369, 375, 383, 386, 388, 410, 440, 444, 472, 484, 488, 499, 506, 508), Trâistaru S. Petra (263, 265, 305, 356, 359, 363, 372, 505). Zorilă) Ion (245, 257, 264, 269, 290, 297, 317, 333, 369, 374, 387, 392, 432).

PIATRA NEAMŢ. Clasa XI-a. Amihăesi Ion (388, 404, 406, 426, 432, 450, 454, 466, 474, 484, 490).

PITEŞTI. Clasa VIII-a Mihalcea Al. Colnel (320, 325, 509, 517, 520, 522). Clasa IX-a: Dragomir Stan (Bradu de sus) (290, 292, 307, 308, 317, 335, 346, 367, 386, 404, 416, 432, 466). Iosifescu V. Marius (251, 265, 309, 311, 314, 315, 328, 339, 340, 344, 345, 348, 391, 394, 501, 502, 503, 505, 506, 507, 508, 509, 510, P). Clasa X-a: Udrescu Valerian (245, 257, 259, 264, 268, 269, 270, 271, 274, 276, 278, 238. 286, 290, 292, 296, 297, 298, 299, 303, 305, 306, 307, 312, 313, 321, 323, 324, 325, 328, 329, 334, 335, 336, 343, 347, 348, 353, 358, 363, 364, 367, 368, 369, 371, 372, 401, 404, 407, 410, 413, 422, 432, 437, 464, 466, 480, 488).

PLOEŞTI. Clasa VII-a Stroe Radu (E: 109, 119, 124, 137, 142, 147, 149), Clasa IX-a. Dogaru T. Mihai (282, 285, 312, 313, 314, 326, 238, 332, 353, 340, 341, 342, 346, 355, 359, 362, 365, 370, 379, 383, 385, 387, 388, 392, 433, 448, 466, 480, 482), Drosu Mihail (501, 502, 503, 504, 505, 506, 507, 508, 509), Făgăraş Constantin (306, 322, 348, 349, 358, 371, 372, 407, 416, 437, 505), Piţă I. Constantin (285, 312, 358, 375, 348, 351, 358, 364, 365 371, 372, 374, 398, 466, 479, P), Popescu M. D. (278, 349, 372, 443, 501, 505, 514, 517, 518, 522, 525), Puşcaşu A. Alexandru (263, 308, 346, 348, 367, 455, 458, 459, 463, 466), Clasa XI-a Bordeanu Stelian (316, 321, 333, 340, 341, 342, 346, 350, 379, 382, 385, 398, 407, 432, 433, 435, 440, 441, 443, 446, 457, 458, 461, 466, 474, 480, 481, 482, 488, 499, 501, 503, 505, 506. Mihalcea S. Ştefan (246, 257, 25 , 263, 264, 270, 272, 276, 278, 279, 283, 285, 292, 294, 298, 299, 300, 303, 308, 310, 313, 316, 320, 322, 323, 324, 326, 328, 329, 333, 340, 341, 343, 345, 436, 348, 349, 350, 353, 354, 358, 359, 363, 365, 368, 372, 374, 387, 389, 401, 403, 406, 407, 410, 415, 427, 429, 433, 437, 439, 440, 441, 445, 448, 454, 456, 459, 461, 463, 473, 474, 475, 476, 480, 482, 484, 486, 496, 499, 501, 503, 505, 506, P).

(va urma)

C. 438. — CENTRUL POLIGRAFIC Nr. 2. FILIALA 3.

Taxa poştală plătită în numerar conform aprobării Nr. 168.026 946

Lei 1.—

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE ȘI FIZICE DIN R.P.R.

7995
E 1h 26
KAT
BIBLIOTECA I. D. T.
ELENORIZVE 1953

REVISTA MATEMATICĂ și FIZICĂ

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR

★ ★ ★

„Elevii pe care-i creșteți astăzi în școală vor fi mâine stahanoviști, tehnicieni, pedagogi, savanți. Școala este izvorul principal de cadre pentru construirea socialismului. De aceea, este necesar ca școala noastră să predea elevilor cunoștințe științifice în legătură indisolubilă cu practica, cu activitatea în producție".

(Din cuvântarea tovarășului Gheorghe Gheorghiu-Dej la Congresul Învățătorilor din R.P.R.)

IUNIE

1952 6

EDITURA TEHNICĂ

REVISTA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

SUMARUL:

Pag.

1. *Cuvântul tovarăşului Gheorghe Gheorghiu-Dej la alegerea sa ca Preşedinte al Consiliului de Miniştri al R.P.R.* 125
2. *Tovarăşului Gheorghe Gheorghiu-Dej, Secretar General al Partidului Muncitoresc Român, Preşedinte al Consiliului de Miniştri al R.P.R.* 126
3. *Unghiuri triedere de Conf. Univ. Gh. D. Simionescu* 127
4. *Despre problemele cosmogoniei de Călin Popovici* 136
5. *Chestiuni de examen* 141
6. *Probleme rezolvate (312, 313, 321, 323, 326, 328, 340, 343, 345, 346, 348, 353, 354, 358)* 144
7. *Exerciţii şi probleme propuse* 150
8. *Exerciţii propuse pentru învăţământul elementar* 151
9. *Noutăţi din ştiinţa şi tehnica sovietică* 152
10. *Pagina rezolvitorilor de probleme* 154

6

ANUL III IUNIE 1952

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR KA

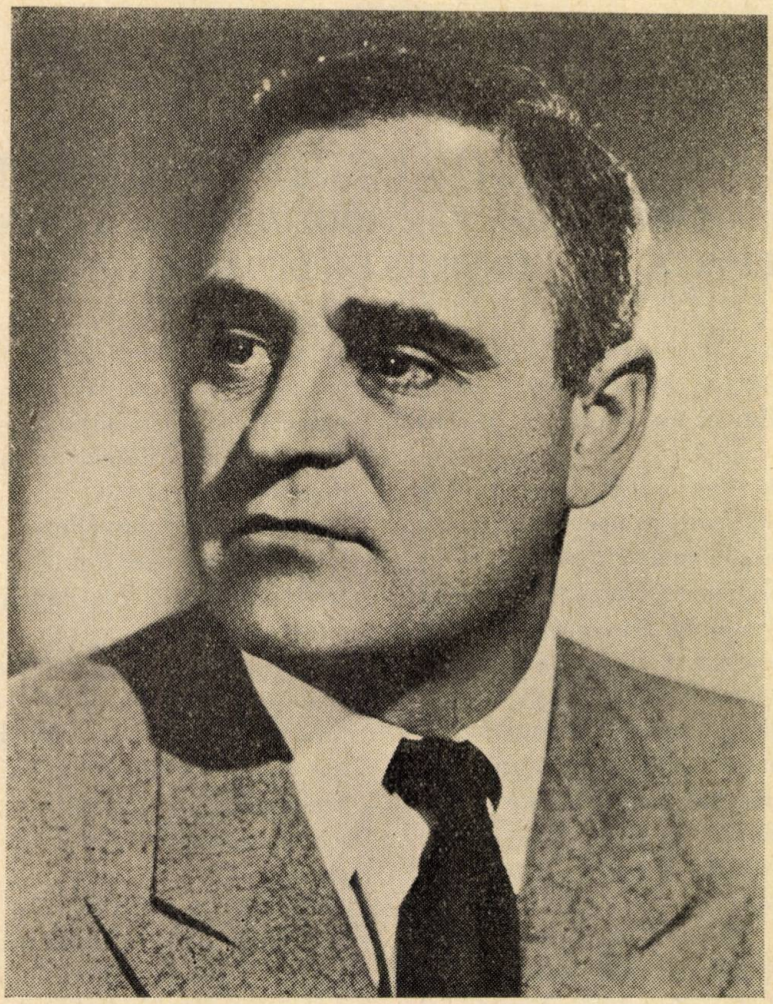
REVISTA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

PUBLICAŢIE PENTRU TINERET A SOCIETĂŢII DE MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ DIN R. P. R.

Anul III, Nr. 6 Iunie 1952

BIBLIOTECA I. D. T.

ELLENŐRIZVE 1968



Tovarăşul GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ

Preşedinte al Consiliului de Miniştri al Republicii Populare Române

CUVÂNTUL TOVARĂŞULUI GH. GHEORGHIU-DEJ LA ALEGEREA SA CA PREŞEDINTE AL CONSILIULUI DE MINIŞTRI AL R. P. R.

Vă mulţumesc pentru înalta cinste şi marea răspundere pe care mi-aţi acordat-o, numindu-mă în funcţia de Preşedinte al Consiliului de Miniştri al Republicii Populare Române.

Ţin să încredinţez clasa muncitoare, ţărănimea muncitoare, poporul, Partidul Muncitoresc Român şi Comitetul său Central, Guvernul Republicii Populare Române şi Marea Adunare Naţională, că îmi voi îndeplini în mod conştiincios îndatoririle ce decurg din funcţiunea în care am fost numit.

Voi munci cu fermitate şi cu tot elanul pentru realizarea politicii Partidului şi guvernului, de construire a socialismului, de întărire a statului democraţiei populare şi de propăşire economică şi culturală a poporului nostru, de întărire continuă a prieteniei veşnice şi colaborării frăţeşti între poporul român şi marele popor sovietic, între Republica Populară Română şi Uniunea Republicilor Sovietice Socialiste, condusă de marele învăţător al oamenilor muncii din lumea întreagă — tovarăşul Stalin! *(Aplauze furtunoase, deputaţii în picioare ovaţionează îndelung pentru Uniunea Sovietică. Timp de câteva minute deputaţii scandează numele tovarăşului Stalin).*

In această prietenie, vedem chezăşia independenţei naţionale a poporului nostru şi a suveranităţii noastre de stat.

Voi lucra cu toată fermitatea pentru realizarea politicii partidului şi guvernului, de întărire a prieteniei între Republica Populară Română şi celelalte ţări de democraţie populară, de luptă pentru apărarea păcii în cadrul marelui front al păcii, în frunte cu Uniunea Sovietică, împotriva provocatorilor de război, imperialiştii americano-englezi.

Vă asigur că îmi voi îndeplini cu fermitate îndatoririle în fruntea guvernului, pentru ridicarea la o treaptă mai înaltă a vigilenţei revoluţionare a poporului nostru şi că nu mă voi abate nici o clipă dela principiile de care este călăuzit Partidul Muncitoresc Român — forţa conducătoare în statul de democraţie populară — dela principiile marxist-leniniste. *(Aplauze puternice şi îndelung repetate).*

TOVARĂȘULUI GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ

SECRETAR GENERAL AL PARTIDULUI MUNCITORESC ROMÂN
PREȘEDINTE AL CONSILIULUI DE MINIȘTRI AL R.P.R.

Societatea de Ştiinţe Matematice şi Fizice din R.P.R. vă felicită călduros pentru alegerea Dumneavoastră ca Președinte al Consiliului de Miniștri al R.P.R.

Această alegere, expresia dragostei nețărmurite cu care vă înconjoară toți oamenii muncii din Republica Populară Română, este o nouă victorie a Partidului. Înfăptuită îndată după plenara Comitetului Central al Partidului Muncitoresc Român din 26—27 Mai, care a trasat cu hotărîre sarcina lichidării devierilor oportuniste și a împăciutorismului față de oportunism, alegerea Dumneavoastră la conducerea Guvernului R.P.R. asigură aplicarea consecventă a liniei marxist-leniniste, este o chezășie că politica Partidului va fi realizată cu fermitate, și grăbește desăvârșirea operei istorice de construire a socialismului în țara noastră.

Pentru conducerea Societății de Ştiinţe Matematice și Fizice din R.P.R. alegerea Dumneavoastră ca Președinte al Consiliului de Miniștri al Republicii Populare Române constitue un nou imbold de intensificare a muncii pentru a-și îndeplini rolul ce-i revine. De aceea vă asigurăm că:

Vom munci perseverent pentru a ne ridica nivelul ideologic și științific, pentru a putea aplica învățătura marxist-leninistă la problemele învățământului matematicii și fizicii.

Ne vom strădui să ridicăm mereu nivelul ideologic și științific al publicațiilor noastre, al conferințelor și celorlalte manifestări ale Societății noastre, asigurând ca ele să fie conduse de spiritul intransigent, combativ, al partinității bolșevice în știință.

Vom populariza realizările oamenilor de știință și pedagogilor sovietici, strălucite înfăptuiri bazate pe materialismul dialectic, singura concepție științifică despre lume. Vom combate în acelaș timp consecvent și cu intransigență influențele ideologiei burgheze decadente în predarea științelor matematice și fizice.

Vom sprijini desvoltarea luptei de opinii, prin folosirea creatoare a criticei și autocriticei, împotriva oricărei devieri, împotriva rutinei, împotriva aracceievismului.

Vom stimula munca științifică și pedagogică creatoare a matematicienilor și fizicienilor din țara noastră și vom populariza realizările celor mai de frunte dintre ei. Vom da o atenție deosebită desvoltării științifice a elementelor tinere, matematicieni proveniți din rândurile clasei muncitoare.

Ne vom îndeplini sarcina de a fi un sprijin al M.I.P. și C.I.S. în lupta pentru permanenta ridicare a nivelului științific al cadrelor didactice care predau matematica și fizica.

Luptând pentru a ne îndeplini aceste angajamente, suntem conștienti de răspunderea patriotică pe care Societatea de Ştiinţe Matematice și Fizice o are în ridicarea nivelului ideologic, științific și profesional al cadrelor didactice de specialitate, pentru a ajuta la formarea de tinere cadre temeinic pregătite, necesare construirii socialismului în Patria noastră.

Vă asigurăm, deci, iubite Tovarăşe GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ, că vom duce cu toată energia munca noastră pentru înflorirea Patriei, pentru cauza socialismului și a Păcii.

Societatea de Ştiinţe Matematice
și Fizice din R.P.R.

4819

UNGHIURI TRIEDRE

Conf. Univ. ***Gh. D. Simionescu***

In viață, se ivesc probleme de matematici a căror rezolvare este legată de cunoștințe despre unghiuri triedre. Verticalele a trei localități așezate pe globul pământesc se întâlnesc în centrul Pământului, constituind un unghi triedru. Razele care leagă ochiul unui observator, de trei stele depe bolta cerească, formează de asemenea un unghi triedru. Probleme de astronomie și de navigație pe întinsul mărilor sunt legate de rezolvarea unor chestiuni în care intervine acest fel de unghiuri. De pildă, momentul când răsare și apune Soarele într'un punct oarecare de pe glob, se determină folosind formule deduse din studiul unghiurilor triedre; de asemenea când voim să determinăm distanța dintre două localități depe glob.

In geometria de clasa X-a se definesc astfel de unghiuri; în articolul de față vom studia proprietăți și vom rezolva unele probleme practice.

1. Reamintim că două semiplane, limitate de aceeași dreaptă (D), formează un *unghiu diedru*. Cele două semiplane sunt *fețele diedrului*, iar dreapta (D) care le mărginește este *muchia diedrului*. Dacă în loc de două plane considerăm *trei plane*, ele au în general un punct comun și se tae două câte două, formând *trei muchii* ce trec prin punctul comun planelor.

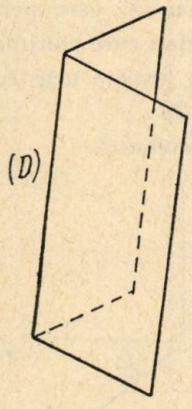


Fig. 1.

Cele trei plane închid între ele o porțiune de spațiu care este un *unghiu solid* (sau spațial) și care în cazul nostru se numește *unghiu triedru*. Dacă unghiul solid este mărginit de mai multe fețe plane ce au un punct comun, atunci se numește *unghiu poliedru*.

In cele ce urmează ne vom ocupa numai de unghiurile triedre sau, mai pe scurt, de *triedre*.

Figura 2 arată un triedru, care se notează $Oxyz$, unde O este vârful triedrului, iar Ox, Oy, Oz sunt trei *semidrepte*, ce formează muchiile triedrului.

Din cele spuse mai sus rezultă că elementele unui triedru sunt:

a) vârful (O);

b) trei muchii (Ox, Oy, Oz);

c) trei fețe (xOy, yOz, zOx) fiecare din ele fiind un *unghiu plan*;

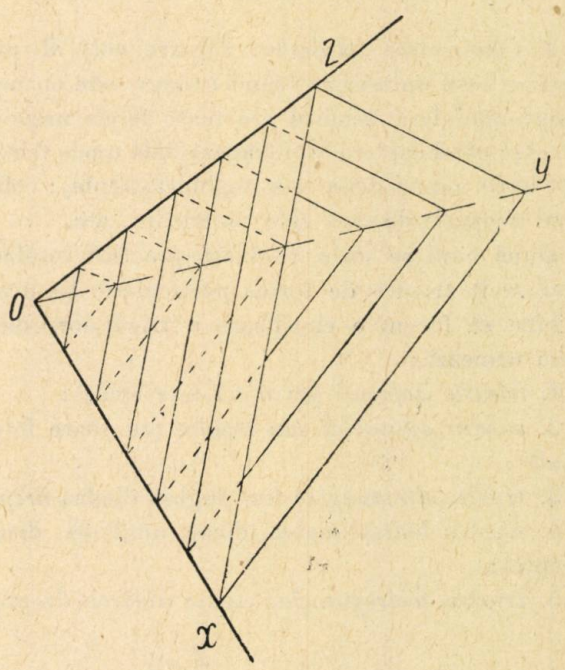


Fig. 2.

d) trei unghiuri diedre având ca muchii: Ox, Oy, Oz.

Vom nota în cele ce urmează fețele astfel

$$\sphericalangle xOy = \gamma\,;\quad \sphericalangle yOz = \alpha\,;\quad \sphericalangle zOx = \beta$$

și unghiurile diedre:

X (cu muchia Ox); Y (cu muchia Oy);

Z (cu muchia Oz)

Să observăm că dacă se dau trei plane ce au un punct comun, ele determină *opt triedre*, din care urmează să alegem pe cel care ne interesează, precizând semidreptele (muchiile) care îl determină.

In adevăr dreptele $x'x$; $y'y$ formează patru unghiuri plane; xOy; yOx'; $x'Oy'$; $y'Ox$. Fiecare din ele poate forma o față a unui triedru. Dacă luăm pe Oz ca a treia muche, putem forma *patru* triedre; dacă luăm pe Oz' ca a treia muche, putem forma încă *patru* triedre, deci în total *opt triedre*.

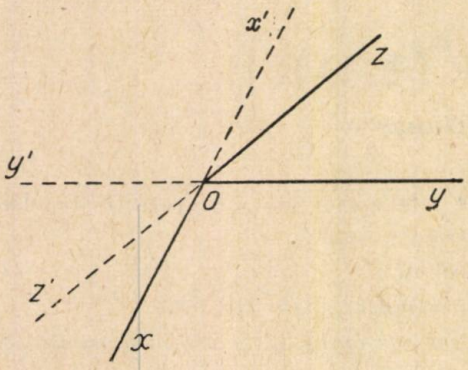


Fig. 3.

2. *Clasificarea triedrelor.* Fiecare colț al unei camere este un triedru (când camera este cu baza dreptunghiulară triedrul are toate fețele unghiuri drepte; când camera este trapezoidală unele triedre pot avea numai două fețe unghiuri drepte); colțul unui acoperiș de casă este un triedru, etc.

După cum se vede, în viața practică întâlnim mai mult triedre de formă particulară. De aceea e bine să facem o clasificare a triedrelor, după cum urmează:

1. *triedru isofacial* (cu două fețe egale);
2. *triedru echifacial sau regulat* (cu toate fețele egale);
3. triedru *dreptunghic* (un unghiu diedru *drept*);
4. triedru *bidreptunghic* (două unghiuri diedre drepte);
5. triedru *tridreptunghic* (toate diedrele drepte);

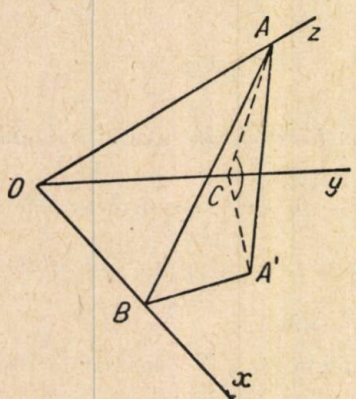


Fig. 4.

6. triedru cu un *cadrant* (dacă o față este unghiu drept poartă numele de *cadrant*);
7. triedru *oarecare* (ce nu intră în niciuna din categoriile de mai sus).

În legătură cu triedrele particulare să studiem și unele proprietăți caracteristice lor.

Teoremă. *Într'un triedru isofacial unghiurile diedre ce se opun fețelor egale, sunt egale.*

Pentru demonstrație presupunem că fețele egale sunt $\sphericalangle xOz = \sphericalangle yOz$.

Fie A un punct pe Oz și A' proecția lui pe planul xOy. Ducem $A'B \perp Ox$ și $A'C \perp Oy$. Potrivit teoremei celor trei perpendiculare putem scrie:

$$AB \perp Ox \quad ; \quad AC \perp Oy.$$

Așa dar, $\sphericalangle ABA'$ și $\sphericalangle ACA'$ sunt *unghiurile plane corespunzătoare diedrelor* X și Y. Pentru a dovedi că diedrele sunt egale, trebue să arătăm că unghiurile plane sunt egale.

Observăm că triunghiurile dreptunghice AOB și AOC sunt egale deoarece au: *ipotenuza* OA *comună și* $\sphericalangle AOB = \sphericalangle AOC$ (prin ipoteză). Deci $\overline{AB} = \overline{AC}$. De aci rezultă egalitatea triunghiurilor dreptunghice ABA' și ACA' ca având: *ipotenuzele egale* ($AB = AC$) *și cateta* AA' *comună*. Triunghiurile fiind egale, deducem că $\sphericalangle ABA' = \sphericalangle ACA'$ și deci $X = Y$.

Observare. Deoarece $A'B = A'C$ rezultă că OA' este bisectoarea unghiului xOy. Dar OA' este totodată proecția muchiei Oz. Se desprinde următoarea proprietate: *într'un triedru isofacial muchia comună celor două fețe egale se proiectează pe a treia față ca bisectoare a ei.*

Consecință. Un triedru echifacial are toate unghiurile diedre egale, căci poate fi privit în trei feluri ca isofacial.

În clasificarea făcută mai înainte nu am trecut triedrele care au două fețe *cadranți*, pentru motivul că ele sunt în același timp *bidreptunghice*. In adevăr dacă $Oz \perp Ox$ și $Oz \perp Oy$, atunci Oz este perpendiculară pe planul xOy. Orice plan care conține pe Oz este perpendicular pe xOy; printre acestea sunt xOz și yOz, deci $X = Y = 90°$.

Proprietatea reciprocă este adevărată.

Să considerăm acum un triedru bidreptunghic, fețele dreptunghiulare având muchia comună Oz. In acest caz $\sphericalangle xOy$ *măsoară chiar unghiul diedru* Z.

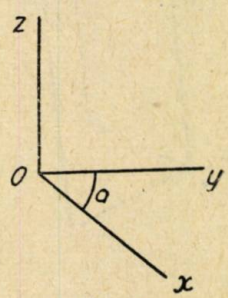


Fig. 5.

In adevăr, deoarece $Ox \perp$ $\perp Oz$ și $Oy \perp Oz$ rezultă că $\sphericalangle xOy$ este unghiul plan corespunzător diedrului Z.

Observare. După cum triedrul bidreptunghic este isofacial, triedrul tridreptunghic este *regulat* (toate fețele sunt unghiuri drepte).

3. *Orientarea unui triedru* se face în două feluri, așa cum arată figurile 6a și 6b. In prima figură,

un observator care ar sta în lungul muchei Oz, cu capul spre z, ar trebui să rotească axa Ox dela dreapta la stânga (în sens trigonometric) pentru a o aduce peste Oy. In a doua figură, poziția observatorului fiind aceeași, sensul de rotire dela axa Ox spre Oy este invers. In mod obișnuit se folosește prima orientare a triedrului (fig. 6 a).

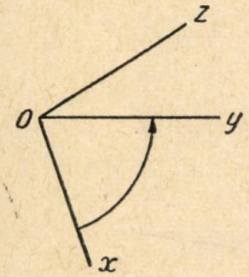


Fig. 6 a

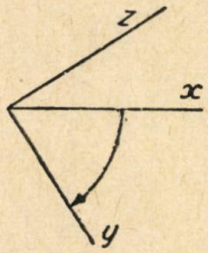


Fig. 6 b

4. *Folosirea triedrului.* Știința (teoretică și practică) folosește la tot pasul triedrul, în special pe cel tridreptunghic, ca *sistem de referință* sau *reper*.

In plan sistemul de referință este deobicei format din două axe dreptunghiulare (deci unghiul drept). In spațiu se iau trei axe formând un triedru tridreptunghic $Oxyz$, orientat pozitiv.

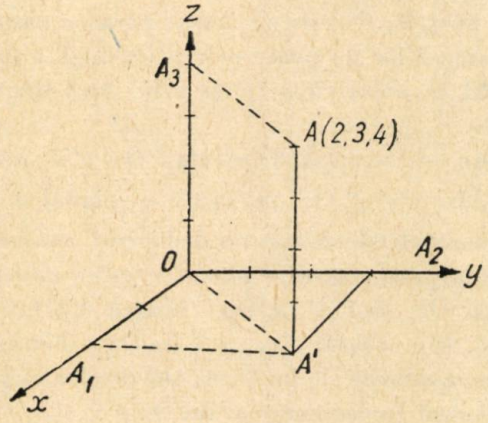


Fig. 7.

Poziția unui punct se fixează prin trei coordonate: *abscisa* $x = \overline{OA_1}$; *ordonata* $y = \overline{OA_2}$; *cota* $z = \overline{OA_3}$. Astfel punctul din figură are coordonatele $x = 2$; $y = 3$; $z = 4$. Când una din coordonate este negativă, se măsoară pe axa respectivă în sens contrar.

Triedrul ca sistem de referință există și acolo unde nu apare în mod evident, de ex. la o hartă sau un plan de construcție. Aceasta, pentru că poziția unui punct de pe hartă sau din planul de construcție nu este determinată decât dacă se cunoaște și *cota* lui. In acest caz axele hărții (planului) și verticala formează triedrul.

5. *Proprietăți generale ale triedrelor.* Pentru demonstrarea teoremelor de mai jos, se presupun cunoscute toate teoremele de geometrie plană și în spațiu din manualele de școală.

Teoremă. *In orice triedru, o față oarecare este mai mică decât suma celorlalte două.*

Proprietatea este evidentă dacă fața nu este cea mai mare. De aceea este deajuns ca demonstrația să se facă pentru una din fețe care să poată fi socotită ca cea mai mare.

Reamintim întâi următoarea teoremă:

Dintre unghiurile făcute de o dreaptă cu dreptele unui plan, care trec prin punctul comun dreptei și planului, cel mai mic este unghiul făcut de dreapta cu proiecția ei. (Manual cl. X-a pag. 46).

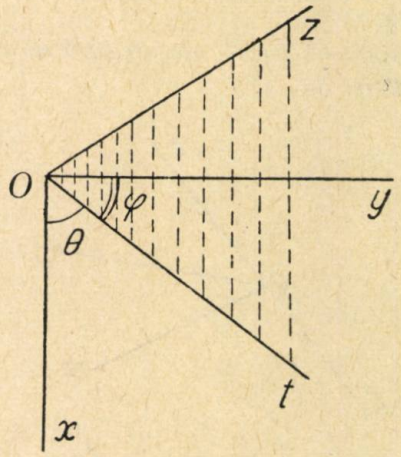


Fig. 8.

Să figurăm acum triedrul $Oxyz$ și să proectăm muchia Oz pe planul xOy. Proecția Ot poate cădea în interiorul sau în exteriorul feței xOy.

a) *Presupunem că Ot cade între Ox și Oy.* In acest caz unghiul xOy este împărțit în două: $xOt = \theta$ și $tOy = \varphi$. Planul proectant zOt este perpendicular pe xOy, deci și xOy este perpendicular

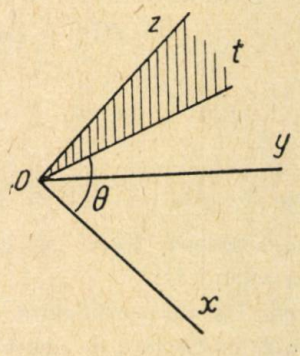


Fig. 9.

pe zOt. Aceasta înseamnă că Ot poate fi privită ca proecția lui Ox sau Oy pe zOt. Ca atare, folosind teorema reamintită mai sus, θ și φ sunt unghiuri minime, deci:

$$\theta < (xOz) \quad ; \quad \varphi < (yOz).$$

Adunând aceste neegalități obținem:

$$\theta + \varphi < \sphericalangle xOz + \sphericalangle yOz$$

sau

$$(1) \qquad \sphericalangle xOy < \sphericalangle xOz + \sphericalangle yOz$$

b) *Presupunem acum că Ot cade în afara feței* xOy.

In baza raționamentului făcut mai înainte rezultă că $\theta < (xOz)$, dar acum $(xOy) < \theta$, deci

$$\sphericalangle xOy < \sphericalangle xOz$$

Fața xOy nu este cea mai mare și așa cum am mai spus, proprietatea este evidentă.

Observare. Lăsăm pe seama cititorului să tragă concluziile în cazul când proecția lui Oz ar fi chiar Ox sau Oy.

Teoremă. *Suma fețelor unui triedru nu depășește patru unghiuri drepte.*

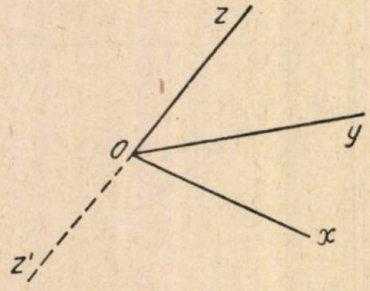


Fig. 10.

Prelungim muchia Oz dincolo de O și notăm cu Oz' semidreapta astfel obținută. Pe baza teoremei precedente, din triedrul $Oxyz'$ avem:

$$(xOy) < (z'Ox) + (z'Oy).$$

Să adunăm în ambele părți ale acestei neegalități suma $(xOz) + (yOz)$; adică:

$$(xOy) + (xOz) + (yOz) < (z'Ox) + \\ + (z'Oy) + (xOz) + (yOz)$$

Insă:

$$(z'Ox) + (xOz) = 180^\circ \quad ; \quad (z'Oy) + (yOz) = 180^\circ$$

deci

$$(2) \qquad (xOy) + (yOz) + (zOx) < 360^\circ$$

6. *Triede suplementare.* Fiind dat triedrul $Oxyz$ să ducem prin vârful O:

— *semidreapta* Oz' perpendiculară pe fața xOy și de aceiași parte cu Oz față de planul xOy;

— *semidreapta* Ox', perpendiculară pe fața yOz și de aceeași parte cu Ox;

— *semidreapta* Oy', perpendiculară pe fața zOx și de aceeași parte cu Oy față de planul zOx.

Am construit astfel un nou triedru $Ox'y'z'$, care poartă numele de triedru suplementar al lui $Oxyz$. Motivarea o vom vedea în cele ce urmează.

In legătură cu triedrul suplementar avem următoarea *proprietate de bază*: *între cele două triede există reciprocitate*, adică la rândul său $Oxyz$ este triedru suplementar față de $Ox'y'z'$.

Pentru demonstrație să observăm următoarele:

a) Unghiurile xOx', yOy', zOz' sunt toate ascuțite.

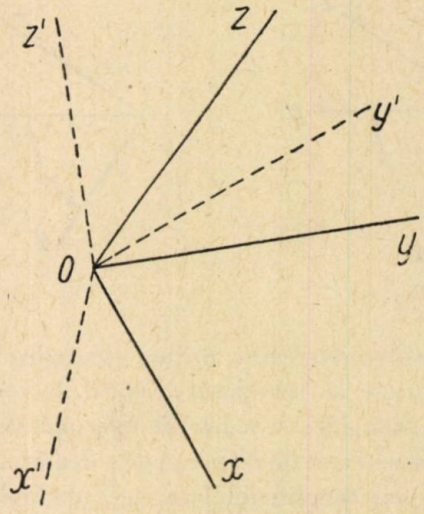


Fig. 11.

Să luăm de pildă $\sphericalangle zOz'$: Oz' este normala pe planul xOy, iar Oz este *de aceeași parte cu normala*, deci unghiul lor nu poate depăși un unghiu drept.

La fel se arată că xOx' și yOy' sunt unghiuri ascuțite.

b) Din construcția triedrului $Ox'y'z'$ rezultă $Ox' \perp Oz$; $Oy' \perp Oz$ deci $Oz \perp$ planul $x'Oy'$.

Din constatările de mai sus deducem: *semidreapta* Oz *este perpendiculară pe planul* $x'Oy'$ *și de aceeași parte cu* Oz' *față de* $x'Oy'$ (fiindcă $\sphericalangle z'Oz$ este ascuțit). Din această așezare a lui Oz și din așezările asemănătoare ale lui Ox și Oy rezultă că $Oxyz$ este triedrul suplementar al lui $Ox'y'z'$.

Teoremă. *Dacă* $Oxyz$ *și* $Ox'y'z'$ *sunt două triedre suplementare, fiecare unghiu diedru al unuia din ele este suplementar cu fața opusă a celuilalt* [1]).

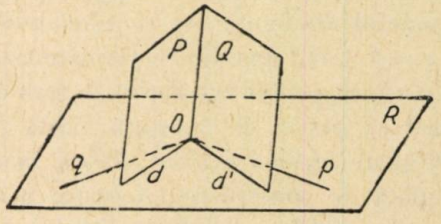


Fig. 12.

Să luăm întâi un unghiu diedru format de planele P și Q .Printr'un punct O al muchei comune să

[1]) De aci numele de triedre suplementare.

ducem normala Op la planul P, *de aceeași parte cu* Q și normala Oq la planul Q, *de aceeași parte cu* P.

Dacă tăem cele două plane cu un plan R perpendicular pe muchea comună, dreptele de intersecție Od și Od' (cu P și Q) formează unghiul plan corespunzător diedrului.

Figura obținută în planul R o putem desena pe foaia de hârtie. Se pot prezenta două cazuri după cum unghiul celor două plane (deci dOd') este ascuțit sau obtuz (fig. 13 a și 13 b).

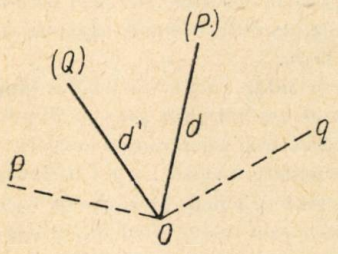


Fig. 13 a

Din felul în care s'au construit normalele Op și Oq este clar că dacă $\sphericalangle dOd'$ este ascuțit, atunci $\sphericalangle pOq$ este obtuz și dacă $\sphericalangle dOd'$ este obtuz, atunci $\sphericalangle pOq$ este ascuțit. In plus unghiurile fiind cu laturile perpendiculare, ele sunt neapărat *suplementare.*

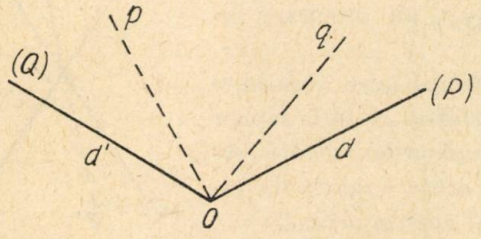


Fig. 13 b

Deci în toate cazurile *unghiul normalelor la cele două plane* (construite așa cum s'a arătat) *este suplementul unghiului diedru.*

Revenim acum la triedrele $Oxyz$ și $Ox'y'z'$ și la notațiile de la începutul articolului pentru unghiurile diedre și pentru fețe. In triedrul $Ox'y'z'$ notațiile vor fi aceleași însă cu accente.

Deoarece Ox' și Oy' sunt normale, respectiv la planele yOz și xOz (Ox' de aceeași parte cu zOx și Oy' de aceeași parte cu $z'Oy$) fața $x'Oy' = \gamma$ este suplementară cu diedrul Z. Raționând la fel pentru celelalte fețe putem scrie:

$$X + \alpha' = Y + \beta' = Z + \gamma' = \pi. \tag{3}$$

Reciprocitatea triedrelor, ne dă evident:

$$X' + \alpha = Y' + \beta = Z' + \gamma = \pi \tag{4}$$

Consecințe importante. Din relațiile (3) și (4) putem deduce *limitele între care variază suma unghiurilor diedre ale unui triedru.*

a) Astfel din (3) rezultă

$$X + Y + Z + (\alpha' + \beta' + \gamma') = 3\pi$$

Insă în triedrul $Ox'y'z'$ avem $\alpha' + \beta' + \gamma' < 2\pi$, deci punând în locul sumei fețelor pe 2π căpătăm neegalitatea

$$X + Y + Z + 2\pi > 3\pi \qquad \text{sau}$$

$$X + Y + Z > \pi \tag{5}$$

b) In triedrul suplementar trebue să avem:

$\alpha' < \beta' + \gamma'$ sau $\pi - X < \pi - Y + \pi - Z$

de unde rezultă

$$-X + Y + Z < \pi \text{ și în mod analog}$$
$$X - Y + Z < \pi$$
$$X + Y - Z < \pi$$

Adunând aceste neegalități găsim

$$X + Y + Z < 3\pi \tag{6}$$

Neegalitățile (5) și (6) se pot scrie la un loc:

$$\boxed{\pi < X + Y + Z < 3\pi} \tag{7}$$

Prin urmare *suma unghiurilor diedre ale unui triedru este cuprinsă între* 2 *unghiuri drepte și* 6 *unghiuri drepte* (sau între 180° și 540°).

7. *Cazurile de egalitate ale triedrelor.* Inainte de a enumăra cazurile de egalitate ale triedrelor este bine să reamintim definiția figurilor egale: *două figuri sunt egale dacă prin suprapunere ele coincid.*

Spre deosebire de triunghiuri, la triedre avem patru cazuri de egalitate și în plus o condiție de orientare, așa cum se vede din enunțarea ce urmează.

Două triedre sunt egale:

1° *Când au câte o față egală și unghiurile diedre alăturate ei respectiv egale și la fel așezate;*

2° *Când au câte un unghiu diedru egal, cuprins între fețe respectiv egale și la fel așezate;*

3° *Când au toate fețele respectiv egale și la fel așezate;*

4° *Când au toate unghiurile diedre respectiv egale și la fel așezate.*

Primele două cazuri se demonstrează imediat prin suprapunere directă, ca la triunghiuri, dacă este îndeplinită condiția ca elementele egale să aibă *aceeași așezare*, deci *orientarea* triedrelor să fie aceeași.

Pentru *cazul al treilea* să folosim raționamentul următor.

Fie $Oxyz$ și $O_1x_1y_1z_1$ două triedre cu fețele respectiv egale (Fig. 14 a și 14 b). Să ne închipuim că tăem triedrul al doilea după muchea Oz_1 și îl desfacem așa cum arată fig. 14 c. Când reconstituim triedrul, Oz_1' și Oz_1'' se suprapun peste Oz_1.

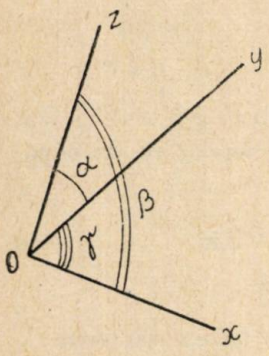


Fig. 14 a

Suprapunem fața $x_1O_1y_1$ peste xOy. Ele fiind egale prin suprapunere coincid, deci O_1x_1 se așterne peste Ox și O_1y_1 peste Oy. Să rotim acum fața $x_1O_1z_1'' = \beta$ în jurul lui Ox. Deoarece în tot timpul rotirii unghiul rămâne neschimbat, va exista o poziție a lui O_1z_1'' când va coincide cu Oz. Să rotim acum pe $y_1O_1z_1' = \alpha$ în jurul lui Oy. Unghiul α rămânând același va exista o poziție a lui O_1z_1 când va coincide cu Oz. In felul acesta am închis la loc triedrul $O_1x_1y_1z_1$ suprapunându-l peste $Oxyz$ și toate elementele lor coincid. Ele sunt deci egale. Să se observe că orientarea a fost presupusă la fel.

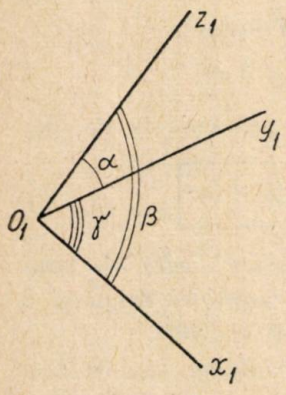


Fig. 14 b

Cazul al IV-lea nu-și are corespondent la triunghiuri, căci două triunghiuri cu unghiurile respectiv egale sunt numai asemenea, nu și egale.

Egalitatea triedrelor în acest caz rezultă din faptul că având *unghiurile diedre* respectiv egale, triedrele suplementare au *fețele* respectiv egale

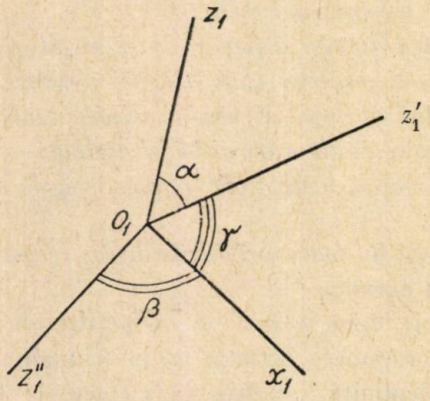


Fig. 14 c

(paragraful 6), deci potrivit cazului precedent ele sunt egale. Dacă triedrele suplementare coincid prin suprapunere, atunci și triedrele date coincid și deci sunt egale.

Observare. Condiția de orientare nu se cere la cazurile de egalitate ale triunghiurilor, deoarece dacă un triunghiu $A'B'C'$ are orientare inversă față de ABC (elementele lor se presupun egale), atunci $A'B'C'$ poate fi suprapus exact peste simetricul lui ABC în raport cu o axă oarecare. Indoind foaia de hârtie în jurul axei simetrice, cele două triunghiuri pot fi făcute să coincidă prin suprapunere. Aceasta înseamnă a scoate triunghiul $A'B'C'$ din planul său și a-l întoarce în spațiul cu 3 dimensiuni.

Dacă nu am avea această posibilitate de a scoate un triunghiu din planul său, atunci nu am putea face decât ca cele două triunghiuri să devină simetrice față de o axă oarecare. In acest caz nu le-am putea numi *triunghiuri egale*, ci numai *triunghiuri simetrice*.

Prin urmare orientarea nu intervine din cauză că putem *scoate unul din triunghiuri din plan* și îl putem întoarce astfel ca să aibă aceeași orientare cu celălalt.

Tridrele cu orientare inversă nu pot fi făcute să coincidă chiar dacă au toate elementele respectiv egale. De data aceasta însă nu putem scoate unul din triedre din spațiul cu 3 dimensiuni.

De aceea triedrele care au elementele lor respectiv egale, dar sunt invers orientate *nu se numesc egale*, ci *simetrice*. In adevăr dacă $Oxyz$ și $Ox'y'z'$ sunt două asemenea triedre, atunci $Ox'y'z'$ poate fi adus să coincidă cu triedrul $Ox_1y_1z_1$, simetricul lui $Oxyz$ față de vârful O. Se recunoaște imediat că $Oxyz$ și $Ox_1y_1z_1$ au orientare inversă.

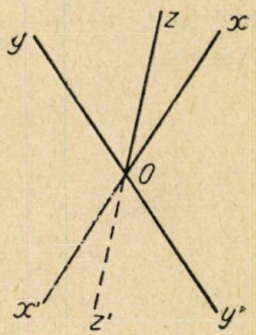


Fig. 15.

8. *Relații între elementele unui triedru.* Notația fețelor și a unghiurilor diedre rămâne aceea arătată la începutul acestui articol.

Alegem pe axa Ox un punct A și prin el ducem un plan perpendicular pe Ox. Acest plan tae planele xOy și xOz după dreptele AB, AC, care formează unghiul plan corespunzător diedrului X, deci $\sphericalangle CAB = X$. Triunghiul ABC are latura BC cuprinsă în planul yOz, unde formează un alt triunghiu OBC. Calculând pe BC din fiecare triunghiu avem:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,AB \cdot AC \cos X = OB^2 + OC^2 - 2\,OB.\,OC \cos\alpha$$

de unde deducem:

$$(8)\quad 2\,OB \cdot OC \cos\alpha = OB^2 - AB^2 + OC^2 - AC^2 + 2\,AB \cdot AC \cos X.$$

Insă din triunghiurile dreptunghice OAB și OAC rezultă

$$OB^2 - AB^2 = OA^2 \quad ; \quad OC^2 - AC^2 = OA^2.$$

Înlocuind în (8) și împărțind toată relația cu 2 rămâne

$$OB \cdot OC \cos\alpha = OA^2 + AB \cdot AC \cos X, \quad \text{sau}$$

$$\cos\alpha = \frac{OA}{OB} \cdot \frac{OA}{OC} + \frac{AB}{OB} \cdot \frac{AC}{OC} \cos X$$

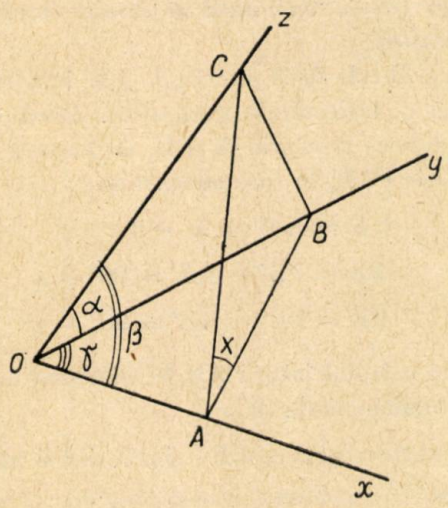


Fig. 16.

Aceleași triunghiuri dreptunghice ne dau:

$$\frac{OA}{OB} = \cos\gamma; \quad \frac{OA}{OC} = \cos\beta; \quad \frac{AB}{OB} = \sin\gamma; \quad \frac{AC}{OC} = \sin\beta,$$

care înlocuite mai sus ne dau formula;

$$(9) \quad \cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos X,$$

și prin permutări obținem:

$$\cos\beta = \cos\alpha\cos\gamma + \sin\alpha\sin\gamma\cos Y$$

$$\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos Z$$

Aceste formule sunt valabile pentru orice triedru, prin urmare și pentru triedrul suplementar, adică trebue să avem:

$$\cos\alpha' = \cos\beta'\cos\gamma' + \sin\beta'\sin\gamma'\cos X'$$

Dar din (3) și (4) rezultă

$$\alpha' = \pi - x; \beta' = \pi - Y, \text{ etc. } ; \quad X' = \pi - \alpha \text{ etc.}$$

Inlocuind în formula de mai sus și ținând seama de valorile funcțiunilor trigonometrice ale arcelor suplementare găsim:

$$-\cos X = \cos Y\cos Z - \sin Y\sin Z\cos\alpha$$

Inmulțind cu (-1) și permutând circular literele, obținem al doilea grup de relații:

$$\cos X = -\cos Y\cos Z + \sin Y\sin X\cos\alpha$$

$$(10) \quad \cos Y = -\cos Z\cos X + \sin Z\sin X\cos\beta$$

$$\cos Z = -\cos X\cos Y + \sin X\sin Y\cos\gamma$$

Pentru a obține altă serie de formule să luăm un punct M pe Oz și să ducem $MN \perp$ planul xOy, apoi proectăm punctul N pe Ox în P și pe Oy în Q. Se formează astfel triunghiurile dreptunghice MNP și MNQ. Este evident că $\sphericalangle MPN = X$ și $\sphericalangle MQN = Y$ și prin urmare:

$$MN = MP\sin X = MQ\sin Y.$$

Dar din triunghiurile dreptunghice MOP și MOQ avem:

$$MP = OM\sin\beta \quad ; \quad MQ = OM\sin\alpha$$

care înlocuite în egalitatea $MP\sin X = MQ\sin Y$ ne dau, după împărțirea cu OM:

$$\sin\beta\sin X = \sin\alpha\sin Y \quad \text{sau} \quad \frac{\sin\alpha}{\sin X} = \frac{\sin\beta}{\sin Y}$$

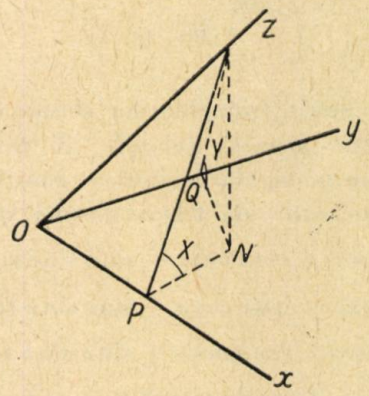


Fig. 17.

Dacă luăm acum un punct pe Ox și ducem perpendiculara pe planul yOz, repetarea aceluiași raționament ne duce la:

$$\sin\gamma\sin Y = \sin\beta\sin Z \quad \text{sau} \quad \frac{\sin\beta}{\sin Y} = \frac{\sin\gamma}{\sin Z}.$$

Strângând la un loc aceste rezultate, obținem al treilea grup de relații:

$$(11) \qquad \frac{\sin\alpha}{\sin X} = \frac{\sin\beta}{\sin Y} = \frac{\sin\gamma}{\sin Z}$$

care are o mare asemănare cu *teorema sinusurilor* și arată că *sinusurile feţelor unui triedru sunt proporționale cu sinusurile unghiurilor diedre opuse.*

9. *Triunghiuri sferice. Trigonometria sferică.*

Dacă din vârful O al unui triedru, luat ca centru, descriem o sferă cu o rază oarecare, fiecare față a triedrului determină pe sferă *un arc de cerc mare.* Se formează astfel *triunghiul sferic* ABC.

Ca și în geometria plană, se notează cu A, B, C unghiurile triunghiului, care sunt unghiurile *diedre*

ale triedrului $Oxyz$ *) și cu a, b, c laturile, înțelegând prin laturi *măsura arcelor de cerc*, nu lungimea lor. Așa dar între elementele triunghiului sferic ABC și elementele triedrului $Oxyz$ care l-a determinat pe sferă, există relațiile

$$a = \alpha; \quad b = \beta; \quad c = \gamma; \quad A = X;$$
$$B = Y; \quad C = Z.$$

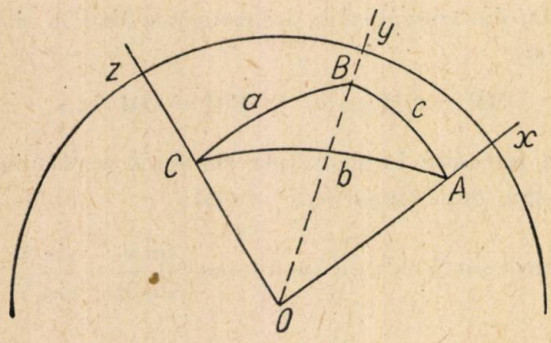


Fig. 18

Trigonometria triunghiurilor sferice se numește *trigonometria sferică*. Relațiile (9) transcrise cu notația din triunghiurile sferice constitue *formulele fundamentale* ale trigonometriei *sferice*:

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \\ \cos b &= \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B \\ \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C \end{aligned} \tag{9'}$$

Din aceste formule se pot deduce toate celelalte relații ale trigonometriei sferice prin transformări algebrice și trigonometrice. Uneori este mai simplu de a folosi alte metode, așa cum pentru formulele (10) am folosit triedrul suplementar, iar pentru (11) o cale directă. Formulele (10) și (11) transcrise pentru triunghiurile sferice devin:

$$\begin{aligned} \cos A &= -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a \\ \cos B &= -\cos C \cos A + \sin C \sin A \cos b \\ \cos C &= -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c \end{aligned} \tag{10'}$$

și

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}. \tag{11'}$$

Formulele (11') sunt cunoscute sub numele de *analogia sinusurilor.*

In afară de (10') și (11') se mai pot deduce din (9') încă *șase* relații.

Scopul trigonometriei sferice este *rezolvarea triunghiurilor sferice*, în vederea aplicațiilor în astronomie și în măsurătorile la suprafața pământului. Arătăm mai jos cum se pot folosi formulele trigonometriei sferice la probleme practice de măsurători geodezice.

*) Unghiul din A al triunghiului sferic este format de tangentele la arcele de cerc AB, AC, iar acestea fiind perpendiculare pe Ox măsoară unghiul diedru X.

10. *Aplicații*

I. *Calculul distanței între două puncte așezate la suprafața pământului, când se cunosc coordonatele lor geografice.*

Fie A și B cele două puncte, L și L' longitudinile lor, φ și φ' latitudinile geografice. Dacă ducem meridianele ce trec prin A și B, ia naștere triunghiul sferic PAB, în care cunoaștem:

$$\begin{aligned} \sphericalangle P &= A'B' = L' - L; \\ PA &= PA' - AA' = 90° - \varphi \\ PB &= PB' - BB' = 90° - \varphi' \end{aligned}$$

Pentru calculul laturii AB folosim una din formulele fundamentale (9'):

$$\begin{aligned} \cos AB &= \cos PA \cos PB + \sin PA \sin PB \cos P \\ \cos AB &= \sin\varphi \sin\varphi' + \cos\varphi \cos\varphi' \cos(L' - L). \end{aligned} \tag{12}$$

Dacă se lucrează cu mașina de calculat se poate folosi formula (12) așa cum este scrisă. Dacă se lucrează cu logaritmii se transformă formula astfel:

$$\cos AB = \sin\varphi' [\sin\varphi + \cos\varphi \operatorname{cotg}\varphi' \cos(L' - L)]$$

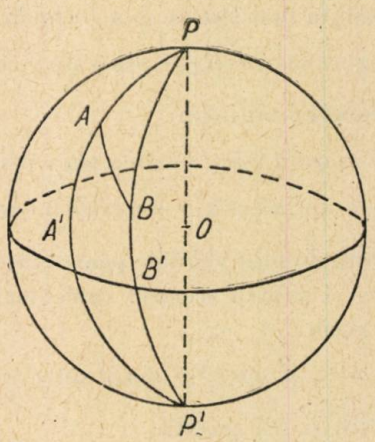


Fig. 19

și dacă se pune

$$\operatorname{cotg}\varphi' \cos(L' - L) = \operatorname{tg}\theta,$$

atunci

$$\cos AB = \sin\varphi' \frac{\sin(\varphi + \theta)}{\cos\theta}. \tag{12'}$$

Exemple. I. *Să se calculeze distanța între Paris* ($\varphi = 48° 50'$ N, $L = 2° 20'$ E) *și Moscova* ($\varphi' = 55° 45'$ N; $L' = 37° 37'$ E).

$$L' - L = 37° 37' - 2° 20' = 35° 17',$$

deci punem

$$\operatorname{tg}\theta = \operatorname{cotg} 55°45' \cos 35°17' = \operatorname{tg} 34°15' \cos 35°17',$$

sau

$$\log \operatorname{tg}\theta = \log \operatorname{tg} 34°15' + \log \cos 35°17' = \overline{1},74492$$

deci

$$\theta = 29°3'41''.$$

Acum (12') ne dă:

$$\cos AB = \sin 55°45' \frac{\sin 77°53'41''}{\cos 29°3'41''}$$

$$\log \cos AB = \log \sin 55°45' + \log \sin 77°53'41'' + \\ + \operatorname{colog} \cos 29°3'41''$$

sau

$$\log \cos AB = \overline{1},96598 \quad \text{deci} \quad AB = 22°23'$$

Calculul lui AB *în metri.* Lungimea meridianului fiind 40.000.000 m, arcul de 1'' are lungimea

$$l = \frac{40.000.000}{360 \times 60 \times 60} = \frac{10.000}{324} m.$$

Calculăm pe AB în secunde; AB = 80.580''. Lungimea arcului AB este deci

$$AB_{metri} = 80.580 \times \frac{10.000}{324} m = \textit{2487} \text{ Km}$$

II. *Dacă* A (L = 15°8' E, $\varphi = 24°32'$ N) și A' (L' = 54°18'E, $\varphi' = 16°56'$S) *sunt două localități la suprafața pământului, să se determine punctul unde arcul de cerc mare care le unește, tae ecuatorul.*

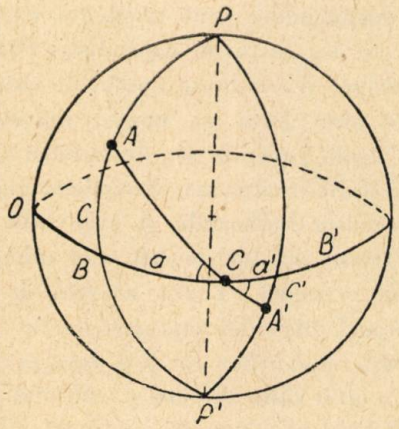


Fig. 20.

Cele două meridiane, ecuatorul și arcul de cerc AA' formează două triunghiuri sferice dreptunghice în B și B'.

Dacă în a treia formulă din (10°) facem B = 90° rezultă cos C = sin A cos *c*, dar relația sinusurilor ne dă $\sin A = \frac{\sin a \sin C}{\sin c}$.

Inlocuim pe sin A și obținem

$$(\alpha) \qquad \operatorname{tg} c = \sin a \operatorname{tg} C$$

In mod analog, din triunghiul A'B'C' deducem

$$(\beta) \qquad \operatorname{tg} c' = \sin a' \operatorname{tg} C$$

Problema cere poziția punctului C pe care o dăm prin longitudinea OC = *x*. Atunci $a = OC - OB = x - L$ și $a' = OB' - OC = L' - x$; apoi $c = \varphi$; $c' = \varphi'$.

Din (α) și (β) se deduce:

$$\frac{\sin a}{\operatorname{tg} c} = \frac{\sin a'}{\operatorname{tg} c'} = \operatorname{cotg} C.$$

In primele două rapoarte facem suma numărătorilor pe suma numitorilor, apoi diferența numărătorilor pe diferența numitorilor și obținem:

$$\frac{\sin a + \sin a'}{\operatorname{tg} c + \operatorname{tg} c'} = \frac{\sin a - \sin a'}{\operatorname{tg} c - \operatorname{tg} c'};$$

transformând sumele:

$$\frac{2 \sin \frac{a+a'}{2} \cos \frac{a-a'}{2}}{\frac{\sin (c+c')}{\cos c \cos c'}} = \frac{2 \sin \frac{a-a'}{2} \cos \frac{a+a'}{2}}{\frac{\sin (c-c')}{\cos c \cos c'}},$$

sau

$$(8) \qquad \operatorname{tg} \frac{a-a'}{2} = \frac{\sin (c-c')}{\sin (c+c')} \operatorname{tg} \frac{a+a'}{2}$$

Cu notațiile făcute mai sus avem: $\frac{a-a'}{2} =$

$$= x - \frac{L+L'}{2} = x - 34°43'; \frac{a+a'}{2} = \frac{L'-L}{2} =$$

$$= 19°35'; c - c' = \varphi - \varphi' = 7°36'; c + c' = 41°28'.$$

Inlocuind în (γ):

$$\operatorname{tg} (x - 34°43') = \frac{\sin 7°36'}{\sin 41°28'} \operatorname{tg} 19°35'$$

$$\log \operatorname{tg} (x - 34°43') = \log \sin 7°36' + \log \operatorname{tg} 19°35' + \\ + \operatorname{colog} \sin 41°28' = \overline{1},12142 + \overline{1},55115 + \\ + 0,17902 = \overline{2},85159$$

Rezultă

$$x - 34°43' = 4°3'51''$$

sau

$$x = 38°46'51''$$

Cu aceasta poziția punctului C este determinată.

O problemă de acest fel se pune atunci când un vapor face cursa între două localități, una la nord și alta la sud de ecuator și se determină punctul în care traversează ecuatorul.

Importanța trigonometriei sferice, exemplificată aci parțial (fără aplicații în astronomie), arată importanța studiului triedrelor și a proprietăților lor.

DESPRE PROBLEMELE COSMOGONIEI

TEORIA ACADEMICIANULUI SOVIETIC O. I. SCHMIDT

Călin Popovici

Deabea pe la mijlocul secolului al 18-lea au apărut primele ipoteze științifice despre originea sistemului solar. Până atunci știința era prea puțin desvoltată ca să poată aborda astfel de probleme, iar religia avea pretenția ca numai ea să dea răspuns la o chestiune atât de însemnată pentru concepția noastră despre lume. Problema originii Pământului, împreună cu aceea a originii vieții și a omului, sunt probleme cruciale pentru știință. După atitudinea în aceste probleme fundamentale cineva se situează pe poziția materialismului sau pe aceea a idealismului. Astronomia a fost și este unul din fronturile principale de luptă idelogică, fiindcă în domeniul ei intră o seamă de chestiuni de o însemnătate principială pentru concepția despre lume: este sau nu universul infinit în timp și în spațiu, care este locul omului și sistemului solar în univers — sistemul nostru solar este unic? — se poate da o explicație materialistă a originii și evoluției corpurilor cerești, sunt legile naturii pretutindeni valabile în univers și întotdeauna, etc.? De aceea astronomia, încă dela începuturile ei ca știință a avut să lupte cu îndârjire împotriva legendelor mistice despre lume, a concepțiilor idealiste creaționiste, agnostice și a tuturor formelor retrograde de gândire. Lupta pentru sistemul lui Copernic a depășit cadrele astronomiei și a fost udată cu sângele unor martiri ai științei și ai omenirii. Kant a elaborat prima ipoteză cosmogonică închegată, dar cu toată atitudinea sa materialistă hotărîtă, el a păstrat în opera sa un « creator », care însă doar asista ca spectator la nașterea lumilor.

Dela Kant a rămas fraza celebră: *dați-mi materia și din ea vă voi construi lumea.* Laplace fiind întrebat în legătură cu teoria sa cosmogonică, a declarat însă fățiș că nu are nevoie de nici un « creator » pentru a explica originea Pământului. Apariția primelor teorii cosmogonice științifice materialiste a avut loc într'o vreme când clasa burgheză era progresistă și revoluționară în lupta ei cu rămășițele feudalismului. Dar pe măsură ce clasa burgheză s'a înscăunat și a devenit la rândul ei conservatoare și ideologia ei s'a schimbat. Această ideologie se reflectă și în teoriile cu caracter general, cum sunt teoriile cosmogonice. De aceea nu e de mirare ca în stadiul actual plin de contradicții, a lumii occidentale, să ia naștere cele mai ciudate ipoteze cosmogonice.

Alături de unele rare încercări vădit materialiste, există o sumedenie de ipoteze idealiste, unele cu un caracter de-a-dreptul fantastic, cum ar fi spre exemplu aceea a formării sistemului solar prin ciocnirea unei cuante uriașe de un atom, sau aceea după care s'ar stabili momentul « creării » întregului univers. In știința occidentală, care este aservită intereselor capitaliste, este un haos total. Există foarte multe încercări de a crea teorii, dar nici una din ele nu se desvoltă și ele dispar repede una după alta. In țările capitaliste acest haos nu ne poate mira. El exprimă acea frământare sterilă care este caracteristică pentru știința acestor țări, îndată ce ea trece nu la probleme particulare ci la vreo problemă importantă, în care defectele concepției despre lume și prin urmare defectele interpretării științifice nu pot să nu se manifeste.

In această luptă între materialism și idealism ce se dă actualmente în acest domeniu de primă însemnătate pentru concepția despre lume, oamenii de știință sovietici au o poziție fermă materialistă și sunt bazați pe o concepție despre lume bine închegată. Nu este întâmplător faptul că problemele cosmogoniei sunt rezolvate cu succes în U.R.S.S. și nu în țările capitaliste. Probleme atât de vaste pot fi rezolvate numai de către acei savanți care stau ferm pe poziții materialiste, care înțeleg legile generale ale desvoltării și legătura generală dintre fenomene, care știu să analizeze experiența științei universale și care sunt capabili să sintetizeze rezultatele cele mai importante acumulate de veacuri. Toate acestea le învățăm cu ajutorul filosofiei materialismului dialectic, care oferă savanților ce și-o însușesc, posibilitatea de a găsi căile directe și cele mai scurte pentru rezolvarea problemelor cardinale ale științei.

Orice teorie cosmogonică materialistă bine fundată are așa dar și o importanță principială, aducând un argument în plus pentru o concepție justă despre lume, într'o problemă crucială. In altă ordine de idei tot în problema cosmogonică, însă în aceea a originii stelelor, dovezile aduse de savantul sovietic V. A. Ambarțumian în favoarea tezei că stelele se nasc și astăzi, ne dă un exemplu strălucit de combatere a creaționismului: dacă stelele se nasc și astăzi este falsă teoria după care

ele au luat naștere toate dintr'odată, într'un anume moment din trecut, au fost « create » ca să zicem așa.

Teoriile cosmogonice au însemnătate și pentru științele care se ocupă de Pământ: geologia, geofizica, geochimia, etc. Plecând dela ipoteza lui Laplace pe care au preluat-o fără spirit critic, geologii din trecut au explicat formarea munților și vulcanismul, ca rămășițe ale unei stări inițiale fluide a Pământului, care s'a răcit treptat. Și biologia, în teoriile ei asupra originii vieții, trebue să se refere la starea Pământului în trecutul foarte îndepărtat. Știința sovietică, atât de legată de practică, pune accentul și în această problemă pe latura care va duce la aplicații practice: într'o teorie justă a problemei originii Pământului se va găsi soluția problemei prevederii cutremurelor, a formării zăcămintelor, minerale, etc.

Cu toate greutățile imense în calea rezolvării problemei cosmogonice, a venit timpul soluționării ei. Progresele astronomiei, astrofizicii, ale fizicii, sunt de așa natură încât se poate încerca cu succes rezolvarea chiar a unor probleme cosmogonice mai generale: formarea stelelor și sistemelor stelare, evoluția lor și a universului considerat ca un tot. Astfel de probleme nici nu puteau fi abordate pe vremea lui Kant și a lui Laplace, când se aveau numai unele cunoștințe despre mișcările în sistemul solar.

Dacă acum 200 de ani doar mecanica cerească era singura ramură închegată a astronomiei, acum desvoltarea astrofizicii a făcut posibilă cunoașterea fizică a astrelor și înțelegerea proceselor din univers în interdependența complexă a tuturor factorilor fizici. Acum se iau în considerare nu numai forțele gravitației ci și acelea ale radiațiunilor, forțe magnetice și electrice, procesele lumii atomice și nucleare, etc. Prin aceasta, schema pur mecanică s'a întregit și ne-am apropiat și mai mult de înțelegerea lumii materiei. In cosmogonie primele ipoteze, ca aceea a lui Laplace, au fost prin forța lucrurilor mecaniciste, acum prin desvoltarea astrofizicii, ipotezele devin fizice, în înțelesul larg al cuvântului.

Insăși problema originii sistemului solar este considerată ca un capitol al problemei originii și desvoltării corpurilor cerești și a devenirii întregului nostru univers — o ramură a astrofizicii, știința despre constituția și evoluția corpurilor cerești. Numai considerând-o în acest cadru larg și luând în seamă toate procesele fizice, această problemă își va găsi soluția definitivă.

Noi trebue să preluăm rezultatele pozitive ale cercetărilor cosmogonice materialiste din trecut, fiindcă deși nici o ipoteză din trecut nu a putut să explice formarea sistemului solar, totuși lucrările pe care ele le-au provocat, au precizat problema și au curățit terenul pentru viitoarele teorii. Este așa dar o atitudine greșită a privi toată sforțarea trecută cu ușurință, așa cum ne pune în gardă însuși acad. Schmidt referindu-se la teoria lui Laplace, fiindcă orice teorie cosmogonică materialistă cât de cât întemeiată științificește, a adus contribuția ei la înaintarea științei.

Din teoria lui Kant, în afară de poziția principială materialistă justă, au rămas și anume detalii ca acel care se referă la starea inițială a materiei, de nor haotic de praf, particule solide mai mari și gaze. Critica teoriei lui Laplace a dus la precizarea problemei ce trebue explicată: de ce Soarele concentrează aproape toată masa sistemului și planetele aproape toată mișcarea sistemului solar (corect exprimat, aproape tot momentul unghiular al sistemului).

Lucrările provocate de teoria lui Laplace, ca acele referitoare la figurile de echilibru a corpurilor în rotație, sunt bunuri pentru totdeauna câștigate în știință (lucrările savantului rus Liapunof, spre exemplu). Lucrările savantului sovietic N. N. Pariiski arătând că nu se putea rupe din Soare un fragment care să se rotească în jurul acestuia la distanța planetelor mai îndepărtate, sub influența unei stele trecând prin apropierea Soarelui, este un câștig permanent al științei. Teoria lui Jeans a cărei netemeinicie a fost astfel dovedită, a fost unanim părăsită. Se pot da numeroase exemple de însemnătatea ipotezelor științifice în desvoltarea științei în general.

Astfel trebue să privim ipotezele cosmogonice cu toată însemnătatea pe care o au ele atât principial, pentru concepția justă despre lume, cât și prin influența lor asupra altor ramuri vecine ale științei, care pot avea uneori chiar aplicații practice. Trebue să privim aceste ipoteze în lumina rolului pe care l-au avut în progresul cunoștințelor noastre și în lucrările pe care le-au sugerat sau stimulat și care au dus la cuceriri permanente ale științei. De asemeni trebue să avem în vedere aspectul lor general ideologic și să înțelegem controversele din acest domeniu ca o luptă în arena ciocnirii dintre idealism și materialism, fiind foarte atenți la formele camuflate pe care le poate lua idealismul, fideismul, agnosticismul pentru a încerca să se înfiltreze și submineze. Nu întâmplător a devenit cosmogonia acum domeniul în care se manifestă în modul cel mai acut, în astronomie, lupta dintre materialism și idealism, domeniu în care se manifestă cel mai puternic spiritul de partid în știință. O dovedește deruta din știința cosmogonică apuseană, care alunecă tot mai mult spre fideism,

punându-se în serviciul celor mai reacţionare forţe ale imperialismului.

* * *

Incepând din anul 1943 un colectiv de oameni de ştiinţă sovietici sub conducerea academicianului sovietic O. I. Schmidt au elaborat o nouă teorie cosmogonică asupra originii Pământului. Dacă iniţiativa şi ideile de bază au fost ale academicianului sovietic O. I. Schmidt, aportul celorlalţi savanţi a fost atât de însemnat, încât actualmente se poate spune că această teorie este o operă colectivă: critica şi autocritica au dus la modificarea unor premize iniţiale, la lichidarea unor teze eronate şi la precizarea a numeroase detalii tehnice. Intr'o mică broşură denumită « Patru prelegeri despre teoria originii Pământului », apărută în anul 1950 (tradusă de Institutul Româno-Sovietic), academicianul O. I. Schmidt a expus principiile teoriei sale. Ulterior, în Aprilie 1951, Consiliul de Astronomie de pe lângă Academia de Ştiinţe din U. R. S. S., a convocat o conferinţă lărgită care a desbătut această teorie. Au luat parte 300 oameni de ştiinţă: astronomi, fizicieni, geofizicieni, geologi, matematicieni geochimişti, etc. care erau cu toţii interesaţi de problema originii Pământului. Cu ocazia acestei conferinţe, peste 40 de cercetători au desbătut problema sub toate aspectele ei.

Prin recomandările conferinţei şi prin largile desbateri critice care au avut loc atunci, se poate spune şi mai mult că elaborarea acestei teorii prezintă acum un caracter colectiv foarte accentuat. Astfel se vădeşte şi în această direcţie eficacitatea muncii ştiinţifice în colectiv. Prezidiul Academiei de Ştiinţe din U. R. S. S., a luat măsuri organizatorice pentru desvoltarea mai departe a lucrărilor cosmogonice, care vor fi întreprinse într'o serie de Institute din U. R. S. S., după un plan mai vast. Va apare şi o revistă cu titlul de « Probleme de cosmogonie », dedicată acestor lucrări.

In ţara noastră, Academia R. P. R., a luat iniţiativa formării unui colectiv ştiinţific, care să se ocupe de problemele cosmogonice şi de teoria Schmidt.

Faţă de acest caracter larg, colectiv, al lucrărilor cosmogonice, teoria Schmidt va fi desvoltată amănunţit sub toate aspectele şi în toate consecinţele ei. Desigur că unele din detaliile actualei teorii ar putea să sufere modificări, însă ţelul ei final, explicarea originii Pământului, va fi atins prin unirea sforţărilor tuturor, mult mai repede şi cu deplin succes.

Sub forma ei actuală teoria Schmidt susţine în principiu că Pământul şi celelalte planete au luat naştere din condensarea materiei care se afla în jurul Soarelui sub formă de pulberi, meteoriţi şi gaze. Pământul a fost iniţial rece şi încălzirea lui s'ar datori în esenţă descompunerii radioactive, care are loc în masa sa.

Aceste idei de bază sunt simple şi clare, urmărirea diferitelor procese care au dus la formarea Pământului apelează însă la cunoştinţe astronomice, fizice şi matematice, care nu sunt la dispoziţia elevilor din şcolile medii. Totuşi se poate schiţa calea explicaţiei, punând însă în gardă pe tinerii cititori că fiecare din cele mai jos deşi par lucruri simple la prima vedere, se cer fundate, pentru o adevărată înţelegere a lor, pe cunoştinţe fizice şi astronomice, pe care trebue să şi le însuşiască acei care vor să aprofundeze problemele de cosmogonie. Altfel afirmaţiile sunt vagi şi superficiale. Oamenii de ştiinţă sovietici pun mare preţ pe verificările cantitative prin observaţie şi prin calcule, de aceea ei elaborează

Marea regiune nebulară (luminoasă şi obscură) în apropiere de ρ Ofiucus.

şi această teorie în mod cât se poate de riguros. Aceasta în opoziţie cu lucrările celor mai mulţi cosmogonişti occidentali care încearcă să prezinte doar vagi teorii generale, fără a încerca verificări, sau fără a trece la amănunte.

Roiul de particule, pulberi și gaze se rotea odinioară în jurul Soarelui, nefiind format dintr'o bucată ca în teoria lui Laplace, ci fiecare particulă descriind drumul său propriu, după legea gravitației. Din cauza unei disimetrii inițiale de neînlăturat — norul n'a putut fi perfect omogen — unul din sensurile de mișcare a predominat. Prin aglomerarea diferitelor particule în condensări, care au format planetele actulale, s'a produs o « mișcare medie ». Astfel se explică de ce planetele se rotesc în jurul Soarelui în același sens, sensul predominant de mișcare al particulelor inițiale și deci și sensul « mediu » al concentrărilor de particule formate. Această mișcare medie explică și așezarea planetelor aproximativ într'un plan, ca și forma aproape circulară a orbitelor. Particulele individuale aveau orbite eliptice foarte alungite, cu axele mari așezate în direcții foarte diferite, dar formându-se media, alungirile orbitelor în diferite direcții s'au compensat și au rezultat orbite aproape circulare. Cu cât planetele au fost mai masive și au provenit din particule mai numeroase, cu atât compensările s'au făcut mai complet. De aceea planete masive ca Jupiter au orbite aproape de cercuri, pe când planete mai mici ca Mercur și Pluton au orbite mai excentrice, iar unii asteroizi și comete au orbite extrem de alungite și dispuse în planuri foarte înclinate pe orbita Pământului în jurul Soarelui.

Se explică de asemenea împărțirea planetelor în două grupe: planete asemănătoare Pământului și planete asemănătoare lui Jupiter. Primele sunt mai apropiate de Soare, au dimensiuni mai mici și densități mai mari, se rotesc relativ încet în jurul axei și au puțini sateliți. Planetele asemănătoare lui Jupiter sunt mai depărtate de Soare, mai masive însă cu densități mici, se rotesc repede în jurul axei și au mulți sateliți. Cauza acestei împărțiri trebue căutată în particularitățile norului de pulberi și gaze din care s'au format planetele și în densitatea variabilă a acestui nor, la diferite distanțe de Soare. Roiul de pulberi a fost treptat sărăcit în preajma Soarelui, pe de o parte din cauză că unele particule cu orbite alungite trecând prin apropierea imediată a Soarelui, au căzut în atmosfera acestuia și s'au evaporat, iar alte particule, deși nu s'au evaporat, și-au pierdut ghiața și substanțele volatile ușoare (metan, amoniac, acid carbonic, etc), depe ele, prin căldura Soarelui, acestea difuzându-se în spațiu. Astfel planetele din preajma Soarelui s'au condensat din elemente mai grele, aflate în cantități mai reduse. In regiunile mai depărtate particulele s'au găsit în umbra norului de particule mai apropiate, acolo domnea o temperatură mai scăzută și roiul era mai bogat. Pe concentrările de particule solide s'au depus acolo și gaze condensate, încât planetele formate au fost și mai mari și mai puțin dense.

Teoria formării concentrărilor, prin mișcarea unor particule mai mari, într'un mediu difuz, a fost bine întemeiată științificește de Gurevici și Lebedinski, colaboratori ai acad. O. I. Schmidt.

Teoria explică și rotația planetelor în același sens cu mișcarea de revoluție. Intr'o ipoteză pur mecanică, ca aceea a lui Laplace, nu se putea înțelege sensul mișcării de rotație al planetelor, care rezultă din teorie contrar cu acel al mișcării de revoluție. Dacă se ține însă seama de pierderile de căldură rezultată din ciocnirea diferitelor particule care au format planetele, se explică de ce sensul de rotație este același cu acel de revoluție, trebue doar ca pierderile de căldură să fie destul de mari. Astfel în noua teorie intervin pe lângă factorii mecanici și alți factori fizici, ca schimburile de căldură în cazul acesta special și prin aceasta, teoria capătă o fundare fizică mai largă.

Teoria mai explică, din același punct de vedere unitar formarea sateliților și faptul că unii din ei au mișcări retrograde și legea de repartiție a distanțelor în sistemul solar (legea dată de O. I. Schmidt este $\sqrt{r_n} = a + bn$, în care r_n este distanța planetei n-a de Soare, iar a și b două constante care au valori distincte după cele două grupe de planete considerate).

TABEL AL DISTANȚELOR PLANETELOR IN SISTEMUL SOLAR

	Mercur	Venus	Pământ	Marte	Jupiter	Saturn	Uran	Neptun	Pluton
$r_{observat}$	0,30	0,72	1,00	1,52	5,20	9,54	19,19	30,07	39,52
$r_{calculat}$ Schmidt	0.39	0,67	1,04	1,49	5,20	10,76	18,32	27,88	39,40

Asupra acestor desvoltări nu se poate insista aci, deoarece ele cer unele cunoștințe suplimentare de mecanică.

In privința problemei proveniența norului de particule, academicianul O. I. Schmidt este de părere că acest nor, asemănător cu nebuloasele obscure, atât de numeroase în brâul Căii Laptelui, a fost captat de Soare, în mișcarea lui în jurul centrului

Galaxiei. Academicianul O. I. Schmidt, ca și astronomii sovietici N. N. Pariiski și G. F. Hilmi, au demonstrat prin calcule numerice, posibilitatea captării definitive în anumite condiții a unui corp de către un alt sistem de două corpuri. G. F. Hilmi a stabilit și teoretic posibilitatea (probabilitatea) captării în anume cazuri. Lucrările lor au foarte mare însemnătate teoretică, deoarece se credea până de curând, că un corp odată captat vremelnic, părăsește până la sfârșit sistemul celor două corpuri pe lângă care a trecut și care l-au captat doar temporar.

Nori obscuri în planul median al unei Galaxii.

Lucrările conferinței de cosmogonie au arătat însă că este cu mult mai probabil că norul de particule din jurul Soarelui a apărut odată cu formarea Soarelui din același mediu inițial, fenomenul captării fiind prea rar, după schema originară propusă de acad. Schmidt fapt care a rezultat din desbaterile conferinței. Captarea a fost introdusă în teorie spre a explica repartiția în sistemul solar a maselor și a mișcărilor (a momentului unghiular = produs între masa corpului în rotație, viteza, și distanța dela centrul de rotație). Soarele are 99% din masa sistemului, iar planetele 98% din suma momentelor unghiulare: Soarele se rotește cu mult prea încet, ca să se fi putut rupe din el planetele în trecut, prin forța centrifugă. Explicația disimetriei repartiției maselor și mișcărilor în sistemul solar a fost piatra de încercare, de care s'au lovit toate teoriile trecute, care din această cauză au și fost părăsite.

Pământul s'a format, după teoria Schmidt, în decurs de 6—7 miliarde ani, dar creșterea masei sale a fost mai repede la începutul când norul era mai dens, încât într'un miliard de ani s'a format jumătate din Pământul de azi. Pământul și-a început existența ca un corp rece asemenea particulelor solide din spațiul interastral (aproape de 0° absolut) și s'a încălzit prin desintegrarea substanțelor radioactive care se aflau în particulele ce l-au constituit. Și acum în apropiere de centru, Pământul s'ar încălzi, dar la suprafață el începe să se răcească. In unele locuri ale scoarței, bogate în substanțe radioactive, încălzirea poate ajunge la 1000° — 1300° încât prin topirea rocilor se formează magma, care ieșind pe alocuri produce fenomenele vulcanice.

La început Pământul ar fi fost constituit aproape uniform, dar cu creșterea masei sale și cu încălzirea sa internă, materia a ajuns plastică. Rocile mai grele s'au afundat spre centru, dând actualul sâmbure dens al Pământului, pe când cele ușoare s'au ridicat la suprafață, alcătuind scoarța. Stratificarea aceasta nu este terminată, blocuri mari mai alunecă încet unele față de altele, acumulându-se din cauza frecărilor mari tensiuni interne, care duc la ruperi și deplasări subite. Aceasta ar fi cauza cutremurilor adânci. In aceste mișcări trebue ca geologii să caute și originea formării munților. Teoria « cutării » pământului prin răcirea lui, pornește indirect dela ipoteza unui Pământ originar fierbinte (Laplace). S'a arătat însă că prin această cauză nu se pot explica munții înalți, ci doar unele mici încrețituri, energia pusă în joc fiind prea mică. In privința originii atmosferei, acad. Schmidt afirmă că ea a provenit din căderea pe Pământ a unor meteoriți care conțineau ghiață și unele substanțe ușoare (amoniac, metan, acid carbonic) meteoriți care au căzut pe Pământ, înainte ca orbitele lor excentrice să-i fi adus în preajma Soarelui, unde aceste substanțe s'ar fi volatilizat și împrăștiat în spațiu. Aplicațiile geologice și geofizice atât de însemnate ale teoriei Schmidt, pot să aibe după cum accentuează și acad. O. I. Schmidt o mare valoare practică în problema rezervelor de minereuri, a prognozii cutremurelor, etc. Acad. O. I. Schmidt invită pe geologi să desvolte teoriile geologice (formarea munților, etc), pornind dela ideile sale de bază, dovedite atât de fecunde.

In primele sale lucrări academicianul O. I. Schmidt s'a ocupat de formarea sistemelor de stele duble, arătând că o seamă din particularitățile statistice ale acestor sisteme (distribuția excentricităților orbitelor, etc). s'ar explica simplu prin ipoteza captării. Prin aceasta el a căutat să fundeze indirect și posibilitatea captării. Academicianul O. I. Schmidt a extins așa dar lucrările cosmogonice și la alte astre în afara sistemului solar, urmând linia desvoltării astronomici actuale.

Dealtfel preocuparea de materia difuză interastrală sub formă de gaze și de pulberi, de procesele ce se petrec în ea, este o temă fundamentală a astrofizicii de azi, care a arătat că jumătate din materia universului nostru se găsește sub această formă.

Conferința de cosmogonie din U. R. S. S., a scos în evidență în hotărîrea sa, meritul excepțional al acad. O. I. Schmidt de a fi putut explica dintr'un punct de vedere unitar atâtea particularități ale sistemului solar, care nu fuseseră niciodată până acum explicate în ansamblul lor și de a fi pus în legătură starea geologică a Pământului cu starea sa pregeologică.

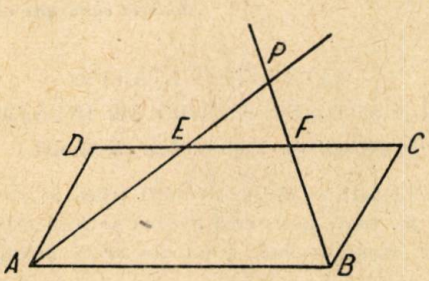
Teoria aceasta a sugerat numeroase lucrări (în domeniul captării spre exemplu, al condensării pulberilor, a nebuloaselor obscure, etc.), care rămân depe acum în patrimoniul științei. Ea a indicat o sumă de particularități în legile distanțelor planetare și în rotația planetelor, care scăpaseră observației astronomilor până acum. Prin larga desbatere ce a provocat-o a trezit interesul general și a avut și are un rol mobilizator în cercetările astronomilor de pretutindeni.

CHESTIUNI DE EXAMEN

Concursul de matematică și fizică din anul 1952. (Etapa II)

MATEMATICI ETAPA II-a CLASA VIII-a LICEE

I. Un mecanism este alcătuit din patru vergele egale două câte două, $AB=CD=a$, $AD=BC=b$, care formează un patrulater articulat în cele patru vârfuri. Vergeaua DC are două găuri E, F, unde $DE=FC=AD$. Două vergele



mai subțiri AE și BF sunt prinse de articulațiile A și B, și trecute prin găurile E, respectiv F, așa fel încât, atunci când patrulaterul se deformează, ele să se poată roti în jurul punctelor A, B. Se notează cu P punctul de intersecție al acestor vergele.

1. Să se demonstreze că patrulaterul ABCD, oricum l-am deforma rămâne paralelogram, iar AE, BF sunt bisectoarele unghiurilor A, B.

2. Să se demonstreze că, dacă $a=3b$, triunghiurile AED și BCF se pot descompune în câte două triunghiuri dintre care fiecare este egal cu triunghiul EFP.

3. Ce linie descrie punctul P atunci când deformăm paralelogramul ABCD, menținând latura A, B, fixă?

4. Ce linii descriu în aceleași condițiuni punctele E și F?

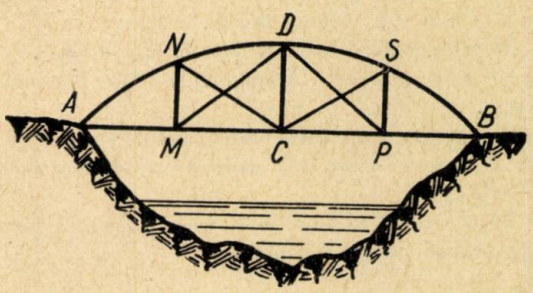
II. In Uniunea Sovietică s'a făcut de curând a 5-a reducere de prețuri. Inainte de reducerea a 4-a un articol a costat 800 ruble, iar acum după ce i s'a redus prețul de două ori cu același procent, același obiect costă 648 ruble. De cât la sută a fost reducerea?

(Ambele chestiuni obligatorii)

MATEMATICI. ETAPA II-a.
CLASA IX și ANUL II ȘCOLI SPECIALE DE DOI ANI

I. — Una din grinzile principale ale unui pod metalic are talpa superioară în formă de arc de cerc și doi montanți NM și PS, unde $AM=MC=CP=PB$. Lungimea podului este $AB=24$ m, iar săgeata $CD=5$ m. Se cere:

1. Raza cercului din care face parte talpa superioară.
2. Lungimea tălpii ANDSB.
3. Lungimea fiecărui montant, MN, PS.



II. — Pe un segment de dreaptă dat $AB=2a$, se ia un punct oarecare P, se construesc de aceiași parte a segmentului AB două semicercuri, unul cu diametrul AP, iar celălalt cu diametrul BP și se duce tangenta comună la aceste semicercuri.

1. Să se determine $AP=X$ astfel cu această tangentă comună să aibă o lungime dată $MN=l$.

2. Ce valoare maximă poate avea l pentruca construcția să fie posibilă?

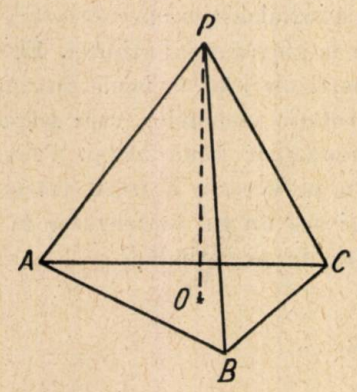
(Ambele chestiuni obligatorii)

MATEMATICI ETAPA II-a
Clasa X licee

Pentru montarea unei macarale, se întrebuințează un trepied ca cel din figură. Picioarele PA, PB, PC sunt articulate în P. Punctele A, B, C, sunt așezate într'un plan orizontal, triunghiul ABC fiind echilateral. Se notează

cu O punctul unde verticala punctului P taie planul ABC Se dă: PA=PB=PC=l, PO=h. Se cere:

1. Să se calculeze laturile triunghiului ABC. Să se pună în expresia obținută $h=0$ și să se explice rezultatul, arătând ce poziție are trepiedul în acest caz.



2. Să se calculeze unghiul format de două picioare ale trepiedului. Ce relație trebue să existe între h și l, pentruca acest unghiul să fie drept? Cât de mare este în acest caz latura triunghiului ABC? Rezultatul se va stabili și pe baza răspunsului dela 1.

3. Să se deducă din expresia obținută pentru cos u care este valoarea maximă pe care o poate lua unghiul u atunci când h variază, iar l rămâne constant. Ce poziție are în acest caz trepiedul? Se putea obține unghiul maxim fără niciun calcul?

4. Să se determine cosinusul unghiului v format de planele PAB, PBC. Ce relație trebue să existe între h și l pentru ca acest unghiu v să fie drept? Ce legătură există între acest rezultat și 2?

MATEMATICA. ETAPA II-a CLASA XI-a

In triunghiul dreptunghic ABC (A=90°), se dau ipotenuza a și raza r a cercului înscris. Se cere:

1. Să se calculeze catetele (algebric). Discuție.

2. Să se construiască triunghiul. (soluție geometrică). Discuție.

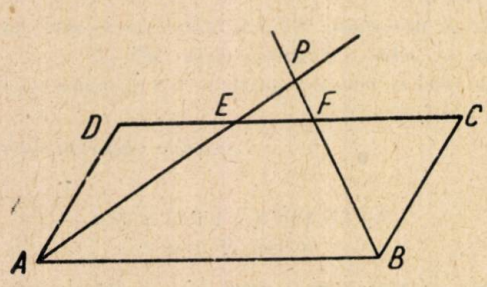
3. Ce relații există între datele problemei și unghiurile B, C? Din aceste relații să se deducă rezultatele dela punctele 1) și 2).

4. Să se calculeze raza unui cerc tangent celor două catete, având centrul pe ipotenuză.

MATEMATICI ETAPA II-a ȘCOLI MEDII TEHNICE CU CARACTER INDUSTRIAL

Anul I

I. Un mecanism este alcătuit din patru vergele egale două câte două, AB=CD=a; AD=BC=b, care formează



un patrulater articulat în cele patru vârfuri. Vergeaua DC are două găuri, E, F unde DE=FC=AD. Două vergele mai subțiri AE și BF sunt prinse de articulațiile A și B și trecute respectiv prin găurile E și F, așa fel încât, atunci când patrulaterul se deformează, ele să se poată roti în jurul punctelor A și B. Se notează cu P punctul de intersecție al acestor vergele.

1. Să se demonstreze că patrulaterul ABCD oricum l-am deforma, rămâne paralelogram, iar AE, BF sunt bisectoarele unghiurilor A și B.

2. Ce linie descrie punctul P atunci când deformăm paralelogramul ABCD menținând latura AB fixă?

3. Ce linii descriu în aceleași condițiuni punctele E și F?

II. In Uniunea Sovietică s'a făcut de curând a 5-a reducere de prețuri. Inainte de reducerea a 4-a, un articol a costat 800 ruble, dar acum după ce i s'a redus prețul de două ori cu același procent, același obiect costă 648 ruble. De cât la sută a fost reducerea?

(Ambele chestiuni obligatorii)

Anul II

I. In raport cu două axe dreptunghiulare Ox, Oy, se dau două puncte A (1,5), B (13,3). Axa Ox reprezintă o cale ferată, iar A și B reprezintă două sate. Intr'un punct M al acestei căi ferate trebue făcută o gară. 1). Să se determine coordonatele punctului M astfel încât el să fie egal depărtat de cele două sate. 2) Satele A și B se unesc cu gara prin câte o șosea. Să se determine unghiul AMB format din aceste șosele.

II. Un patrat ABCD are latura egală cu a. Pe laturile patratului se construesc, în afară, triunghiuri echilaterale. Unim vârfurile M, N, P și Q ale acestor triunghiuri. Se cere: 1) Să se demonstreze că patrulaterul MNPQ este un pătrat. 2)Să se calculeze volumul piramidei care are ca bază acest pătrat și înălțimea egală cu 3 a $(2-\sqrt{3})$.

(Ambele chestiuni obligatorii)

MATEMATICA ETAPA II ANUL I ȘCOLI PEDAGOGICE DE INVĂȚĂTORI

(Elevii vor trata ambele chestiuni)

1. Două țesătoare au lucrat două feluri de stofă totalizând 115 m. Dacă țesătoarea a doua ar fi lucrat cu 37 m mai mult atunci ambele țesătoare ar fi lucrat aceleași cantități.

Stofa țesută de prima s'a vândut cu 140 lei metrul, iar cea de a doua cu 128 lei metrul, obținându-se din vânzare câștigul total de lei 2222 lei.

Știind că prețul de cost al unui metru de stofă din primul fel este de 120 lei, să se afle prețul de cost al unui metru din cealaltă stofă.

2. Pe laturile unui exagon regulat se construesc triunghiuri echilaterale exterioare. Să se arate că vârfurile lor formează un exagon regulat concentric cu primul și să se calculeze aria lui, știind că aria celui dintâiu este de 31 m² și 24 dm².

Anul II

1. Un cristal de cuarț are forma unei prisme exagonale regulate, terminată la fiecare bază cu câte o piramidă regulată, piramidele fiind egale.

Să se calculeze distanța vârfurilor piramidelor știind că greutatea specifică a cuarțului este 2,6 g/cm³; greutatea cristalului este 15,6 g. Latura exagonului este de 1 cm, iar înălțimea prismei este jumătatea distanței vârfurilor piramidelor. (Se va cerceta mai întâi legătura dintre volumul piramidelor și al prismei).

2. Un căruţaş trebue să transporte 250 m^3 de piatră pe o şosea. Cariera de piatră este la 420 m. de locul unde trebue transportat primul m^3 care formează prima grămadă. Grămezile sunt egale şi depărtate între ele cu 20 m. Să se afle în câte zile va transporta căruţaşul piatra ştiind, că el lucrează 8 ore pe zi şi că timpul de încărcare şi descărcare a căruţei nu-i îngădue să facă decât 4 km. pe oră.

MATEMATICI, ETAPA II-a
ŞCOLI MEDII TEHNICE CU CARACTER SOCIAL, CULTURAL ŞI AGROSILVIC

Elevii vor trata ambele chestiuni

Anul I.

I. Un tractorist trebuia să are un lot de 63 ha. El începe lucrul cu 40 ore mai târziu decât trebuia, dar făcând în fiecare oră cu 0,10 ha peste normă, termină lucrarea exact la data fixată. Să se afle:

1. Care era norma pe oră? Cu cât la sută a depăşit norma?

II. Se dă un paralelogram ABCD cu laturile AB=7,5 cm. şi AD = 2,5 cm.

1. Să se demonstreze că bisectoarele unghiurilor A şi B împart latura CD în 3 părţi egale.

2. Să se determine unghiul format de aceste bisectoare.

3. Să se afle cu cât trebue mărite laturile AD şi BC pentru ca bisectoarele să se întâlnească pe latura C' D' a paralelogramului nou.

Anul II

I. Un canal de alimentare al unei instalaţii hidraulice are lăţimea bazei de 2 m. pereţii laterali înclinaţi cu 60° faţă de orizontală, iar apa din canal are o adâncime de 1,50 m. Să se afle:

1. Debitul canalului în m^3/oră, dacă apa curge cu 2 m/sec.

2. Suprafaţa cimentată a pereţilor şi fundului canalului, lungimea canalului fiind de 1 km.

II. O faşă de tifon este înfăşurată pe un beţişor rotund. Beţişorul are un diametru de 1 cm., iar tifonul are o grosime de 0,5 mm. Să se afle lungimea unei feşe care este înfăşurată de 100 ori pe beţişor.

N O T A. Se va considera că faşa formează un şir de cercuri concentrice cu raza din ce în ce mai mare.

FIZICA ETAPA II-a (raională)
(Elevii vor trata ambele chestiuni)

Clasa VIII licee

1. Conservarea energiei mecanice. Importanţa ei.

2. Un tren cu greutate totală de 500 tone merge cu viteza de 72 km pe oră. Inainte de a intra în gară, se închide complet drumul vaporilor.

a) De ce continuă trenul să meargă şi ce fel de mişcare are trenul până la oprire?

b) După cât timp şi la ce distanţă se va opri trenul? (coeficientul de frecare este de 0,005).

c) Care este puterea absorbită de forţa de frecare?

Clasa IX licee

1. Sch mbări de stare fizică şi explicarea lor prin teoria cinetico-moleculară.

2. Pentru producerea vaporilor necesari unor uzine textile se foloseşte un cazan încălzit cu motorină. Cazanul dă 200 kg. vapori pe oră. Să se calculeze cantitatea de motorină necesară pe oră ştiind că apa intră în cazan cu o temperatură de 15°C. şi că numai 15% din căldura produsă este absorbită de către apa din cazan. (Puterea calorifică a motorinei este de 1100 Cal/kg. căldura de vaporizare a apei 539).

Clasa X licee

1. Instrumente optice cu imagini virtuale. Importanţa lor pentru desvoltarea ştiinţei.

2. Pe un banc optic se află două lentile convergente L_1 şi L_2 având între ele o distanţă de 37 cm. L_1 are distanţa focală de 15 cm. iar L_2 are convergenţa de 10 dioptri. Se aşează un obiect înalt de 2,5 cm. la 40 cm. de prima lentilă La ce distanţă de lentila L_2 se va forma imaginea dată de aceasta a doua lentilă L_2 şi ce mărime va avea imaginea?

Clasa XI licee şi şcoli speciale de 2 ani (anul II)

1. Efectul termic al curentului electric şi aplicaţiile lui practice.

2. Se grupează 20 elemenete, fiecare având forţa electro motoare de 1,5 v şi rezistenţa interioară de 0,4 ohmi într'un circuit care alimentează un aparat cu rezistenţa de 10 ohmi. 1. Cum trebue grupate elementele pentru a obţine intensitatea cea mai mică? Dar cea mai mare? 2. In ce caz se întrebuinţează fiecare grupare?

FIZICA ETAPA II-a
Şcoli medii tehnice cu caracter industrial.

Profesorul va alege atât la anul I cât şi la anul II unul din subiectele propuse pentru Mecanică, Optică, Electricitate şi Căldură, ţinând seama de materia parcursă la clasa respectivă.

Subiectele la fiecare din aceste capitole conţin 2 chestiuni. Elevii vor trata ambele chestiuni propuse.

Mecanică.

1. Compunerea forţelor. Aplicaţii practice.

2. Ce lucru mecanic efectuează un om cu o greutate de 70 kg parcurgând un drum de 1 km., dacă poartă în spate o bară de fier de un metru lungime, cu secţiunea de 20 cm^2? Ce putere a întrebuinţat dacă drumul a durat 20 de minute? (Densitatea fierului este 7,8)

Căldura.

1. Schimbări de stare fizică şi explicarea lor cu ajutorul teoriei cinetico-moleculare.

2. O sârmă de cupru pentru o linie telefonică trebue întinsă între 2 stâlpi cu distanţa de 17 m. Ce lungime trebue să aibă sârma ca să nu se rupă în timpul iernii. ştiind că temperatura minimă din timpul iernii este—40°, că temperatura din ziua când s'a instalat sârma a fost + 24°, şi coeficientul de dilatare liniară a cuprului este 0,000017. Ce lungime ar avea sârma într'o zi cu temperatura de —40°, dacă se presupune perfect întinsă între cei 2 stâlpi, în ziua când temperatura este de + 24°.

Optica.

1. Instrumente optice cu imagini virtuale. Importanţa lor pentru desvoltarea ştiinţei.

2. O oglindă concavă are raza de curbură de 20 cm. La ce distanţă de oglindă este aşezat un corp, dacă imaginea acestuia este prinsă clar pe un ecran aşezat la o distanţă de centrul optic, de două ori cât raza de curbură. Ce mărime trebue să aibă un obiect aşezat în aceeaşi poziţie cu primul, pentru ca să obţinem pe ecran o imagine de 8 cm.

Electricitate.

1. Electroliza. Importanța ei în știință și industrie.

2. In apa din vasul unui calorimetru se află o rezistență prin care trece un curent electric, cu tensiunea de 120 volți. După 8 minute apa se încălzește dela 20° la 60°. Știind că în calorimetru au fost 2 litri de apă, să se afle valoarea rezistenței și intensitatea curentului.

FIZICA ETAPA II-a

Școli medii tehnice cu caracter financiar-comercial, social, și agrosilvic.

Mecanică.

1. Compunerea forțelor. Aplicații practice.

2. Cât cântărește în apă o bucată de fier care are în aer 1 560 kgr? (Densitatea fierului este 7,8). Ce densitate ar avea un lichid în care acest corp ar cântări 1,400 kg, și cum e densitatea acestui lichid față de apă?

Căldura.

1. Schimbări de stare fizică și explicarea lor cu ajutorul teoriei cinetico-moleculare.

2. Să se afle lucrul mecanic produs de 1 kg de benzină, într'un motor cu explozie știind că 1 kg de benzină produce 11 000 calorii mari, și că numai 20% din căldura dată se transformă în lucru mecanic. Să se exprime lucrul mecanic în toate unitățile cunoscute.

Optica.

1. Instrumente optice cu imagini virtuale. Importanța lor pentru desvoltarea științei.

2. Să se afle suprafața umbrei aruncate pe un ecran vertical de o sferă metalică luminată de un izvor punctiform. Raza sferei este de 2 cm. Distanța ei față de izvorul de lumină este 0,40 m, iar față de ecran 60 cm. Se mai întreabă la ce distanță de obiect ar trebui așezat paravanul pentru ca umbra să aibă un diametru de 5 ori mai mare decât obiectul.

Electricitate.

1. Curenți derivați. Legi. Aplicații practice.

2. Printr'un fir de nichelină lung de 3 m. cu secțiunea de 0,02 cm² trece un curent cu intensitate de 50 Amperi, timp de o jumătate de oră. Să se afle cantitatea de căldură desvoltată în fir, știind că rezistența specifică a nichelinei este 0,4.

FIZICA ETAPA II-a (raională)

Școli pedagogice de învățători și educatoare

(Elevii vor trata ambele chestiuni)

Anul I.

1. Măsurarea temperaturilor.

2. Care este puterea unei macarale care ridică o greutate de o tonă la înălțimea de 20,5 m. în trei minute (se va exprima în kgm/sec apoi în alte unități de putere cunoscute).

Anul II.

1. Instrumente optice cu imagini virtuale

Importanța lor pentru desvoltarea științei.

2. Pentru a confecționa o rezistență electrică se înfășoară un fir de nichelină cu dimetrul de 2 mm. pe un cilindru de porțelan cu raza de 2,5 cm.

Care este numărul înfășurărilor (spirelor) pentru a obține o rezistență de 100 ohmi? (Rezistența specifică a nichelinei este 0,4).

$i^4 = x$

PROBLEME REZOLVATE

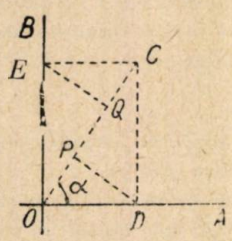
$x = e^{-\frac{\pi}{2}}$

Problema 312

Se dă un sfert de cerc OAB *de rază* R. *Fie* C *un punct oarecare de pe arc*; D *și* E *proiecțiile lui pe* OA *și* OB. *Punctele* D *și* E *se proiectează în* P *și* Q *pe* OC. *Să se determine distanța* AC, *atunci când segmentele* PQ, EC *și* DC *satisfac relația* PQ + EC = DC.

Valter Petre

Soluție. Luăm ca variabilă unghiul AOC = α.



Triunghiurile ODC și OPD sunt asemenea, deci

$$\frac{OP}{OD} = \frac{OD}{OC} \text{ sau } OP = \frac{OD^2}{OC}.$$

Se vede că OP = CQ. Atunci PQ =

$$OC - 2\,OP = OC - 2\,\frac{OD^2}{OC}.$$ Ținând seamă că

OC = R, avem EC = R cos α, DC = R sin α; înlocuind în relația dată avem

$$\frac{R^2 - 2\,R^2\cos^2\alpha}{R} + R\cos\alpha = R\sin\alpha.$$ Deci

$$1 - 2\cos^2\alpha + \cos\alpha = \sin\alpha.$$

Ridicăm ultima ecuație la pătrat și avem:

$$4\cos^4\alpha - 2\cos^2\alpha - 4\cos^2\alpha + 2\cos\alpha = 0.$$

Sau

$$\cos\alpha\,(2\cos^3\alpha - 2\cos^2\alpha - \cos\alpha + 1) = 0$$

$$\cos\alpha\,[2\cos^2\alpha\,(\cos\alpha - 1) - (\cos\alpha - 1)] = 0.$$

Deci

$$\cos\alpha\,(1 - \cos\alpha)\,(1 - 2\cos^2\alpha) = 0,$$

care admite ca rădăcini

$$\cos\alpha = 0,\ \cos\alpha = 1,\ \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ sau}$$

$$\alpha = 90^0;\ \alpha = 0^0;\ \alpha = 45^0.$$

Așa dar AC are valorile

$$AC = R\sqrt{2};\ AC = 0,\ AC = 2R\sin\frac{45}{2} =$$

$$2R\sqrt{\frac{1-\cos 45^0}{2}} = R\sqrt{2-\sqrt{2}},$$

adică latura octogonului regulat înscris în cercul de rază R.

Problema 313.

Să se arate că într'un triunghi oarecare avem relația

$$\sin A \sin(A+45^0) - \sin B \sin(B+45^0) = \sin(A-B)\sin(C-45^0).$$

C. Ionescu-Țiu

Soluția I. Ținem seamă de relația

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

și avem pentru cazul nostru

$$\frac{1}{2}[\cos 45^0 - \cos(2A+45^0)] -$$

$$-\frac{1}{2}[\cos 45^0 - \cos(2B+45^0)] =$$

$$= \frac{1}{2}[\cos(2B+45^0) - \cos(2A+45^0)] =$$

$$= \sin(A-B)\sin(A+B+45^0.$$

Dar $A+B+C=180^0$, sau $A+B=180^0-C$ și $\sin(A+B+45^0) = \sin[180^0-(A+B+45^0)]$. Atunci

$$\sin(180^0-(A+B+45^0)] =$$

$$= \sin[180^0-(180^0-C+45^0)] = \sin(C-45^0).$$

Așadar

$$\sin(A-B)\sin(A+B+45^0) = \sin(A-B)\sin(C-45^0)$$

și relația este demonstrată.

Soluția II. Vom stabili relația mai generală

$$\sin A \sin(A+\alpha) - \sin B \sin(B+\alpha) = \sin(A-B)\sin(A+B+\alpha).$$

Desvoltăm partea I: $\sin A \sin(A+\alpha) - \sin B \sin(B+\alpha) = \sin^2 A\cos\alpha + \sin A\cos A\sin\alpha - \sin^2 B\cos\alpha - \sin B\cos B\sin\alpha =$

$$= \cos\alpha(\sin A + \sin B)(\sin A - \sin B) + \sin\alpha\left(\frac{\sin 2A - \sin 2B}{2}\right) =$$

$$= 4\cos\alpha\sin\frac{(A+B)}{2}\cos\frac{(A-B)}{2}\sin\frac{(A-B)}{2}\cos\frac{(A+B)}{2} +$$

$$+ \sin\alpha\sin(A-B)\cos(A+B) \therefore \cos\alpha\sin(A+B)\times\sin(A-B) + \sin\alpha\sin(A-B)\cos(A+B) =$$

$$= \sin(A-B)\sin(A+B+\alpha).$$

Când A și B sunt unghiuri într'un triunghiu, iar $\alpha = 45^0$; $\sin(A+B+\alpha) = \sin(C-\alpha) = \sin(C-45^0)$.

Inlocuind obținem relația din enunț.

Problema 321

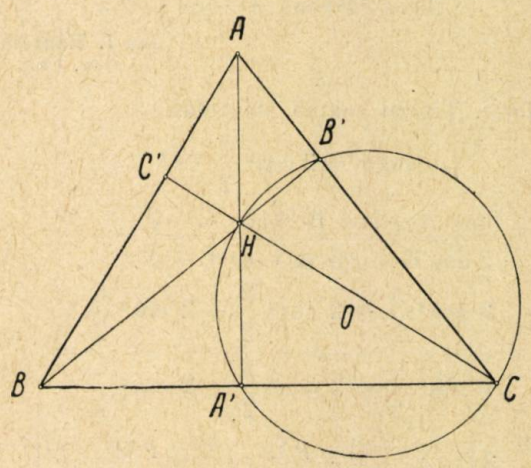
Să se construiască triunghiul ABC, cunoscând unghiul A, segmentul CH unde H este ortocentrul și A'B' latură a triunghiului ortic.

Nicolae D. Păun
elev, R. Vâlcea

Soluție. Considerăm problema rezolvată

$$\sphericalangle B'HC = \sphericalangle A,$$

deci triunghiul B'HC este cunoscut, $\sphericalangle A$ și $\overline{CH}$ fiind cunoscute. Patrulaterul B'HA'C este inscriptibil, deoarece $\sphericalangle HA'C + \sphericalangle HB'C = 180^0$. Cercul circumscris este cunoscut având centrul la mijlocul lui $\overline{CH}$ și raza $R = \frac{\overline{CH}}{2}$. Rezultă următoarea construcție:



Construim triunghiul B'HC și cercul său circumscris. Din B' ca centru ducem un arc de cerc cu raza B'A' care taie cercul circumscris triunghiului B'HC în punctul A' (opus lui B' față de $\overline{CH}$).

La intersecția lui HA' cu CB' va fi vârful A, și la intersecția lui B'H cu CA', va fi vârful B_0 al triunghiului căutat ABC.

Dacă $\sphericalangle A > 90^0$; $\sphericalangle ACC' = 90^0 - A$, deci triunghiul dreptunghic AB'H este cunoscut, $\overline{CH}$ și $90^0 - A$ fiind cunoscute. Patrulaterul HB'A'C e inscriptibil ($\sphericalangle HB'C = \sphericalangle HA'C = 90^0$). Cercul său circumscris este cunoscut având centrul la mijlocul lui $\overline{CH}$ și raza $\frac{\overline{CH}}{2}$. Construcția este aceeași ca și în cazul $A < 90^0$. Dacă $A = 90^0$, punctul H se confundă cu A, $\overline{CH} = \overline{AC}$ și $\overline{A'B'} = \overline{AA'}$. Construcția este simplă: Construim triunghiul AA'C. Ridicăm o perpendiculară pe AC care taie pe A'C în B.

Problema 323

Să se arate că expresia $E = \dfrac{23.14^{2n+1} + 3}{17.12^{2n+3} + 4}$ *se simplifică cu 13, oricare ar fi numărul* n *întreg pozitiv.*

Al. Crăciun

Soluție. Expresia se poate scrie succesiv:

$$E = \frac{23.14^{2n+1} + 3}{17.12^{2n+3} + 4} = \frac{23.(13+1)^{2n+1} + 3}{17.(13-1)^{2n+3} + 4} =$$

$$= \frac{23\,(M13 + 1) + 3}{17\,(M13 - 1) + 4} = \frac{M\,13 + 26}{M\,13 - 13} = \frac{M\,13}{M\,13},$$

deci expresia se simplifică cu 13.

Problema 326

Să se arate că într'un triunghi oarecare există relația

$$\frac{(p-a)(p-b) + (p-b)(p-c) + (p-c)(p-a)}{(p-b)(p-c) - (p-a)(p-c) + (p-b)(p-a)} = \frac{\cos A + \cos B + \cos C + 3}{3\cos B - \cos A - \cos C + 1}$$

Ion I. Mânzatu
elev, Cluj

Soluție. Ținem seamă de relația:

$$\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1$$

$$\frac{\cos A + \cos B + \cos C + 3}{3\cos B - \cos A - \cos C + 1} =$$

$$= \frac{2\cos^2\frac{A}{2} + 2\cos^2\frac{B}{2} + 2\cos^2\frac{C}{2}}{6\cos^2\frac{B}{2} - 2\cos^2\frac{A}{2} - 2\cos^2\frac{C}{2}} =$$

$$= \frac{2\left[\frac{p\,(p-a)}{bc} + \frac{p\,(p-b)}{bc} + \frac{p\,(p-c)}{ab}\right]}{2\left[3\frac{p(p-b)}{ac} - \frac{p\,(p-a)}{bc} - \frac{p\,(p-c)}{a\,b}\right]} =$$

$$= \frac{a\,(p-a) + b\,(p-b) + c\,(p-c)}{3b\,(p-b) - a\,(p-a) - c\,(p-c)}$$

însă

$$a = 2p - b - c = (p-b) + (p-c)$$
$$b = 2p - a - a = (p-a) + (p-a)$$
$$c = 2p - a - b = (p-a) + (p-b),$$

înlocuind avem:

$$\frac{a\,(p-a) + b\,(p-b) + c\,(p-c)}{3b\,(p-b) - a\,(p-a) - c\,(p-c)} =$$

$$= \frac{(p-a)(p-b) + (p-c)(p-a) + (p-b)(p-c) + }{3\,(p-b)(p-c) + 3\,(p-a)(p-b) - (p-a)(p-b) -}$$
$$\frac{+ (p-a)(p-b) + (p-c)(p-a) + (p-b)(p-c)}{- (p-c)(p-a) - (p-c)(p-a) - (p-b)(p-c)} =$$

$$= \frac{2\,(p-a)(p-b) + 2\,(p-b)(p-c) + 2\,(p-c)(p-a)}{2\,(p-b)(p-c) - 2(p-a)(p-c) + 2\,(p-a)(p-b)}$$

deci relația e adevărată.

Problema 328

Fie $A_1A_2A_3$ *un triunghiu oarecare și* P *un punct în planul său. Notăm cu* a_1, a_2, a_3, *respectiv unghiurile* PA_1A_3, PA_2A_1, PA_3A_2 *și* b_1, b_2, b_3, *unghiurile lrespective* PA_1A_2, PA_2A_3, PA_3A_1. *Să se stabilească relația*

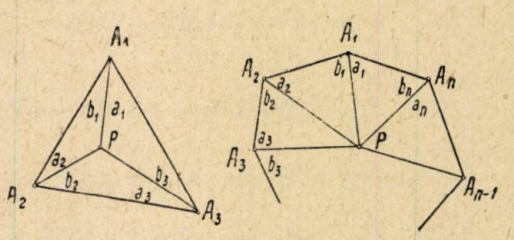
$$\sin a_1 \sin a_2 \sin a_3 = \sin b_1 \sin b_2 \sin b_3.$$

Să se generalizeze pentru un poligon oarecare.

D. I. Flondor

Soluție. In triunghiul PA_1A_2 avem:

$$\frac{\overline{PA_1}}{\overline{PA_2}} = \frac{\sin a_2}{\sin b_1};$$



In triunghiul PA_2A_3: $\frac{\overline{PA_2}}{\overline{PA_3}} = \frac{\sin a_3}{\sin b_2}$ și în triunghiul PA_3A_1: $\frac{\overline{PA_3}}{\overline{PA_1}} = \frac{\sin a_1}{\sin b_3}$. Inmulțind aceste relații obținem:

$$\sin b_1 \cdot \sin b_2 \cdot \sin b_3 = \sin a_1 \cdot \sin a_2 \cdot \sin a_3.$$

Generalizare. Notăm unghiurile

$$PA_1A_2,\ PA_2A_3, \ldots, PA_nA_1$$

cu $b_1, b_2, \ldots, b_n$ și unghiurile

$$PA_1A_n,\ PA_2A_1, \ldots, PA_nA_{n-1},$$

cu $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Avem:

$$\frac{PA_1}{PA_2}=\frac{\sin a_2}{\sin b_2};\ \frac{PA_2}{PA_3}=\frac{\sin a_3}{\sin b_2},\ldots,\ \frac{PA_n}{PA_1}=\frac{\sin a_1}{\sin b_n}.$$

Inmulţind aceste relaţii obţinem:

$$\sin b_1\cdot\sin b\ldots\sin b_n=\sin a_1\cdot\sin a_2\ldots\sin a_n.$$

Problema 340

Să se simplifice expresia:

$$arc\ sin\,(x-1)+arc\ tg\,\frac{2x-x^2}{x}.$$

G. Kapralov

Soluţie. Notăm $y=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{\sqrt{2x-x^2}}{x}$

$$\operatorname{tg}2y=\frac{2\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}^2y}=\frac{2\,\frac{\sqrt{2x-x^2}}{x}}{1-\frac{2x-x^2}{x^2}}=\frac{\sqrt{2x-x^2}}{x-1}$$

de unde

$$\cos 2y=x-1;$$

şi $\sin 2y=\sqrt{1-\cos^2 2y}=\sqrt{2x-x^2}$.

Deci

$$\operatorname{arc\,sin}(x-1)+2\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2x-x^2}}{x}=$$

$$=\operatorname{arc\,sin}(x-1)+\operatorname{arc\,cos}(x-1)=\frac{\pi}{2}.$$

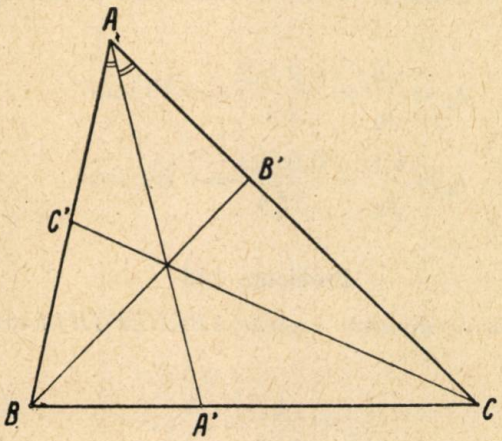
Problema 343

Dacă într'un triunghiu ABC, *bisectoarea unghiului* A, *înălţimea corespunzătoare vârfului* B *şi mediana corespunzătoare vârfului C sunt concurente atunci între elementele triunghiului avem relaţia*

$$\sin B=\operatorname{tg}A\cos C.$$

Gh. Nicoară

Soluţie. Cele trei dreapta fiind concurente, segmentele BA', A'C, B'C, AB', AC' şi BC' determinate de ele pe cele trei laturi ale triunghiului, verifică relaţia lui *Ceva*.



Cum $\overline{AC'}=\overline{BC'}$, avem:

$$\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}=1,$$

sau

$$\frac{AB}{AC}\cdot\frac{CB'}{B'A}=1. \qquad (1)$$

Avem:

$$\sin B=\frac{2S}{BC\cdot AB}=\frac{AC\cdot BB'}{AC\cdot AB};$$

de unde

$$AB=\frac{AC\cdot BB'}{BC\sin B}.$$

Inlocuind în (1) şi ţinând seamă că

$$\frac{B'C}{BC}=\cos C \quad şi \quad \frac{BB'}{B'A}=\operatorname{tg}A$$

obţinem relaţia cerută:

$$\sin B=\operatorname{tg}A\cos C$$

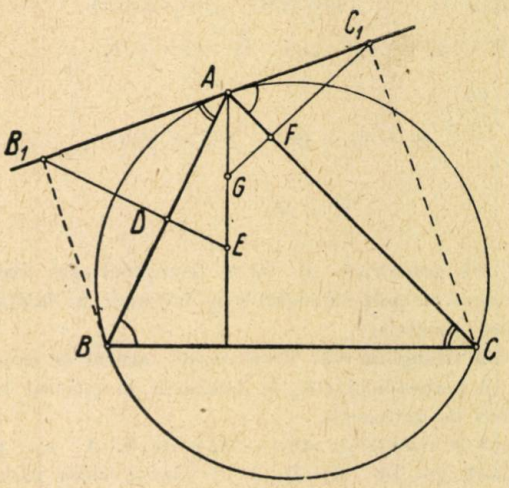
Problema 345

Se duce tangenta în A *la cercul circumscris triunghiului* ABC *şi se proiectează pe această tangentă punctele* B *şi* C, *respectiv în* B_1 *şi* C_1.

Ce condiţie trebue să îndeplinească triunghiul ABC, *pentru ca perpendiculara din* B_1 *pe* AB *şi perpendiculara din* C_1 *pe* AC *să se întâlnească pe înălţimea vârfului* A?

Gb. D. Simionescu

Soluţie. Perpendiculara din C_1 pe AC întâlneşte pe AC în F şi înălţimea în G. Se observă că $\sphericalangle C_1AC=\sphericalangle B=\dfrac{1}{2}$ măs arc AC.



Deci

$$\overline{AC_1}=\overline{AC}\cos B;\ \overline{AF}=\overline{AC_1}\cos B=\overline{AC}\cos^2 B$$

$$(1)\qquad \overline{AG}=\frac{\overline{AF}}{\sin C}=\overline{AC}\,\frac{\cos^2 B}{\sin C}.$$

Perpendiculara din B_1 pe AB tae înălțimea din A în E. La fel se arată că

$$(2) \qquad \overline{AE} = \overline{AB}\frac{\cos^2 C}{\sin B}.$$

Pentru ca cele două perpendiculare să se întâlnească pe înălțime, trebue ca $\overline{AE} = \overline{AG}$ sau

$$\overline{AC}\frac{\cos^2 B}{\sin C} = \overline{AB}\frac{\cos^2 C}{\sin B}$$

Dar

$$\frac{\overline{AC}}{\sin B} = \frac{\overline{AB}}{\sin C}, \text{ deci}$$

$$\frac{\sin B \cos^2 B}{\sin C} = \frac{\sin C \cos^2 C}{\sin B}$$

sau

$$\sin^2 B \cos^2 B = \sin^2 C \cos^2 C$$

$$\sin B \cos B = \pm \sin C \cos C$$

Inmulțind cu 2 și trecând totul într'o parte avem următoarele două posibilități:

$$(1) \quad \sin 2B - \sin 2C = 0$$

$$(2) \quad \sin 2B + \sin 2C = 0$$

Deci

$$(1') \quad \sin(B - C)\cos(B + C) = 0$$

$$(2') \quad \sin(B + C)\cos(B - C) = 0$$

Din prima rezultă:

a) $B - C = 0$ sau $B = C$ triunghiu isoscel

b) $B + C = 90°$ sau $A = 90°$ triunghiu dreptunghic

Din a doua rezultă

c) $B + C = 0$ sau $180°$ (imposibil)

d) $B - C = 90°$ sau $B = 90 + C$

trebue ca

$$B + C = 90 + 2C < 180°$$

deci

$$C < 45°.$$

Verificare geometrică. a) Dacă triunghiul este isoscel, este evident că perpendicularele se întâlnesc pe înălțime, din cauza simetriei;

b) Dacă triunghiul este dreptunghic, atunci se demonstrează că perpendicularele se întâlnesc în piciorul înălțimii, deci pe ipotenuză;

c) Dacă $B = 90 + C$, atunci tangenta în A este perpendiculară pe BC, iar B_1 și C_1 devin chiar piciorul înălțimii.

Problema 346

Intr'un lichid a cărui densitate este $0{,}8\ \frac{gr}{cm^3}$ *se afundă trei tuburi capilare. Inălțimile la care se ridică lichidul în cele trei tuburi capilare sunt* $h_1 = 6{,}2$ *mm,* $h_2 = 9{,}4$ *mm și* $h_3 = 12{,}4$ *mm. Se cunoaște diametrul primului tub* $d_1 = 1{,}8$ *mm. Să se calculeze tensiunea superficială a lichidului și razele tuburilor al doilea și al treilea.*

Al. Nedelcu

Soluție. Prin definiție tensiunea superficială T este raportul dintre forță și lungime.

Să cercetăm cazul general al urcării unui lichid în capilarul de rază r. Volumul lichidului (într'un tub cilindric), ridicat până la înălțimea h, este

$$v = \pi r^2 h,$$

iar greutatea lui, cunoscând densitatea d este

$$P = \pi r^2 h d g \text{ dyne.}$$

Greutatea cilindrului de lichid va fi echilibrată de totalitatea forțelor de tensiune superficială aplicate pe circumferința bazei cilindrului. Ținând seamă de definiția tensiunii superficiale, avem

$$(1) \quad \pi r^2 h d g = 2\pi r T. \text{ Deci } T = \frac{h r d g}{2} \text{ dyne/cm.}$$

Luând tuburi de raze diferite $r_1, r_2, \ldots, r_n$ în care un lichid se urcă la înălțimile respective $h_1, h_2, \ldots, h_n$ tensiunea superficială rămâne aceiași așadar avem rapoartele

$$\frac{h_1 r_1 d g}{2} = \frac{h_2 r_2 d g}{2} = \ldots = \frac{h_n r_n d g}{2}$$

sau

$$(2) \quad h_1 r_1 = h_2 r_2 = \ldots = h_n r_n = \text{const.}$$

Aplicație. Din formula (1) avem tensiunea superficială

$$T = \frac{9.62.8.94}{2.10^5} = 21{,}895 \text{ dyne/cm.}$$

Din relațiile (2) scoatem, cunoscând pe h_1, h_2, h_3 și r_1;

$$r_2 = \frac{r_1 h_1}{h_2} = \frac{0{,}9.6{,}2}{9{,}4} = 0{,}49 \text{ mm}$$

$$r_2 = \frac{h_1 r_1}{h_3} = \frac{0{,}9.6{,}2}{12{,}4} = 0{,}45 \text{ mm.}$$

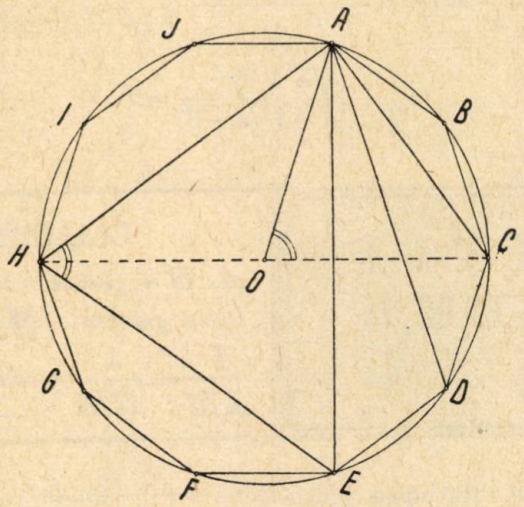
Problema 348

In orice decagon regulat ABCDEFGHIJ există relația:

$$\frac{1}{\overline{AC}^2} + \frac{1}{\overline{AD}^2} = \frac{4}{\overline{AE}^2}.$$

Ilie N. Constantinescu

Soluție. Inscriem decagonul în cercul O. Unim O cu A și cu C apoi unim H cu E și A.



Triunghiurile: OAC și HAE sunt asemenea, având $\sphericalangle H = \frac{\text{măs. arc AE}}{2}$, dar fiecare latură a decagonului subîntinde același arc, deci $\sphericalangle H$ este egal cu $\sphericalangle$ AOC care are ca măsură arc AC, și deci

$$\frac{\text{arcul AE}}{2} = \text{arcul AC}.$$

Dar cum triunghiul OAC este isoscel având $\overline{OC} = \overline{OA} = R$ și deasemenea triunghiul HEA este isoscel unghiurile A și E având aceiași măsură.

Deci unghiurile unui triunghiu sunt respectiv egale unghiurilor celuilalt.

Scriem proporționalitatea laturilor și avem: $\frac{\overline{OA}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}}$ sau $\frac{R}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}}$ (fiindcă coardele AH și AD sunt egale).

Sau: $\frac{R}{AC \cdot AD} = \frac{1}{AE}$ înmulțim cu 2 și avem:

$$\frac{2R}{AC \cdot AD} = \frac{2}{AE}.$$

Se observă că C și H sunt diametral opuse, iar AH = AD deci

$$2R = \sqrt{\overline{AH}^2 + \overline{AC}^2} = \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{AC}^2}.$$

Inlocuind avem:

$$\frac{\sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{AC}^2}}{AC \cdot AD} = \frac{2}{AE}$$

ridicând la patrat obținem:

$$\frac{1}{\overline{AC}^2} + \frac{1}{\overline{AD}^2} = \frac{4}{\overline{AE}^2}.$$

Problema 353

Să se arate în baza cărui sistem de numerație este justă relația:

$$125 \times 23 = 2886.$$

Valerian Gh. Grabari
elev, Călărași

Soluție. Intr'un sistem de numerație cu baza b un număr N se scrie:

$$N_b = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \ldots + a_1 b + a_0$$

unde a_n, $a_{n-1}, \ldots, a_1$ și a_0 sunt numere întregi pozitive mai mici decât b.

In cazul problemei avem:

$$(b^2 + 2b + 5)(2b + 3) = 2b^3 + 8b^2 + 8b + 6$$

de unde obținem ecuația:

$$b^2 - 8b - 9 = 0$$

$$b = 4 \pm 5.$$

Intrucât b este pozitiv, soluția ecuației care convine problemei este $b = 9$.

Problema 354

Să se arate expresia $E = 7^{4n+1} + 7 \cdot 6^n + 21$ *se divide cu 35, oricare ar fi n întreg pozitiv.*

S. Fissgus
student

Soluție. Expresia se mai poate scrie succesiv

$$E = 7^{4n+1} + 7 \cdot 6^n + 21 = 7(7^{4n} + 6^n + 3) =$$

$$= 7(49^{2n} + 6^n + 3) = 7(50 - 1)^{2n} + (5+1)^n + 3 =$$

$$= 7(M50 + 1 + M5 + 1 + 5 - 2) = 7 \cdot M5,$$

deci expresia se divide cu $7 \cdot 5 = 35$.

Problema 358

Să se demonstreze că dacă laturile unui triunghi se exprimă prin trei numere consecutive, atunci între razele cercului circumscris și a celui înscris, există relația:

$$R = 2r + \frac{1}{2r}.$$

C. Agrinschi
(Moscova)

Soluție. Calculăm raza R prin formula:

$$R = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

unde în cazul de față, $b = a + 1$, $c = a + 2$.

Obținem:

$$R = \frac{a(a+2)}{\sqrt{3(a-1)(a+3)}}.$$

Prin formula

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

calculăm pe r și avem:

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a-1)(a+3)}{3}}.$$

Prin urmare:

$$2r + \frac{1}{2r} = \sqrt{\frac{(a-1)(a+3)}{3}} + \sqrt{\frac{3}{(a-1)(a+3)}} =$$

$$= \frac{a(a+2)}{\sqrt{3(a-1)(a+3)}} = \mathrm{R}.$$

Exerciții

Demonstrați

$$\left(\frac{125}{64}\right)^{10} < 1000$$

EXERCIȚII ȘI PROBLEME PROPUSE

Probleme

A, B = puncte fixe;
Locul geometric M?

$$\frac{1}{AM} - \frac{1}{BM} = \text{const.}$$

585. Excursioniștii de pe un vapor în număr de 32, au ocupat cele 8 cabine a câte 4 locuri. În câte feluri se pot plasa toți acești excursioniști în cabine?

E. Streleţchin (Grodno)

586. Un număr multiplu de 35, într'un alt sistem de numerație cu baza de două cifre se scrie 1234.

Cum se scrie acest număr în baza zece?

L. Lopovoc (Proscurov)

587. In hotărîrile Consiliului de Miniștri din URSS, privind marile construcții ale comunismului, se dau următoarele date asupra stațiunilor hidroelectrice: cea din Cuibâșev va avea o putere de 2000000 KW; cea dela Stalingrad 1700000 KW; cea dela Canalul Principal Turcmen de 100000 KW, iar Stațiunea dela Cahovca de 250000 KW și cea dela Ţimliansk de 160000 KW. Să se determine ce cantitate de huilă ar fi necesară în 24 ore pentru a fi arsă în cazanele unor termocentrale de aceleași puteri utile, știind că randamentul turbinelor cu aburi este de 25%, iar cărbunii produc 7000 cal/kgr.

F. v. Şc.

588. Un triunghiu ABC are vârfurile B și C fixe, iar vârful A variază în așa fel încât înălțimea dusă din C este egală cu latura AB.

Se cere locul geometric al vârfului A.

Emil Morţun

589. Ridicând pe 11 succesiv la puterea a doua, a treia, a patra, etc., observăm că de fiecare dată căpătăm un număr de cifre care depășește cu o unitate exponentul lui 11.

Care este prima putere pentru care această regulă nu mai este valabilă?

Gh. D. Simionescu

590. Stațiunea hidroelectrică dela Cuibâșev va fi înzestrată cu turbinele cele mai puternice din lume. In fiecare secundă vor trece prin roata turbinei 700 m^3 apă la presiunea coloanei de apă de 25 m înălțime. Știind că randamentul mecanismului turbinei este 0,9 să se calculeze forța utilă a turbinei.

C. d. P.

591. Fie ABCDE un pentagon înscris într'un cerc, astfel că AB = BC. Notăm cu I intersecția diagonalelor AD, BE și cu J intersecția diagonalelor BD, EC. Să se arate că IJ este paralelă cu AC.

N. N. Mihăileanu

592. Ce fel de ochelari sunt necesari pentru un miop, pentru care distanța vederii distincte este $b' = 10$ cm, știind că distanța vederii distincte normală este $b = 25$ cm.

C. d. P.

593. Să se descompună în factori expresia

$$E = 4(x^2 + ax + a^2)^3 - 27\,a^2x^2(x+a)^2$$

Marius V. Iosifescu
elev, Pitești

594. De ce se observă într'o oglindă obișnuită în afară de imaginea principală încă câteva imagini mai slabe?

Fenomenul se poate observa foarte ușor privind imaginea unei lumânări sub un unghiu mic față de suprafața oglinzii.

C. d. P.

595. O eprubetă se umple cu apă și se introduce cu capătul deschis într'un pahar plin de asemenea cu apă. Apa din pahar și din eprubetă se încălzește treptat până la 100° C.

Ce fenomene se vor produce în eprubetă?

C. d. P.

596. Să se construiască geometric rădăcinile sistemului

$$x^2 + y^2 = k^2$$
$$\frac{x-a}{y-b} = \frac{m}{n}$$

unde numerele a, b, m, n, k sunt date.

N. Agiu

597. Se dă triunghiul isoscel ABC ($\overline{AB} = \overline{AC}$) și fie M un punct mobil pe latura BC. Cercurile AMB, AMC intersectează laturile AC, AB, a doua oară, în punctele B_1, C_1.

Să se arate că suma segmentelor $\overline{BC_1}$, $\overline{CB_1}$ este constantă.

Cezar Coșniță

598. Două pendule electrice electrizate pozitiv sunt așezate la oarecare distanță între ele și dau o repulsie egală cu unitatea. Apropiem pendulele până se ating și apoi le depărtăm la o distanță egală cu jumătate din distanța inițială și se obține o repulsie egală cu 4,5 unități.

Se cere raportul sarcinilor pozitive, m și m' a celor două pendule.

I. Munteanu
elev, Cluj

599. Se consideră o oglindă sferică concavă de rază r, plină cu un lichid astfel încât distanța de la suprafața lichidului la centrul sferei să fie egală cu $\frac{r}{4}$.

Din mijlocul A al unei raze paralele cu suprafața lichidului, pornește o rază luminoasă care face cu apa un unghiu de 45°. Să se calculeze unghiul pe care îl face raza emergentă cu cea reflectată. $\left(\text{Se consideră indicele de refracție } K = \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Anastasiu Dinu
elev, București

600. Un înnotător, străbate cursul unei ape curgătoare cu viteza v_m/sec., în felul următor:

a) Dela mal pornește perpendicular pe direcția curentului de apă cu aceeași viteză cu râul.

b) In mijlocul râului își dă seama că e mai bine să meargă făcând cu direcția de curgere a apei un unghiu de 60°. (Râul are lățimea de 26 m.)

Ajunge astfel la celălalt mal, parcurgând în linie dreaptă x metri. Se cere timpul întrebuințat dela mal până la mijlocul râului, timpul întrebuințat dela mijlocul râului la celălalt mal și distanța x.

N. Gaiu

601. Fie A'B'C' triunghiul ortic al triunghiului ABC. Se cere să se construiască triunghiul ABC cunoscând $\sphericalangle$ A, latura $A'B' = l$ și suma $B'C' + A'B' = m$.

Florica Ionescu

602. Fie un patrat ABCD cu latura a și N un punct oarecare pe latura CB. Dreapta AN intersectează prelungirea laturii DC în M. Să se determine distanța CN, astfel ca $MN = b$.

S. Fissgus
Student, Petroșani

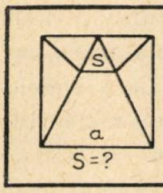
603. Se duce înălțimea AD în triunghiul dreptunghic ABC (drept în A). Paralela din D la AC taie pe AB în E și paralela din A la BC taie pe DE în F. Să se stabilească relația $tg\ (EBF) = tg^3\ (ACB)$.

C. Ionescu-Țiu

604. Intr'un patrulater inscriptibil cu unghiurile diferite avem relația

$$tg\ A\ tg\ B\ tg\ C + tg\ B\ tg\ C\ tg\ D + tg\ C\ tg\ D\ tg\ A + tg\ D\ tg\ A\ tg\ B = 0$$

Paul Voiculescu
elev, Slatina



EXERCIȚII PROPUSE PENTRU INVĂȚĂMÂNTUL ELEMENTAR

E. 174. Clubul unei uzine are o sală de lectură și una de șah. Intr'o seară se aflau în ambele săli un număr de muncitori. Zece muncitori din sala de șah, terminând partida, intră în sala de lectură și astfel numărul celor din această sală devine de trei ori numărul celor rămași în sala de șah. Cei 10 șahiști, alegându-și câte un partener nou din sală de lectură, se reîntorc cu ei în sala de șah. Numărul muncitorilor devine același în fiecare sală.

Să se afle numărul total de muncitori din club pe cale aritmetică și apoi pe cale algebrică.

A. N.

E. 175. Să se efectueze calculele

$$\frac{\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{4}+5\frac{5}{6}\right):2\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}\times 2\frac{4}{3}-0{,}25\times 2\frac{1}{6}\times\left(\frac{25}{4}-0{,}25\right)}$$

A. N.

E. 176. Să se verifice că

$(acx-a^2y+c^2z-act)(bdx-b^2y+d^2z-bdt)+$
$-(adx-aby+cdz-bct)(bcx-aby+cdz-adt)=$
$=(ad-bc)^2(xt-yz).$

N. M.

E. 177. O construcție dreptunghiulară are acoperișul format din două triunghiuri isoscele și două trapeze isoscele și toate egal înclinate față de planul orizontal. Dreptunghiul având dimensiunile de 15 metri și 6 metri; iar suprafața acoperișului fiind 120 metri patrați, să se afle înălțimea trapezului și a acoperișului.

C. I. Ț.

E. 178. Pe o grindă orizontală rezemată simplu în A și B este așezată o forță de 1100 kg la 2 metri de reazemul A. Știind că reazemului A îi revine o apăsare de 700 kg, se cere lungimea grinzii.

C. I. Ț.

E. 179. Se dă o axă xy și două puncte A și B. Să se găsească pe axa xy un punct P astfel că $\sphericalangle APx = \sphericalangle BPy$.

Să se cerceteze problema când punctele A și B sunt de aceiași parte a axei, de o parte și de alta sau pe o perpendiculară la axă.

Dinu I. Schileru
elev, București

E. 180. Să se construiască un triunghiu echilateral a cărui suprafață să fie egală cu suma suprafețelor a două triunghiuri echilaterale date.

Tăutu Dana
elevă, București

E. 181. La un ceas de buzunar lungimile acelor care arată orele, minutele și secundele sunt respectiv: $l_1 = 14$ mm, $l_2 = 18$ mm și $l_1 = 6$ mm. Să se calcuze raportul vitezelor vârfurilor acelor.

C. d. P.

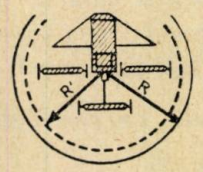
E. 182. Rezistența unui cuptor electric pentru extragerea aluminiului este de 0,00085 ohmi, tensiunea este 7,3 volți. Să se afle intensitatea curentului și numărul de kilovați-ore ce se consumă într'o oră.

C. d. P.

E. 183. Se construește într'un plan o spirală din sârmă de raza $r = 1$ mm. Lungimea sârmei este L = 10 metri; iar raza primului cerc al spirei este R = 7 cm. Să se calculeze numărul total de înfășurări alăturate formate de întreaga sârmă.

Mircea D. Constantinescu
elev, București

NOUTĂȚI DIN ȘTIINȚA ȘI TEHNICA SOVIETICĂ



Propagarea sunetului în apă la distanțe mari

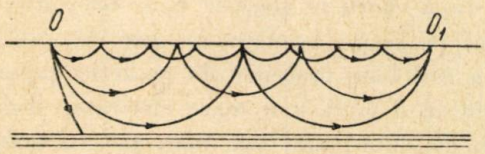
Savanții sovietici L. D. Rozenberg și L. M. Brehovschi au descoperit și au cercetat un fenomen interesant — propagarea ultraîndepărtată a sunetului în basine cu ape adânci. Acest fenomen este legat de refracția undelor. După cum se știe, refracția apare în cazurile când undele trec într'un mediu în care viteza lor este alta. Acest lucru se petrece în bazine adânci unde vitesa sunetului crește cu adâncimea aproximativ cu 1,8 m pe secundă de fiecare 100 m adâncime. Variația vitesei sunetului cu creșterea adâncimei se explică prin faptul că straturile de jos ale apei au o densitate mai mare, fiind comprimate de presiunea hidrostatică a straturilor situate mai sus.

Unda sonoră dela izvorul sunetului, care se află la suprafața apei, trece prin straturile de densitate diferită, se întoarce înapoi la suprafață, descriind o curbă având o rază cu atât mai mare, cu cât este mai verticală direcția inițială a undei. (fig. 1). Undele, care pătrund la o adâncime mai mare ajung până la fund și sunt absorbite de el. Când unda sonoră ajunge dela fund la suprafață, ea suferă o reflexie totală și descrie din nou un drum în formă de arc de curbă în straturile de sus ale apei.

Calculele teoretice și observațiile arată că în stratul de sus al apei se formează cea mai mare concentrare a energiei. Astfel, sunetul se propagă mai mult în acest strat, ceeace îi permite să parcurgă

o distanţă destul de mare. L. D. Rozenberg a reuşit să descopere semnalul sonor la o distanţă de 560 km dela izvorul sunetului, iar tăria acestui semnal a fost mult mai sus decât nivelul obstacolelor şi s'a văzut că această distanţă nu prezintă vreo limită.

Cu astfel de propagare a sunetelor în apă, caracterul lor se schimbă considerabil. Semnalul sonor sacadat va fi recepţionat la staţia de recepţie ca fiind de lungă durată. Aceasta se explică prin faptul că dela punctul O până la O_1 (fig. 1) energia ajunge



prin diferite căi, descriind numeroase arce mici sau un număr mai mic de arce cu o rază mare. Lungimea acestor căi nu este la fel, fapt care dă naştere unui fenomen asemănător cu bubuitul tunetului în timpul furtunei. In urma intervenţiilor undelor sonore în apă, se formează regiuni de densitate scăzută şi mărită a energiei, care sunt aşezate în mod concentric în jurul izvorului sonor.

Microroentgenografia electronică

Savantul sovietic A. C. Trapeznicov a elaborat metoda microroentgenografiei electronice.

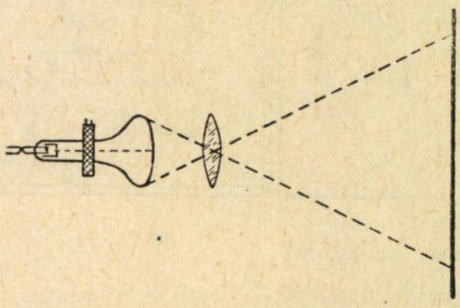
Pentru obţinerea microroentgenogramei a unui obiect, acesta se pune în contact direct cu stratul sensibil la lumină a peliculei fotografice sau plăcii. Razele Roentgen, trec mai întâi prin peliculă şi cad apoi pe obiect. Din această cauză, sub acţiunea fascicolului de raze Roentgen, electronii ies afară din obiect şi acţionează asupra peliculei dând microroentgenograma obiectului. Ulterior, ea poate fi mărită. Prin folosirea peliculelor de cinematograf dispozitive, razele dure Roentgen nu acţionează direct asupra stratului sensibil la lumină iar fotoelectronii care ies din obiect o «luminează». Printr'o astfel de metodă, V. I. Feoctistov obţinea fotografiile diferitelor minerale şlefuite. Afară de aceasta el obţinea fotografii şi prin folosirea unei metode întrucâtva modificată. Fascicolul de raze Roentgen se îndreaptă pe o placă de plumb, din care ieşeau electronii. Aceştia din urmă treceau prin obiectul care se fotografia pe pelicula fotografică.

Microroentgenografia electronică are o mare importanţă ştiinţifică.

Noua metodă de proiecţie a transmisiunilor de televiziune pe un ecran mare

După cum se ştie imaginea, care se obţine pe ecran printr'un televizor obişnuit, este destul de mică. Ea este determinată de dimensiunile fundului *electrono-radial*, adaptat la diferite modele ale televizorului. Dificultăţile de natură tehnică de a executa tuburi electrono-radiale mari, precum şi diferite consideraţiuni radiotehnice, limitează diametrul ecranului (socotind după diagonală) la aproximativ 40—50 cm.

Dacă este nevoie ca imaginea care se transmite să fie văzută de un mare număr de spectatori, trebue să se recurgă la diferite feluri de metode de proiectare a imaginei, care se obţine în tub, pentru un ecran mare. Unul din procedeele care se aplică în acest scop, este următorul: înaintea tubului receptor se pune un obiect cu lumină puternică, care proiectează imaginea, ce se obţine pe fundul tubului, pe ecran, mărind imaginea de *n* ori (fig. 2). Atunci,

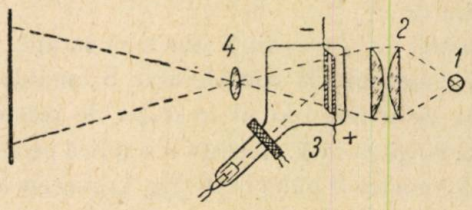


natural, că claritatea imaginei este micşorată deasemenea de *n* ori şi pentru ca aceasta să fie suficientă pentru recepţie, trebue să se mărească mult energia razei de distribuire din tub, adică să se mărească claritatea imaginei obţinute. Acest lucru este legat de o mulţime de dificultăţi tehnice şi de exploatare. Un bombardament prea puternic a suprafeţei luminoforului de mănunchi de electroni duce la distrugerea repede a ei. Dacă se întâmplă vreo inexactitate în dispozitivul în funcţiune şi dacă se opreşte raza care luminează, un astfel de mănunchi nu numai că distruge stratul luminoforului, dar şi sticla, iar tubul iese din rând. Afară de aceasta cu luminofoarele care există în prezent, nu se poate obţine o claritate mare a iluminării, în urma cărui fapt, numărul care arată gradul de mărire a imaginei (după suprafaţă), care depinde de claritatea posibilă de iluminare a tubului, nu este prea mare.

Principalul procedeu nou de proiectarea transmisiunilor de televiziune pe un ecran mare, este propus de savantul sovietic acad. A. A. Cernâşev. Acest procedeu a fost denumit supapă de lumină. El este bazat pe faptul că cristalele transparente a

unor anumite săruri de metale alacaline, fiind supus bombardamentului de electroni, se colorează în diferite colori, nelăsând să treacă razele de lumină, în aceeași măsură, ca înainte de bombardament. Prin aplicarea câmpului electric asupra plăcii transparența ei se restabilește.

Schema ei din variantele posibile a proiecției de supapă de lumină este dată în fig. 3. Înăuntrul tubului receptiv este așezată placa 3, care servește ca « supapă de lumină ». Din amândouă părțile ea este acoperită de foițe subțiri de metal, care nu reține prea mult razele de lumină, dar care dau posibili tatea de a aplica pe placă la momentul oportun o tensiune care s'o facă transparentă. Raza electronică, ca deobicei, parcurge placa și desemnează pe ea imaginea cadranului, iar această imagine se obține colorată. Cu ajutorul izvorului de lumină și a unui sistem optic obișnuit, format din condesatorul 2 și obiectivul 4, imaginea este proiectată pe ecran. După transmisiunea fiecărui cadru când raza electronică parcurge întregul ecran, tensiunea trece pe pelicule de metal și toată imaginea este « ștearsă ». Intreg procesul se repetă din nou, ca-



dru după cadru se succede și se transmite de 25 de ori pe secundă imaginea care se proectează.

Un astfel de procedeu de proecție permite să se obțină o mult mai mare claritate, deci și un ecran de dimensiuni mai mari pentru televizorul de grupe.

$x = 1 + \frac{1}{x}$

PAGINA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

(Urmare din Nr. 5)

PREDEAL. Clasa IX-a. Budin I. Constntin (263, 264, 268, 274, 280, 312, 315, 324, 333, 346, 351, 357, 363, 364, 365, 369, 375, 376, 383, 392, 484, 485, 486), Bogdan Aurel (268, 296, 322, 363, 501, E: 109, 114), Friedman Sorin (268, 274, 490, E: 70, 91, 143, 147, 148), Hustiuc Nicolae (264, 268, 274, 296, 365, 518, 522, 525, E: 109, 114), Mușat Vasile (263, 264, 268, 274, 294, 290, 508, 518, 522, E: 109, 114), Pricâ Gh. Constantin (263, 264, 265, 296, 298, 305, 307,312, 315, 329, 346, 369, 372, 376, 383, 386, 393, 424, 482, 484, 485, E: 53, 70, 72, 82, 137, 148), Pricâ M. Constantin (264, 268, 274, 280, 296, 363, 484, 485, 490, 520, 525, E: 49, 54, 82, 109), Pupăzan V. Nicolae (264, 268, 274, 280, 312, 315, 333, 351, 363, 369, 371, 449, 459, 465, 484, 490, E: 51, 70, 72, 82, 86, 90, 91, 92, 99, 113, 114), Racoți Eugen (264, 269, 274, 280, 296, 484, 485, E: 54, 82, 109, 114), Rusu Traian (315, 324, 362, 363, 371, 375), Săsărman A. Ioan (264, 268, 329, 346, 351, 375, 376, 377, 485, 490). Uță Marin (264, 268, 280, 315, 333, 346, 364, 365, 369, 383, 484, 486, 497, E: 56 142, 150).

RĂDĂUȚI. Clasa XI-a Chelba Constantin (321, 329, 346, 365, 403, 404, 410, 415), Lazăr, M. (264, 270, 290, 263, 386, 372, 375, 410, 434, 484, E: 79, 82, 91, 92, 107, 120, 121, 130, 137, 147, 148, 149, Clasa XI-a: Lupu Vasile (343, 375, 404, 408, 461, 490, 499, 512, 516, 518, 521).

ROMAN. Clasa X A. Lazăr A. Joianu (241, 245, 246, 255, 256, 259, 271, 278, 283, 293, 295, 296, 300, 303, 313, 317, 321, 324, 325, 333, 340, 351, 365, 371, 413, 426, 428, 429, 433, 436, 437, 440, 449, 456, 458, 461, 466, 468, 471, 474, 480, 481, 482, 483, 484, 485, 486, 487, 488, 489), Vulpe Ioan (245, 246, 255, 269, 270, 271, 308, 313, 317, 367, 390, 468). Clasa XI-a Buga I. Ioan (279, 333, 339, 346, 348, 375, 383, 386, 387, 388, 404, 426, 432, 434, 435, 437, 443, 454, 461, 466. 476, 482, 486, 487, 488, 499), Ciobanu Constantin (242, 264, 269, 270, 307, 310, 341, 342, 349, 352, 533, 358, 367, 369, 371, 416, 449, 466), Dembivschi Dan (501, 504, 505, 506, 507, 510).

ROȘIORII DE VEDE. Clasa IX B. Miclăuș Vasile (242 245, 246, 255, 263, 269, 278, 280, 283, 285, 294, 297, 298, 299, 301, 306, 307, 308, 322, 328, 336, 348, 351, 354, 363, 364, 369, 370, 372).

SIGHET- Clasa X-a. Botizan Petru (374, 416, 439, 442 484, 508, 512, 517).

SLATINA. Clasa X A. Gora Dorin (245, 246, 269, 270, 276, 287, 290, 297, 300, 306, 307, 313, 317, 232, 333, 340, 367, 369, 371, 386, 388, 392, 456, 466, 471, 488), Mișcă Petre 297, 300, 306, 313, 349, 388, 437, 445, 456, 480), Clasa XI-a Oprea Nicu (257, 268, 356, 376, 380, 382, 386, 394, 417, 433, 444, 446, 448, 449, 451, 454, 455, 458, 459, 463, 466), Stroe R. Dumitru (344, 358, 359, 363, 365, 369, 374, 448, 459, 466), Vasile Andrei (291, 333, 335, 356, 384, 387, 400, 401, 404, 405, 407).

TÂRGU-JIU. Clasa VII-a: Cosinschi Dragoș (369, 517, E: 79, 132, 136, 139, 149), Clasa XI-a: Corban Lică (358, 365, 367, 368, 369, 502, 506), Stegăroiu I. Grigore (255, 290, 297, 298, 307, 313, 316, 317, 323, 325, 345, 451, 358, 367, 369, 371, 375, 377, 379, 385, 386, 390, 392, 404, 429, 432, 443, 448 458, 466, 502, 505).

TIMIȘOARA. Clasa V-a (Margina) Ivașcu Ionel (E: 62, 66, 86, 104, 124), Clasa IX: Molnar Andrei (290, 307, 363, 369, 401, 437, 443), Clasa X B. Freud Petru (388, 443, 461,

466, 501), Clasa XI-a: Biro Erica (429, 436, 437, 441, 443), Munteanu Hortensia (379, 404, 419, 432, 433, 436, 440, 441, 443, 445, 466), Szakmarky Elena (279, 317, 369, 386, 388, 392, 404, 436, 441, 466, 488).

TURDA. Clasa XI-a: Șabău V. Mircea (264 V.Mircea (254, 279, 295, 331, 374, 386, 416, 434, 438, 461, 468, 473, 476, 493, 496), Mitrache Marin (290, 307, 416, 476, 501, 505, 507, 508), Rădulescu Marin (269, 270, 271, 278, 290, 297, 298, 299, 306, 307, 315, 317, 335, 348, 351, 354, 369, 375, 383, 386, 388, 389, 392, 404, 416), Voiculescu Paul (280, 353, 358, 359, 370, 374, 383, 406, 415).

TÂRGOVIȘTE. Clasa VII-a. Oprea Aureliu (E: 9, 10, 15, 20, 33, 43, 51, 52, 55), Școala Tehnică de Petrol. Anul II. Drăgan T. Gheorghe (354, 426, 427, 428, 443, 444, 445, 457, 459, 468, 503, 506, 508, P). Anul IV. Toma N. Nicolae (410, 415, 429, 440, 443, 445, 456, 458, 466, 468). Clasa IX liceu. Petrescu I. Constantin (449, 459, 501, 508, 509, 518, 525), Clasa X-a: Bălcescu Gr. Eftimie (269, 270, 301, 306, 321, 349, 351, 364, 410, 432, 466, 484, 514), Andreescu Constantin (245, 251, 269, 270, 303, 371, 387, 432, 440, 501, 514, 522, 525), Oprea A. Constantin (269, 270, 290, 300, 307, 317, 323, 348, 349, 351, 354, 368, 372). Clasa XI-a: Marica A. Marcel (375, 379, 389, 392, 429, 432, 433, 443, 448, 449, 456, 458, 459, 403, 466), Milcescu Alexndru (371, 375, 379, 383, 426, 446, 448, 454, 466), Plămădeală T. Silvia (386, 415, 432, (440, 506, P). Clasa XI-a. Voicu Horea (242, 324, 325, 336, 353, 377, 386, 387, 392, 394, 417, 434, 438, 454, 438, 454, 506).

TURNU MĂGURELE. Clasa X-a: Găină F. Stelian (453, 464, 465, 466, 468, 517), Clasa XI-a: Mihăescu I. Alexandru (296, 325, 350, 368, 383, 394, 403, 434, 439, 440 449, 458, 460, 468, 474, 477, 491, 497, 501, 503, 504, 505, 506, 512, 513, 515, 516, 518, 520, 521, 522, 255), Raicu M. Alexandru (285, 306, 323, 333, 350, 354, 368, 371, 375, 389, 392, 394, 403, 408, 415, 426, 432, 448, 454, 458, 461, 465, 474, 477, 481, 501, 504, 506, 512, 514, 516, 522, 525).

TURNU SEVERIN. Clasa IX B. Păunescu Ion (358, 422, 501, 518, 525, E: 147). Clasa X-a Constantin Constanțiu (454, 455, 461, 468, 480), Racoveanu Constantin (323, 349, 354, 386, 389,409, 432,439, 441, 443, 448, 480, 487, 501, 503), Zaharescu Marius (358, 406, 432, 501, 518, P).

TULCEA. Clasa XI-a Toma Temistocle (270, 278, 289, 307, 367, 439, 446).

VASLUI. Clasa XI-a. Apostu Mircea (279, 369, 429, 458, E: 109), Ardeleanu Eduard (328, 329, 392, 407, 413, 459, E: 109, 119, 120, 121, 122), Benchea Adrian (512, 516, 517, 521, P, E: 119), Cărare Paul (368, 369, 374, 375, 379, 386, 387, 389 407, 413), Coman Marcel (268, 407, 410, 413, 437, 441, 457), Didilescu Sergiu (268, 368, 382, 392, 407, 413, 459, 466, P), Vasilache Adrian (323, 353, 354, 369, 371, 374, 448).

S'au evidențiat prin rezolvări de probleme din Revista Matematică și Fizică, primite în cursul lunii Aprilie 1952:

Ionescu Gh. Dobre (Craiova); *Popescu Milița* (Craiova); *Goia L. Miron* (Arad); *Miclăuș Vasile* (Roșiorii de Vede); *Brozici Florin, Papina St. Radu, Bârliga H. Ioan, Dumitrescu Sergiu, Serbu C. Mircea* și *Bunea I. Ștefan* (elevi clasa XI-a, Ploești); *Gafițeanu Mihai* (clasa X-a, Iași); *Bărbulescu T. Alexandru* Anul II S.M.T.M., Pitești); *Cigan Leontin* (Carei) și *Miculescu R. Caius* (clasa XI-a L. b. 7, București).

In cursul lunii Aprilie 1952 am primit soluții bune la cel puțin 5 probleme sau probleme propuse (P), note (N), articole (A), dela următorii:

ALEXANDRIA. Clasa X-a. Gâdea Constatin (512, 513, 518, 520, 522, 525), Clasa XI-B. Atanasiu Jean (306, 369, 505, 520, 525).

ARAD. Clasa XI-A. Ardeleanu Traian (263, 264, 278, 289, 298, 305, 317, 234, 348, 367, 369, 371, 416, 450, 458, 459, 461), Goia L. Miron (234, 260, 283, 296, 301, 318, 327, 344, 346, 350, 361, 365, 376, 390, 400, 413, 414, 416, 418, 420, 430, 431, 449, 458, 461, 463, 470, 471, 480, 481, 483, 484, 488, 489, 490). Școala Pedagogică. Anul IV. Stanca I. Teodor (297, 298, 303, 306, 314, 328, 358, 363, 367, 371, 374, 375, 386, 406, 427, 428, 456, 481, 497, 499, P).

BACĂU. Clasa IX-a. Cașcaval Gheorghe (346, 422, 459, 518, 522, 525), Ilicea Constantin (422, 505, 508, 517, 518, 522), Tofan Ion (458, 459, 502, 505, 507, 508, 517, 518, 522, 525).

BAIA MARE. Couți Romeo (505, 518, E: 42, 44, 49, 50, 51, 54, 69, 77, 78, 93, 95, 99, 100, 105, 109, 112, 132, 148), Nig Ștefan (501, 503, 508, E: 50, 51), Clasa XI-a Cadar Ioan (242, 383, 404, 505, 506, 508, 518). Școala medie tehnică Chimică. Toth Ștefan (501, 503, 517, 525, E: 50).

BÂRLAD. Clasa XI-a. Condrea Nelu (323, 367, 431, 448, 482, 501, 503, 505, 518, 520), Șușnea Cezar (501, 503, 508, 514, 517, 518, 520).

BISTRIȚA. Verveagă T. (512, 513, 514, 515, 517, 518, 520, 522).

BRĂNEȘTI (Prahova). Bucur D. Gh. (E: 116, 125, 131, 136, 151, 153).

BUCUREȘTI. Liceul 1 fete. Clasa VIII-a A. Belgrader Mariana (533, 536, 537, E: 166, 124, 125, 135, 137, 138, 147, 156, 157, 160). Cruceanu Viorica (536, 537, E: 147, 155, 156, 157, 163) Centrul școlar 2, 10 13, fete. Clasa VIII-a. Petrică I. Zamfira (518, 520, 517, E: 104, 106). Școala medie Statistică. Bâlu Vasile (505, 518, 520, 522, 523), Popescu Constantin (E: 104, 106, 109, 143), Tănase Dumitru (505, 515, 518, 520, 523, 524), Tudorache V. Ion (E: 109, 150, 151, 152, 153). Liceul 7 băieți. Clasa XI-a. Miculescu R. Caius (426, 429, 430, 432, 436, 439, 440, 441, 443, 445, 446, 449, 450, 454, 455, 456, 457, 459, 460, 465, 465, 466, 468).

BUZĂU. Clasa IX-a. Badea N. Alex. (271, 276, 329, 367, 371, 406, P), Popa C, Vasile (443, 445, 481, 518, 520, 525).

CĂLĂRAȘI. Clasa IX-a: Buleașcă Ion (497, 501, 510, 515, 517, 518, 523, 525).

CÂMPINA. Clasa X-a: Antonescu C. Mihail (501, 503, 515, 517, 522, 525), Jantea N. Gheorghe (269, 317, 386, 432, 488, 499), Neagu Gh. Vasile (474, 499, 516, 517, 518).

CÂMPULUNG (Muscel). Chinea Constantin (290, 307, 369, 386, 404, 506, 518).

CARACAL. Popa D. N. (367, 369, 484, 491, 517, 518).

CAREI. Clasa XI-a. B. Cigan Leontin (255, 278, 296, 298, 299, 301, 305, 315, 321, 328, 459, 473, 499, 501, 502, 503, 504, 505, 506, 507, 508, 509, 514, 517, 518, P).

CLUJ. Clasa XI-a. Damaschin Sergiu (343, 351, 378, 383, 514), Pătruțescu Mihai (269, 272, 307, 322, 375, 404, 407, 480, 516, 517), Tănase F. Cocoș (501, 503, 509, 512, 515, 516, 517, 518, 525).

CONSTANȚA. Școala hidrotehnică. Anul II C. Satrapel Tașcu (512, 513, 514, 516, 517, 518, 520, 521, 522, 525). Anul III. Bujețelu Constantin (501, 503, 506, 508, 512, 514, 517, 522, 525), Muedin M. Sureia (512, 513, 514, 515, 516, 517, 518, 519, 520, 521, 523, 525).

CRAIOVA. Clasa VII-a. Popescu Milița (E: 49, 51, 53, 59, 60, 68, 70, 77, 80, 81, 82, 85, 95, 99, 109, 112, 113, 121, 122, 127, 130, 132, 137, 138, 145, 146, 147, 148, 149).

Clasa X-a. Vrejoiu Constatin (296, 297, 298, 400, 437, 484, 507, 508, 514, 518, 519). Clasa XI-a. Dobre Gheorghe (242, 264, 323, 324, 389, 518), Ionescu Gh. Dobre (310, 311, 312, 313, 314, 316, 317, 318, 321, 322, 323, 324, 325, 326, 327, 328, 329, 331, 333, 335, 336, 337, 341, 342, 343, 345, 346, 347, 348, 349, 351, 352, 353, 354, 358, 359, 361, 363, 364, 365, 367, 368, 369, 371, 372, 374, 375, 376, 377, 379, 380, 382, 383, 384, 386, 387, 388, 389, 390, 392, 398, 400, 401, 403, 404, 405, 406, 407, 410, 414, 415, 416, 419, 420).

GALAŢI. Clasa IX-a. Firişteanu Dorel. (290, 348. 351 427, 435, 437, 458, 497, 505).

GIURGIU. Clasa X-a: Angelescu Dan (346, 512, 514, 517, 518), Vişan Dumitru (512, 516, 517, E: 50, 51).

HUŞI. Clasa X-a: Bohosievici Cazimir (404, 416, 443, 488, 497, 517, 518).

IAŞI. Clasa IX-a: Ciobanu Maria (518, E: 142, 145, 147, 148, 149), Gruia Ojog (E: 104, 107, 114, 124, 125). Clasa X-a. Gafiţeanu Mihail (336, 377, 379, 386, 388, 477, 493, 496, 497, 499, 501, 503, 505, 506, 508, 509, 512, 513, 514, 516, 517, 518, 521, 523, 525). Şcoala medie textile. Anul II A. Domb Betty (503, 506, 514, 517, 518, 520), Margulis Reghina (503, 506, 514, 516, 517, 520). Şcoala Pedagogică. Anul I. Cogean Virgil (E: 109, 136, 137, 139, 153), Anul II: Baciu Traian (E: 75, 135, 137, 138, 139), Curcă I. Gh. (374, 386, 479, E: 108, 136, 142), Ioniţă I. Ion (E: 142, 144, 149, 150, 151, 153), Iordăchescu Aurel (448, E: 109, 132, 137, 139), Onişoru Dumitru (E: 114, 132, 135, 137, 153). Anul III. Moroşanu M. (374, 386, 448, E: 108).

IBĂNEŞTI (Reghin, Mureş). Clasa IV-a. Sasu I. Emil (E: 50, 51, 140, 142, 150).

MEDIAŞ. Clasa XI-a. Oswald Gemot (270, 292, 297, 298, 305, 329, 335, 337, 348, 466, 512, 513, 516, 517, 518, 522, 525,).

ORADEA. Clasa IX-a. Covaci Andrei (501, 502, 503, 507, 508, 512, 517, 518, 522, 523), Mircea Bocu (501, 505, 506, 510, 715, 518, 520, 522, 525), Mândraş Petru (501, 502, 503, 505, 506, 507, 508, 517, 522, 523, 525), Nahaiciuc T. Mihail (346, 401, 459, 509, 522), Pantea Alexandru (476, 481, 482, 486, 495, 502, 505, 506, 509, 514, 517, 520). Clasa X-a. Fetea Ioan (501, 503, 508, 517, 522, 525), Onaca Valeriu (471, 480, 484, 488, 499, 505, 506, 517, 520, 522). Clasa XI-a: Moacă Solomon (372, 512, 514, 518, 520).

ORAVIŢA. Clasa XI-a. Cârdu Mircea (401, 403, 427, 428, 455, 481, 482, 486, 497, 501, 503, 504, 512, 513, 517, 3518, 520, P).

PITEŞTI. Clasa VIII-a. Sandu Iulian (290, 386, 517, 518, 520, 522, E: 106, 109), Sandu D. Dimitrie (514, 517, 518, 520, 522, 525). Clasa IX-a. Belu Gh. Nicolae (514, 517, 518, 520, 522, 525), Clasa XI-a. Toma Gh Iulian (328, 398, 401, 454, 468, 484, 505, 518), Şcoala medie tehnică metalurgică. Anul II. Bălăşean Gh. (245, 257, 270, 271, 306, 313, 306, 322), Bărbulescu T. Alexandru (245, 257, 264, 265, 268, 270, 271, 272, 298, 297, 301, 303, 305, 06, 308, 314, 322, 324, 339, 466, 468, 471, 488), Dinescu I. Gheorghe (257, 272, 306, 313, 432, 468, 474, 488), Miu R. Petre (270, 271, 306, 313, 314), Pană Constantin (257, 299, 313, 322, 468, 488), Stretenie I. Vasile (245, 265, 270, 271, 313, 488, 501).

PLOEŞTI. Clasa IX-a. Vulpescu Dumitru (501, 514, 517, 522, 515), Clasa XI-a: Bârligă H. Ioan (297, 298, 306, 307, 312, 313, 321, 323, 329, 343, 348, 249, 353, 387, 390, 401, 403, 420, 429, 434, 439, 440, 455, 457, 459, 461, 463, 486, 474, 475, 476, 480, 481, 482, 483, 484, 488, 510, 505, 506, 512,) Brozici Florin (320, 322, 335, 348, 350, 351, 352, 353, 354, 367, 370, 372, 374, 389, 390, 394, 398, 404, 406, 410, 422, 432, 439, 444, 445, 454, 456, 457, 458, 459, 466, 468, 474, 476, 477, 480, 481, 482, 484, 485, 486, 501, 502, 503, 504, 505, 505, 506, 507, 508, 509, 510), Bunea I. Ştefan (298, 303, 315, 322, 323, 324, 333, 341, 342, 350, 352, 353, 358, 359, 363, 368, 372, 428, 437, 440, 443, 449, 456, 457, 458, 459, 480, 481, 484, 488, 499, 505, 514), Dumitrescu Sergiu (375, 386, 388, 396, 398, 403, 422, 426, 427, 432, 434, 439, 440, 441, 422, 443, 453, 460, 461, 468, 472, 474, 476, 480, 482, 484, 486, 488, 489, 496, 499, 501, 502, 503, 506, 508, 512, 513, 514, 517, 525), Nestor Mircea (301, 326, 334, 363, 364, 368, 372, 382, 400, 406, 410, 437, 439, 459, 468, 480, 484, 488, 499, 505, 508, P), Papina Şt. Radu (372, 375, 377, 379, 383, 386, 387, 389, 390, 392, 393, 394, 403, 404, 406, 407, 410, 413, 415, 420, 432, 433, 441, 443, 444, 445, 448, 449, 456, 457, 458, 459, 463, 466, 468, 474, 480, 481, 482, 483, 484, 485, 488, 490, 499), Şerbu C. Mircea (340, 363, 371, 372, 375, 388, 398, 404, 406, 407, 416, 429, 439 443 445, 455, 456, 466, 480, 482, 484, 488, 501, 505, 506, 512, 514, 516, 517, 519, 523), Uţă B. Sergiu (310, 313, 317, 320, 325, 328, 331, 333, 353, 358, 364, 369, 372, 374, 375, 377, 386, 390, 392, 407, 512, 514, 517, 518, 519, 521, 522, 523, 525).

RĂDĂUŢI. Clasa XI-a: Bujdei Şt. Gheorghe (483, 485, 505, 518, 520).

ROŞIORII DE VEDE. Clasa IX-a: Miclăuş Vasile (276, 314, 321, 323, 329, 367, 375, 377, 379, 386, 387, 389, 390, 392, 400, 401, 404, 410, 413, 416, 422, 429, 437, 445, P),

SCAENI (Prahova). Clasa VII-a: Ivan Costantin (E: 41, 62, 70, 83, 99), Ion Dumitru (E: 41, 62, 70, 83, 99, 137), Sebastian Dragomir (E: 62, 83, 99, 137).

SIBIU. Reghintovschi A. Vasile (454, 455, 468, 501, 506, 509, 512, 517, 522, 525, P).

SIGHIŞOARA. Clasa XI-a. Rusu Valentin (504, 512, 514, 517, 520, 521, 523), Ţerbea Axente (501, 505, 514, 516, 517, 518, 520, 521).

SINAIA. Clasa IX-a: Mihăescu V. Constantin (455, 497, 515, 518, E: 134, 135, 137, 138, 150, 151, 152, 153, 154).

SLATINA. Clasa XI-a. Constantinov H. B. (E: 95, 99, 137, 147, 149,), Drăghici Ilie (269, 375, 404, 416, 443, 456, 499, 505, 506, 520).

TÂRGOVIŞTE. Clasa VII-a: Oprea A. Aureliu (E: 75, 81, 82, 131, 132, 134, 140, 145, P), Clasa IX-a: Ionescu I. Ion (363, 369, 383, 416, 422, 497, 501, 525, E: 99, 105, 107, 109, 114, 119, 125, 132), Clasa X-a: Bălescu Gr. E· (245, 246, 359, 365, 371, 379, 386, 388, 390, 391), Dobrescu Andrei (309, 330, 332, 334, 336, 339, 356, 362, 388, 392, 401, 403, 405,) Oprea A. Constantin (245, 306, 313, 333, 375, 386, 390, P), Sofia Gheorghe (257, 364, 401, 406, 437, 460, 507, 508, 512, 513, 518, 522, 523, 525), C.asa XI-a: Oprea Nicu (439, 471, 474, 476, 480, 481, 484, 485, 488, 389, 491, 495, 496, 497, 499), Stroe R. Dumitru (343, 348, 349, 351, 354, 400, 411, 415), Şcoala medie tehnică de petrol. Anul II. Drăgan Gheorghe (429, 466, 512, 518, 516).

TARGU JIU. Clasa IX-a. Tivig Gh. Constantin (505, 517, 518, E: 83, 99, 147), Clasa X-a: Ţiţă D. Constantin (364, 429, 430, 441, 443, 445, 457, 459, 484, 507, 509), Clasa XI-a: Lică Corlan (505, 508, 514, 518, 523).

TURNU MĂGURELE. Clasa X-a: Găină F. Stelian (429, 432, 437, 439, 443, 456, 497, 499, P).

TIMIŞOARA. Clasa XI-a: Simion Gheorghe (290, 292, 299, 303, 306, 307, 323, 329, 333, 335, 347, 349, 353, 354).

REVISTA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

ORGAN AL SOCIETĂŢII DE ŞTIINŢE MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R.

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

APARE SUB ÎNGRIJIREA UNUI SECRETARIAT DE REDACŢIE

REDACŢIA: STR. DIONISIE LUPU, 40. Parter. — BUCUREŞTI
RAIONUL STALIN

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică şi fizică a şcolilor, precum şi orice material informativ care ar interesa redacţia noastră se vor trimite pe adresa de mai sus

ABONAMENTE:

Tarif general ... ... Lei 60

Tarif redus pentru elevi, studenţi şi profesori ... ... Lei 10

Abonamentele se fac numai prin:

Centrul de Difuzare a Presei

Pentru Bucureşti: Str. Const. Mille Nr. 14 — Telef. 5.28.90

Pentru Provincie: Centrul de Difuzare a Presei din Capitalele Regiunilor sau Raioanelor — Banca de Stat în Contul C.D.P. Nr. 038.068

CĂRŢI APĂRUTE IN

M.I.M.I.C.

Curs de Matematică

Vol. I 400 pag. — 6,81 lei
Vol. II 340 pag. — 6,81 lei

ALEXANDROV:

Probleme de construcţii geometrice
(traducere din limba rusă)

212 pag. — 7,65 lei

MINISTERUL COMERŢULUI INTERIOR

Matematici economice

261 pag. — 11,70 lei

MINISTERUL COMERŢULUI INTERIOR

Manualul de calculaţii economice

170 pag. — 8,50 lei

MINISTERUL INVĂŢĂMÂNTULUI PUBLIC

Curs de matematici

400 pag. — 7,80 lei

Desenul tehnic

Vol. I 212 pag. — 8,50 lei
Vol. II 356 pag. — 10,63 lei

M.I.M.I.C.

Desenul tehnic

Vol. I 132 pag. 4,25 lei
Vol. II 152 pag. 3,40 lei
Vol. III 112 pag. 3,80 lei

EDITURA TEHNICĂ

CENTRUL POLIGRAFIC Nr. 2. FILIALA 3. — Comanda 438

Lei 1.—

51+53

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE ȘI FIZICE DIN R.P.R.

E1426

Országos Könyvtár TULAJDONA

KAT

BIBLIOTECA I. D. T.

ELLENŐRIZVE 1953

REVISTA MATEMATICĂ și FIZICĂ

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

★

Tineri și tinere! Munciți cu tot entuziasmul și avântul vostru tineresc pentru însușirea științei, tehnicii și culturii înaintate! Fiți luptători activi pentru socialism, pentru pace, pentru înflorirea Patriei noastre!

(Din chemările de 23 August 1952 ale Comitetului Central al Partidului Muncitoresc Român).

AUGUST

1952 8

EDITURA TEHNICA

REVISTA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

SUMARUL:

	Pag.
1. *Proiectul de Constituţie a R.P.R.*	185
2. *Chestiuni de bază în teoria numerelor, de Conf. Univ. Eugen Rusu.*	186
3. *Lampa electronică. Structura şi funcţiunile ei, de Octav Florescu*	190
4. *Probleme rezolvate (344, 367, 368, 369, 396, 399, 401, 402, 475, 476, 480, 482, 491, 497, 501, 505, 508)*	199
5. *Exerciţii şi probleme propuse*	204
6. *Exerciţii propuse pentru învăţământul elementar* ...	206
7. *Pagina rezolvitorilor de probleme*	207

8

ANUL III AUGUST 1952

BIBLIOTECA I. D. T.

Országos Műszaki Könyvtár TULAJDONA

REVISTA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

PUBLICAŢIE PENTRU TINERET A SOCIETĂŢII DE MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ DIN R. P. R.

Anul III, Nr. 8 August 1952

ELLENŐRIZVE 1953

PROIECTUL DE CONSTITUŢIE A R.P.R.

DOVADĂ A SUCCESELOR REGIMULUI DE DEMOCRAŢIE POPULARĂ, CHEZĂŞIE A CONSTRUIRII VICTORIOASE A SOCIALISMULUI ÎN PATRIA NOASTRĂ

Măreţele succese obţinute de regimul de democraţie populară al Patriei noastre, au dus la transformări şi îmbunătăţiri de asemenea natură că era necesară apariţia unei noi Constituţii. Primit cu bucurie de toţi oamenii muncii, proiectul noii constituţii a R.P.R. consfinţeşte marile drepturi şi libertăţi ale poporului nostru care, condus de partid şi cu ajutorul frăţesc şi multilateral primit din partea Uniunii Sovietice, luptă cu abnegaţie pentru construirea socialismului în patria noastră.

In luna aceasta am sărbătorit 8 ani dela eliberarea României de către glorioasa Armată Sovietică. Această eliberare de sub jugul fascist, după cum se arată în capitolul introductiv, «a dat putinţă poporului muncitor, în frunte cu clasa muncitoare condusă de Partidul Comunist, să doboare dictatura fascisto-antonesciană, să nimicească puterea claselor exploatatoare şi să făurească statul de democraţie populară, care corespunde pe deplin intereselor şi năzuinţelor maselor populare din România».

In aceste condiţiuni: a deţinerii puterii de către clasa muncitoare în alianţă cu ţărănimea muncitoare, a prieteniei şi alianţei cu marea şi invincibila Uniune Sovietică şi cu ţările de democraţie populară, Republica Populară Română construeşte socialismul, întărind şi lărgind neîncetat formaţiunea social-economică socialistă — în care fundamentul este fie proprietatea de stat, fie proprietatea cooperatist-colectivistă. In acelaşi timp, R.P.R. asigură creşterea neîntreruptă a bunei stări materiale şi a nivelului cultural al oamenilor muncii.

Determinând atitudinea statului democrat-popular faţă de cele 3 formaţiuni social-economice, Proiectul de Constituţie precizează: formaţiunea socialistă (în care a fost lichidată exploatarea omului de către om) are rolul conducător în economia noastră naţională, mica producţie de mărfuri este sprijinită de Stat cu scopul de-a o feri de exploatarea capitalistă, de a spori această producţie ridicând bunăstarea celor ce muncesc, iar faţă de formaţiunea particular-capitalistă statul aplică o politică de îngrădire şi eliminare a elementelor capitaliste.

Rezultă astfel lupta consecventă pe care o duce Statul nostru pentru a lichida definitiv exploatarea omului de către om, de a instaura orânduirea dorită de omenirea muncitoare dealungul veacurilor — socialismul.

Proiectul de Constituţie mai arată felul în care sunt atrase masele la conducerea treburilor de stat şi obşteşti, cum prin Marea Adunare Naţională şi prin Sfaturile populare ale oamenilor muncii dela oraşe şi sate se exercită puterea democrat-populară — democraţie pentru imensa majoritate a populaţiei ţării, în contrast isbitor cu falsa, ciuntita democraţie burgheză, care este un iad pentru cei mulţi şi un rai pentru exploatatori.

In aceste condiţiuni social economice şi de exercitare a puterii oamenilor muncii, Proiectul de Constituţie trece în revistă marile drepturi şi libertăţi ale cetăţenilor.

Dreptul la muncă, dreptul la odihnă, dreptul la asigurarea materială la bătrâneţe, dreptul la învăţătură, dreptul la asociere, dreptul la vot, sunt proclamate de Proiectul de Constituţie cu tărie. Aceste drepturi fac ca oamenii muncii din ţara noastră să privească cu toată încrederea viitorul, pe deplin încrezători în justeţea cauzei pentru care luptă — socialismul — pentrucă ei obţin astfel de drepturi la care clasa muncitoare din ţările capitaliste nu poate deocamdată decât visa. Intr'adevăr, în Patria noastră, este înlăturată posibilitatea crizelor economice, este lichidat şomajul, în vreme ce în lumea capitalistă sunt peste 50 milioane şomeri totali şi parţiali. Concedii anuale plătite primesc toţi muncitorii şi funcţionarii din Republica noastră, iar peste 300.000 dintre ei sunt trimişi anul acesta la case de odihnă, în staţiunile balneare şi climaterice în care altădată huzureau burghezii, moşierii şi slugile — îmbui-

baţi cu toate bunurile pământului, obţinute prin exploatarea cruntă a celor ce muncesc.

Invăţământul de toate gradele este învăţământ de stat, iar învăţământul elementar este general, obligatoriu şi gratuit. Statul acordă burse elevilor şi studenţilor meritoşi.

In aceste cuvinte simple este exprimată o cucerire revoluţionară a regimului nostru: şcoala ca rezervor principal de cadre pentru construirea socialismului, este larg deschisă pentru copiii oamenilor muncii. A dispărut vremea când pe băncile liceelor şi universităţilor rar puteai găsi vreun fiu de muncitor sau de ţăran sărac ! Azi şcoala noastră contribue din plin la desăvârşirea revoluţiei culturale, la ridicarea nivelului cultural al copiilor, al tineretului şi al poporului muncitor, la creşterea cadrelor tinere necesare marilor construcţii şi întreprinderi, uzinelor şi minelor, instituţiilor şi laboratoarelor, şcolilor şi institutelor de cercetări. Numărul elevilor din învăţământul mediu a crescut de peste 4 ori faţă de 1938, al studenţilor de aproape 2 ori, iar numărul analfabeţilor a scăzut cu 2,5 milioane ! Iată câteva cifre adânc grăitoare asupra avântului învăţământului şi culturalizării maselor din ţara noastră. In acelaşi timp, în Statele Unite bugetul aţâţătorilor la război hărăzeşte mai puţin de 1% pentru învăţământ, 6 milioane de copii rămân anual neşcolarizaţi, iar numărul analfabeţilor a trecut de 20 milioane.

Comparând aceste cifre cu cele de mai sus, creşte mai puternică dragostea noastră pentru regimul de democraţie populară şi ura neîmpăcată împotriva imperialismului.

Proiectul de Constituţie asigură cetăţenilor Republicii Populare Române dreptul de asociere în organizaţii obşteşti de diferite feluri. Trebue să subliniem faptul că, în felul acesta, se precizează drept constituţională existenţa Societăţii de Ştiinţe Matematice şi Fizice din R.P.R., ceeace face ca sprijinul Statului să devină mai puternic.

Această nouă dovadă de sprijinire a activităţii culturale şi ştiinţifice puse în slujba poporului, în slujba ridicării nivelului cultural al tineretului şi al oamenilor muncii, constitue un nou imbold în munca activiştilor Societăţii de Ştiinţe Matematice şi Fizice, şi în acelaşi timp va duce la o nouă activizare a membrilor Societăţii, a colaboratorilor ca şi a tuturor cititorilor publicaţiilor Societăţii.

Dar Proiectul de Constituţie stabileşte, în acelaşi timp, rolul Partidului Muncitoresc Român ca forţă conducătoare atât a organizaţiilor celor ce muncesc, cât şi a organelor şi instituţiilor de Stat.

Se legiferează astfel prin Constituţie aplicarea şi la noi a învăţăturii leninist-staliniste despre rolul şi locul Partidului în sistemul organelor şi organizaţiilor dintr'un stat care construeşte socialismul. Această legiferare vine să consfiinţească rolul şi locul pe care Partidul Muncitoresc Român şi l-a câştigat în ţara noastră şi în acelaşi timp va strânge şi mai puternic rândurile tuturor oamenilor cinstiţi din ţara noastră în jurul avantgărzii oamenilor muncii în lupta pentru construirea societăţii socialiste în Republica noastră dragă.

Citirea Proiectului de Constituţie trezeşte în noi sentimente puternice: de dragoste pentru viteaza noastră clasă muncitoare, de devotament şi încredere pentru eroicul Partid Muncitoresc Român în frunte cu tovarăşul Gh. Gheorghiu-Dej, de recunoştinţă veşnică pentru Uniunea Sovietică, eliberatoarea Patriei noastre, de iubire fierbinte pentru prietenul încercat şi conducătorul înţelept al frontului mondial al Păcii şi democraţiei — tovarăşul Iosif Vissarionovici STALIN !

Să devenim propagandişti neobosiţi pentru popularizarea succeselor obţinute de Republica Populară Română în mersul ei irezistibil înainte, spre socialism, să facem ca cuceririle revoluţionare ale poporului nostru muncitor înscrise în Constituţie să fie lărgite şi adâncite, să luptăm pentru ca mereu noi astfel de victorii să fie înscrise pe steagurile noastre !

CHESTIUNI DE BAZĂ IN TEORIA NUMERELOR

Conf. Univ. ***Eugen Rusu***

Chestiunile de aritmetica numerelor întregi învăţate în liceu la capitolul Divizibilitate se adâncesc într'o ramură a Matematicilor numită teoria numerelor.

Teoria numerelor a preocupat pe aproape toţi marii matematicieni. Au dat contribuţii esenţiale Fermat, Euler, Goldbach, Gauss, Cebâşev, etc.

In Uniunea Sovietică, această disciplină a luat un avânt cu totul nou. Matematicieni sovietici cu renume mondial ca I. M. Vinogradov, A. Hincin, I. V. Linnik, L. G. Snirelman, au rezolvat probleme pentru care nu se găsiseră soluţii secole de-a-rândul. Ei au pus probleme care au deschis perspective noi în această ştiinţă.

Teoria numerelor are în primul rând un interes științific, dar — ca și orice altă ramură a științei — ea are și aplicațiuni practice cum ar fi în chestiuni de mecanisme (angrenaje, roți dințate),*) în geometrie, în astronomie, etc.

Dăm mai jos unele chestiuni clasice de teoria numerelor, care pot fi urmărite cu cunoștințele de aritmetică învățate în liceu.

1. *Periodicitatea resturilor*

Relația de bază a împărțirii $b=a.q+r$ $(0\leqslant r<a)$ ne arată că dacă e dat un număr natural a împărțirea oricărui număr prin a ne conduce la unul din resturile

$$0, 1, 2, \ldots a-1$$

Dacă $b < a$, considerăm pe $q = 0$

Aceasta ne dă posibilitatea să introducem o clasificare a tuturor numerelor naturale, după restul pe care îl obținem în împărțirea cu un număr dat a. Vom pune într'o aceeași categorie toate numerele care dau restul 0 în împărțirea cu a, într'o a 2-a categorie pe cele care dau restul 1, etc.

De ex., dacă $a = 7$, vom pune în aceeași categorie numerele 0,7 ,14, 21,.. într'o altă categorie numerele 1, 8, 15, 22, ..., într'o a 3-a categorie numerele 2, 9, 16, 23, 30,... etc.

Numărul a îl numim *modul*. Numerele de aceeași categorie formează o *clasă*.

Față de modulul 7, numerele se împart în 7 clase de resturi; clasa de rest 0, clasa de rest 1, etc.

Două numere m și n care dau același rest în împărțirea cu un număr dat a se numesc congruente în raport cu acel număr și se notează $m \equiv n \pmod{a}$.

De ex., $16 \equiv 30 \pmod 7$ căci 16 și 30 dau același rest 2, în împărțirea cu 7, dar $16 \not\equiv 30 \pmod 9$ căci 16 dă restul 7, iar 30 restul 3 în împărțirea cu 9.

Ne punem problema:

Multiplii unui număr b, *căror clase față de modulul* a *aparțin?*

Să considerăm multiplii numărului b

$$b, 2b, 3b, 4b, \ldots$$

și să-i împărțim pe rând prin a pentru a găsi clasa căreia aparține fiecare.

Exemplul 1. Să luăm $a = 7$, $b = 4$.

Scrim mai jos pe prima linie multiplii lui 4, iar pe a doua linie resturile corespunzătoare în împărțirea prin 7.

4;	8;	12;	16;	20;	24;	28	32;	36;	40 ...
4;	1;	5;	2;	6;	3;	0	4;	1;	5 ...

*) A se vedea, de ex., RMF. Nr. 9/1950 pag. 13.

Observăm că:

1.º O grupă de 7 multipli consecutivi cuprinde toate clasele.

2º. Șirul este periodic, adică după ce s'a trecut prin toate clasele, resturile se repetă în aceeași ordine:

Exemplul 2. Să luăm $a = 6$, $b = 4$.

4;	8;	12	16;	20;	24;	28;	32;	36 ...
4;	2;	0	4;	2;	0;	4;	2;	0 ...

Observăm că șirul este tot periodic, dar într'o perioadă nu sunt toate clasele.

Cum se explică faptul că în primul exemplu perioada cuprinde 7 termeni, iar în al 2-lea exemplu nu cuprinde 6 termeni (adică toate cele 6 clase) ci numai 3?

In primul rând trebue să observăm că pentru a forma șirurile scrise mai sus nu e nevoie să facem împărțirile, ci putem proceda mai simplu astfel: adăugăm restului precedent 4 unități; dacă suma depășește pe 7, scădem o grupă de 7 unități.

Să reluăm cu acest procedeu, formarea șirului (1): 4 dă restul 4; 8 dă restul $4+4-7=1$; 12 dă restul $1+4=5$; 16 dă restul $5+4-7=2$; 20 dă restul $2+4=6$; 24 dă restul $6+4-7=3$; 28 dă restul $3+4-7=0$. De aici înainte resturile trebue să se repete: 32 dă restul $0+4=4$; 36 dă restul $4+4-7=1$, etc.

Același lucru se întâmplă la șirul (2); resturile încep să se repete îndată ce am întâlnit restul 0.

De ce în exemplul 1 restul 0 a apărut abia la al 7-lea multiplu, iar în exemplul 2 la al 3-lea multiplu?

Pentrucă în șirul: 4; 2.4; 3.4; 4.4 ... primul număr multiplu de 7 este 7.4 și aceasta pentrucă 4 e prim cu 7.

In al 2-lea exemplu, 4 nefiind prim cu 6, în șirul 4; 2.4; 3.4; 4.4 primul multiplu de 6 este 3.4.

In general lucrurile se întâmplă ca în cele două exemple de mai sus.

Adică:

1. Dacă a și b sunt două numere prime între ele, numerele b; $2b$; $3b$; $4b$;... $(a-1)b$; ab. aparțin celor a clase de resturi de modul a.

In adevăr, dacă doi multipli diferiți din acest șir mb și nb $(m<n\leqslant a)$ ar aparține aceleeași clase, adică dacă ar da același rest în împărțirea cu a, diferența lor ar fi divizibilă cu a; $(n-m)\ b=aq$; b fiind prim cu a, factorii primi ai lui a nu se găsesc nici unul printre factorii primi ai lui b (a și b nu au niciun factor comun); ei ar trebui să aparțină toți numărului $n-m$ ceea ce nu se poate căci $n-m<a$. Deci doi multipli din acest șir nu pot da același rest în împărțirea cu a;

obținem numai resturi diferite între ele, deci obținem toate cele a resturi, căci șirul scris are a termeni.

Multiplii următori ai lui b se plasează în aceleași clase, în aceeași ordine, ceea ce este evident. De ex. $(a+1)\,b \equiv b \pmod a$; $(a+2)\,b \equiv 2b \pmod a$ etc., $(a+n)\,b \equiv nb \pmod a$ pentrucă diferența dintre membrul I și II e un multiplu de a.

2. Dacă a și b nu sunt prime între ele, au ca c.m.m.d.c. numărul $d \neq 1$, atunci multiplii lui b

$$b;\ 2b;\ 3b;\ \ldots\ a'b$$

se plasează în $a' = \frac{a}{d}$ clase diferite.

In adevăr dacă doi multipli din acest șir ar da același rest în împărțirea cu a, diferența lor ar fi divizibilă cu a, adică vom avea $(n-m)\,b = aq$. Impărțind ambii membrii cu factorul comun d și notând $b' = \frac{b}{d}$; $a' = \frac{a}{d}$, ar însemna că $(n-m)\,b' = a'q$. Niciun factor al lui a' nu se află printre factorii lui b', căci toți factorii comuni lui a și b au intrat în d și cu ei am simplificat. Ar însemna că factorii lui a' aparțin toți numărului $n-m$ ceea ce nu se poate pentrucă $n-m < a'$.

Multiplii care urmează adică $(a'+1)\,b$, $(a'+2)\,b$,.. aparțin acelorași clase în aceeași ordine, ca și cei din șirul menționat — ceeace este evident ținând seama că $a'b$ e divizibil cu a.

Exercițiu. Luați alte două exemple și verificați aplicarea teoremei de mai sus.

Aplicația I. Impărțim un cerc în a părți egale, notând punctele de diviziune $0; 1; 2, \ldots a-1$. Dacă continuăm numerotarea în aceeași ordine, în punctul 0 vom scrie pe a, în punctul 1 pe $a+1$, etc., la a doua parcurgere a cercului vom scrie în 0 pe $2a$, în 1 pe $2a+1$, în 2 pe $2a+2$, etc. Toate numerele de forma $ma+p$, m fiind un număr oarecare și p unul a numit din numerele $0, 1, 2, \ldots a-1$, vor fi scrise în același punct cu p. Așa dar o clasă de rest p față de modulul a are ca imagine un punct pe cercul astfel divizat.

Multiplii b; $2b$; $3b\ldots$ corespund vârfurilor pe care le obținem dacă unim din b în b punctele de diviziune, începând cu 0. Poligonul se închide atunci când ajungem din nou în 0 adică atunci când găsim un multiplu al lui b divizibil cu a.

Rezultatele de mai sus se transpun geometric astfel:

Dacă b e prim cu a, unind punctele de diviziune din b în b, obținem un poligon cu a laturi.

Dacă b și a au ca c.m.m.d.c. pe d, unind punctele de diviziune din b în b, obținem un poligon regulat înscris cu $a' = \frac{a}{d}$ laturi.

De ex. s'a studiat în geometria elementară diviziunea cercului în 10 părți egale. Unind punctele din 3 în 3 s'a obținut decagonul stelat. Unind din 4 în 4 s'a obținut pentagonul stelat.

Exerciții 1. Impărțind cercul în 9 părți egale și unind punctele din 4 în 4, ce poligon obținem?

2. Câte poligoane regulate cu 16 laturi există?

Aplicația II. Dacă a și b sunt prime între ele, ecuația

$$by - ax = p$$

are soluții în numere întregi oricare ar fi p întreg.

Să presupunem întâi că p e unul din numerele $0; 1; 2; \ldots a-$. Ecuația $by = ax+p$ are soluții în numere întregi, căci în condițiile ipotezei (a și b prime între ele) multiplii lui b se împart în toate clasele de modul a, adică există neapărat multipli ai lui b care dau restul p în împărțirea cu a. Dacă by_0 e primul multiplu din șirul $b; 2b; 3b, \ldots$ care dă restul p (mod a), următorul va fi $b\,(y_0+a)$ și toți ceilalți $b\,(y_0+ma)$. Dacă $by_0 = ax_0+p$, atunci

$$b\,(y_0 + ma) = ax_0 + p + bma = a\,(x_0 + mb) + p.$$

Deci dacă x_0 și y_0 e o soluție, toate celelalte sunt

$$x = x_0 + mb,\quad y = y_0 + ma.$$

Dacă p' e un număr mai mare ca a, el e de forma $p' = ax' + p$ unde $p < a$. Ecuația se scrie $by = ax + p'$ adică $by = ax + ax' + p$ sau $by = a\,(x + x') + p$ și rezolvarea ei se reduce la cazul precedent.

2. *Teorema lui Fermat*

Să presupunem acum că a e un număr prim și să luăm șirul $b; 2b; \ldots (a-1)\,b$, unde b nu e un multiplu al lui a. Am luat numai $(a-1)$ termeni, am lăsat la o parte termenul ab care dădea restul 0 în împărțirea cu a. Impărțind termenii acestui șir cu a obținem resturi diferite între ele, adică numerele $1; 2; \ldots (a-1)$ evident așezate într'o altă ordine.

(Revedeți exemplul cu multiplii lui 4, împărțiți la 7 și construiți și alte exemple).

Ne punem acum problema ce rest obținem dacă împărțim produsul tuturor numerelor din șirul considerat prin a.

Să considerăm întâi două numere m și n care dau resturile r_1 și r_2 în împărțirea cu a adică

$$m = a \cdot q_1 + r_1;\quad n = a \cdot q_2 + r_2.$$

Avem $m \cdot n = (aq_1 + r_1) \cdot (aq_2 + r_2) = a\,(aq_1 q_2 + q_1 r_2 + q_2 r_1) + r_1 r_2$.

Dacă $r_1 r_2 = a \cdot Q + R$, obținem

$$mn = a\,(aq_1 q_2 + q_1 r_2 + q_2 r_1 + Q) + R.$$

Paranteza fiind un număr întreg, iar R fiind $< a$, această relație ne arată că în împărțirea lui mn cu a, obținem restul R (și câtul egal cu paranteza, care nu ne interesează).

Așa dar împărțind produsul a două numere printr'un număr oarecare a obținem același rest ca atunci când împărțim produsul celor două resturi ale factorilor prin a.

Exemplu: $20 = 7.2 + 6$; $30 = 7.4 + 2$

Produsul $20 \times 30 = 600$ în împărțirea cu 7 dă același rest ca și restul obținut în împărțirea lui $6 \times 2 = 12$ cu 7, adică 5.

Acest rezultat se generalizează ușor pentru un produs de mai multe numere.

Revenind la problema pusă, produsul termenilor şirului dat, adică $b \cdot 2b \cdot 3b \ldots (a-1)\,b = 1.2.3 \ldots (a-1)\,b^{a-1}$ dă acelaşi rest în împărţirea cu a ca şi produsul resturilor. Insă produsul resturilor este $1 \cdot 3 \cdot 2 \ldots (a-1)$.

Dacă două numere dau acelaşi rest în împărţirea cu a, diferenţa lor e divizibilă cu a. Din $m = aq_1 + r$, $n = aq_2 + r$, rezultă $m - n = a(q_1 - q_2)$.

Aşa dar

$$1.2.3 \ldots (a-1)b^{a-1} - 1.2.3 \ldots (a-1) = a \cdot Q$$

$$1.2.3 \ldots (a-1)(b^{a-1} - 1) = a \cdot Q.$$

Intrucât l-am luat pe a prim, întrucât a nu se găseşte printre factorii primi ai produsului $1.2 \ldots (a-1)$, a trebue să se găsească printre factorii primi ai numărului $b^{a-1} - 1$. Am obţinut teorema: dacă a e un număr prim şi b un număr care nu e multiplu al lui a, atunci numărul $b^{a-1} - 1$ e divizibil cu a.

Exerciţiu. Verificaţi enunţul teoremei pentru $a = 11$, $b = 2$; $a = 5$, $b = 3$; etc.

Aceasta este celebra teoremă a lui Fermat, fundamentală în teoria numerelor.

3. *Teorema lui Wilson*

Să considerăm şirul resturilor

(1) $1; 2; 3; \ldots (a-1)$ care pot fi obţinute în împărţirea numerelor nemultiple de a prin numărul a.

Ne fixăm atenţia pe unul din aceste resturi, b ($b < a$) şi înmulţim pe b cu toate numerele şirului considerat

$$1 \cdot b;\ 2 \cdot b;\ 3 \cdot b; \ldots (a-1) \cdot b.$$

Acest şir a mai fost considerat mai sus şi am văzut că în împărţirea prin a obţinem toate resturile. In particular există în acest şir de multipli ai lui b unul singur care în împărţirea cu a dă restul 1.

Deci: la orice număr din şirul (1) există în acest şir un număr astfel ca produsul lor să dea restul 1 în împărţirea cu a.

Exerciţiu. Luăm $a = 13$. Şirul resturilor este

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$$

Am subliniat în acelaşi fel două numere asociate din şir al căror produs dă restul 1 în împărţirea cu 13. A rămas nesubliniat primul şi ultimul număr; acestea se asociază fiecare cu el însuşi adică 1×1 şi 12×12 dau restul 1 în împărţirea cu 13.

Repetaţi acelaşi exerciţiu pentru $a = 11$, etc.

Să arătăm că, în general, dacă b nu e nici primul nici ultimul număr din şirul (1), asociatul lui b (numărul b' astfel ca bb' să dea restul 1 în împărţirea cu a) e diferit de b.

Procedăm prin reducere la absurd. Dacă asociatul lui b ar fi el însuşi, atunci b^2 ar da restul 1 în împărţirea cu a, adică am avea $b^2 = a \cdot q + 1$, de unde $b^2 - 1 = a \cdot q$ sau $(b-1)(b+1) = a \cdot q$, a fiind prim şi $b < a$; această egalitate nu e posibilă decât dacă $q = 0$, adică $b = 1$ sau dacă $b + 1 = a$, adică $b = a - 1$. Deci numai primul şi ultimul număr din şir sunt proprii lor asociaţi (aşa cum s'a verificat şi pe exemplele considerate).

Considerând şirul

(2) $2; 3; 4, \ldots (a-2)$

(am lăsat primul şi ultimul termen deoparte), aceste numere pot fi asociate două câte două bb', cc', etc., astfel ca fiecare produs să dea restul 1 în împărţirea cu a.

Să înmulţim acum toate perechile obţinute. Produsul va da acelaşi rest ca şi produsul resturilor; însă restul la fiecare pereche fiind 1, produsul resturilor este tot 1; deci produsul tuturor perechilor dă restul 1 în împărţirea cu a.

Insă produsul tuturor perechilor este egal cu produsul tuturor termenilor din şirul (2) adică cu $2 \cdot 3 \ldots (a-2) = (a-2)!$ (Semnul $n!$ se întrebuinţează pentru a indica produsul $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$).

Am obţinut deci că dacă a e un număr prim, atunci $(a-2)!$ dă restul 1 în împărţirea cu a.

Acest lucru se mai scrie şi astfel:

$$(a-2)! = a \cdot q + 1.$$

Inmulţind ambii membri cu $a - 1$, obţinem

$$(a-1)! = a(a-1)q + a - 1$$

$$\text{sau } (a-1)! + 1 = a \cdot Q.$$

Enunţul ia forma: dacă a e prim, numărul $(a-1)! + 1$ e divizibil cu a.

Oare numai dacă a e prim se întâmplă acest lucru? Vom arăta că da. Adică, dacă a nu e prim numărul $(a-1)! + 1$ nu e divizibil cu a.

Dacă a nu e prim, el are un factor prim p mai mic decât el, deci care se află printre numerele $2, 3, \ldots (a-1)$. Aceasta înseamnă că $(a-1)!$ e divizibil cu p; deci $(a-1)! + 1$ dă restul 1 când se împarte cu p, deci nu e divizibil cu p.

Rezultă că $(a-1)! + 1$ nu e divizibil cu a, căci în acest caz, ar fi divizibil şi cu p care e un factor al lui a, ceeace am văzut că nu se poate.

Aşa dar $(a-1)! + 1$ e divizibil cu a, numai dacă a e prim.

Condiţia *caracterizează* numerele prime.

Cititorii noştri au văzut în articolul publicat în R.M.F. No. 7/1952, cât de mult au urmărit oamenii de ştiinţă să găsească o expresie unică pentru numerele prime, dar această expresie nu s'a putut găsi.

Teorema lui Wilson — fără a ne oferi o expresie care să ne dea toate numerele prime — exprimă totuşi că: $(a-1)! + 1 \equiv 0 \pmod{a}$, numai dacă a este un număr prim.

Teorema lui Fermat şi teorema lui Wilson constitue teoremele de bază ale teoriei numerelor, cu ajutorul cărora se găsesc o serie întreagă de proprietăţi ale numerelor întregi.

LAMPA ELECTRONICĂ

STRUCTURA ŞI FUNCŢIUNILE EI

Octav Florescu

1. *Introducere.*

Lampa electronică este o realizare dintre cele mai însemnate a tehnicii dela începutul sec. 20. Cercetările teoretice şi experimentale din secolul trecut din domeniul emisiunii electronice a unui metal incandescent, s'au concretizat în această sinteză remarcabilă care este trioda şi care avea să revoluţioneze întreaga electrotehnică.

La baza acestei invenţii stă cunoscuta lampă cu incandescenţă sau becul electric şi se poate spune fără nicio exagerare că dioda şi trioda nu reprezintă decât desvoltările ulterioare făcute printr'o adâncire a studiului fenomenelor ce se petrec în lampa cu incandescenţă a lui Lodâghin.

Tot atât de adevărat este că şi cele mai complicate lămpi electronice de radio îşi au origina în triodă.

Proprietăţile lor sunt strâns legate de funcţiunile triodei şi fără un studiu al triodei nu e cu putinţă înţelegerea funcţionării de exemplu a unei pentode sau hexode.

Iată dece se pot considera ca fundamentale funcţiunile unei triode.

Rostul acestui articol este tocmai de a prezenta în mod cât mai complect structura şi funcţiunile triodei.

2. *Structura şi funcţionarea unei diode.*

Trioda reprezintă o desvoltare a diodei, prin adăugirea unui al treilea electrod pe lângă cei doi electrozi ai diodei.

Fenomenele de bază rămân aceleaşi în triodă ca şi în diodă, într'o formă însă mai complicată.

Dioda este cea mai simplă lampă electronică. Ea are 2 electrozi introduşi într'un balon de sticlă sau de metal:

a) Un fir metalic care poate deveni incandescent numit *filament* sau *catod.*

b) O placă metalică, numită *placă* sau *anod.*

In balon vidul este împins cât mai departe posibil (10^{-4} torri). Filamentul este fabricat dintr'un metal greu fuzibil cum e tungstenul, iar placa e făcută din metale greu oxidabile şi cu punct de topire ridicat ca Ni, Mb, Ta.

Balonul lămpii este susţinut de un soclu confecţionat din material izolator la care sunt fixate sau trei picioruşe sau 3 contacte laterale de care sunt conectaţi: filamentul la 2 picioruşe, placa la unul.

Reprezentarea schematică a diodei cu legăturile la soclu este următoarea:

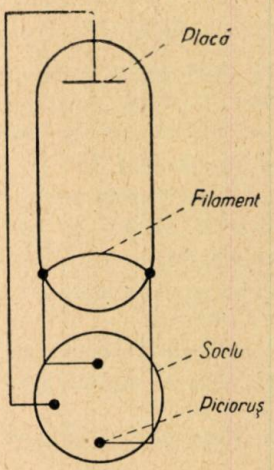


Fig. 1

Pentru studiu, dioda este montată conform schemei de mai jos:

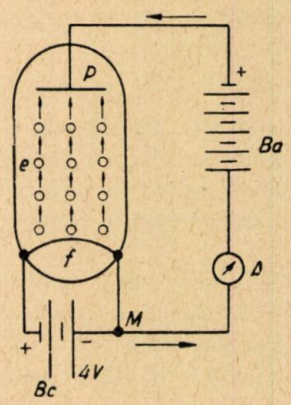


Fig. 2

Filamentul *f* este adus în stare de incandescenţă cu ajutorul bateriei de acumulatori *Bc* de 4 v care se mai numeşte şi *baterie de încălzire* a filamentului.

Placa *P* este legată la o baterie *Ba* zisă *baterie anodică* deoarece este conectată la polul pozitiv al bateriei. Negativul bateriei este legat la un miliampermetru *A*, cealaltă bornă a lui fiind legată în *M*.

In momentul în care filamentul *f* devine incandescent, miliampermetrul *A* indică prezenţa unui curent. Aceasta înseamnă că placa *P*, bateria *Ba* şi ampermetrul *A* se găsesc într'un circuit închis, cu toate că între filament şi placă este vid. Spaţiul

filament-placă a devenit conductor datorită electronilor emiși de filamentul incandescent.

In concluzie dioda are 2 circuite:

a) circuitul de încălzire al filamentului care cuprinde filamentul și bateria *Bc.*;

b) circuitul de placă care cuprinde placa, bateria anodică *Ba*, ampermetrul și spațiul filament-placă.

In cele ce urmează se consideră ca tensiune a plăcii diferența de potențial dintre placă și extremitatea negativă a filamentului.

Dacă în circuitul de încălzire al filamentului se dispune de un reostat, se poate varia intensitatea curentului de încălzire și deci temperatura filamentului.

In orice conductor se știe că există electroni «*liberi*» în stare de agitație desordonată și a căror viteză crește cu temperatura.

Când conductorul este incandescent, electronii superficiali reușesc a se elibera de atracția care-i ține pe suprafață; ei părăsesc conductorul și formează în jurul filamentului un nor de electroni.

Placa fiind pozitivă în raport cu filamentul, atrage acești electroni și stabilește un curent electric în circuitul exterior dela filament la placă. Acesta este curentul de placă al cărui sens convențional, arătat pe figură, este contrar sensului în care se mișcă electronii. Intensitatea i a curentului de placă depinde de doi factori: temperatura filamentului și tensiunea plăcii.

Dependența de temperatură este arătată prin formula

$$i = a\sqrt{T} \cdot e^{-\frac{b}{T}}$$

în care a și b sunt niște constante, T este temperatura absolută a filamentului, și e baza logaritmilor neperieni.

Intensitatea curentului de placă crește când diferența de potențial dintre placă și filament crește.

Menținând constantă temperatura filamentului se constată că intensitatea curentului de placă crește cu tensiunea anodică.

Pentru diferențe de potențial mari, curentul atinge o valoare limită numit *curent de saturație.*

Explicația curentului de saturație este ușor de dat. La o temperatură dată, filamentul emite un mare număr de electroni. Tensiunea plăcii fiind mică, nu toți electronii ating placa. Când tensiunea anodică crește, un număr mai mare de electroni sunt captați de anodă și intensitatea crește.

Dacă tensiunea este suficient de mare, toți electronii sunt captați de placă și de aci înainte oricât s'ar mări tensiunea plăcii, intensitatea curentului nu mai crește, deoarece numărul electronilor emiși de catodă rămâne constant la temperatură constantă.

Urmează pe de altă parte că tensiunea anodică necesară saturației, crește cu temperatura filamentului.

Variația intensității curentului de placă cu tensiunea plăcii și temperatura filamentului este arătată în fig. 3.

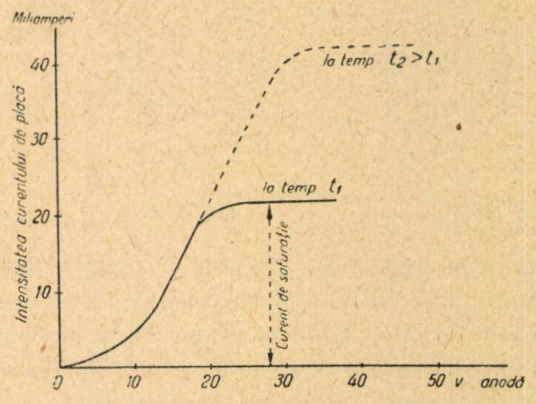


Fig. 3

Curba obținută se numește caracteristica curentului de placă.

La o temperatură t_2 mai ridicată curentul de saturație atinge valori mai mari.

Mai rezultă din cele expuse până aci că pentru fiecare tensiune anodică există o temperatură limită dela care oricât am încălzi filamentul, curentul de placă nu mai crește.

Făcând potențialul plăcii negativ, curentul de placă încetează. Lampa nu dă deci un curent în circuitul exterior decât dacă placa este anodă, adică pozitivă. Spațiul filament-placă prezintă prin urmare o conductanță unilaterală.

Explicația este simplă. Când placa este negativă, electronii emiși de filament sunt respinși de placa negativă și nici un curent nu se poate stabili.

Pe această proprietate, se bazează utilizarea diodei ca redresoare și detectoare.

3. *Structura și funcțiunile lămpii cu 3 electrozi.*

Lampa electronică a căpătat însă o importanță considerabilă când s'a adăugat diodei un al treilea electrod-grila, situat între filament și placă. S'a construit astfel lampa cu 3 electrozi sau trioda.

Construcția triodei seamănă cu aceea a diodei. Forma și dispunerea electrozilor sunt indicate în fig. 4 a și 4 b.

Grila are forma de spirală sau de elice care înconjoară catodul.

După construcția catodului triodele sunt de 2 feluri: cu încălzire directă și cu încălzire indirectă.

La trioda cu încălzire directă catodul este constituit chiar de filament.

Catozii cu încălzire indirectă, propuși pentru prima oară de academicianul A. A. Cernâșev sunt arătați în fig 5a și 5b.

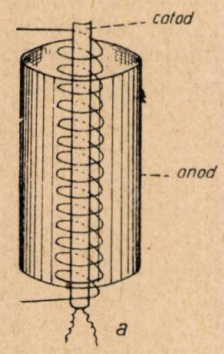


Fig. 4 a

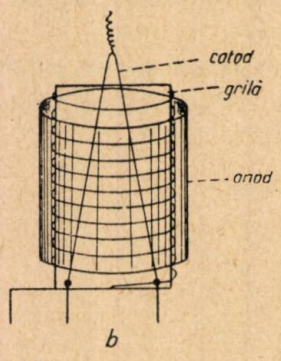


Fig. 4 b

Fig. 5 a reprezintă un catod cu încălzire indirectă în care filamentul de tungsten trece prin 2 canale ale unui cilindru de porțelan, iar acesta este introdus în interiorul unui tub de nichel care constitue catodul emițător de electroni.

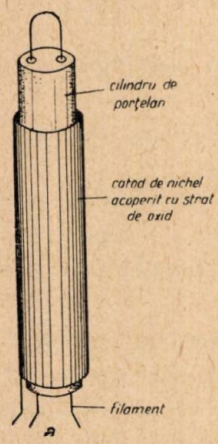


Fig. 5 a

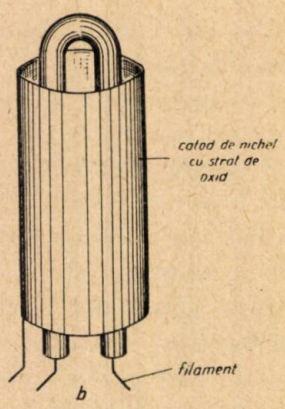


Fig. 5 b

In fig. 5b, se reprezintă un alt tip de catod, modern, în care însă filamentul este acoperit cu un strat de materie izolatoare (alund) făcută cu oxid de aluminiu.

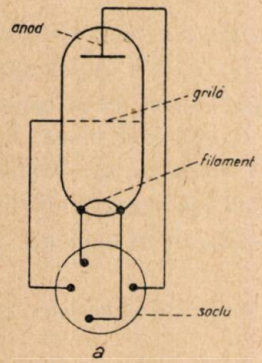


Fig. 6 a

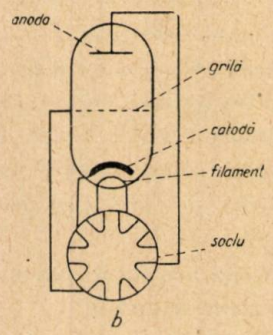


Fig. 6 b

Catozii sunt acoperiți cu un strat de oxid de bariu, stronțiu sau calciu care reprezintă materia activă producătoare de electroni. Filamentul servește numai la încălzire.

Schemele triodelor cu încălzire directă și indirectă cu conexiunile la soclu sunt indicate în fig. 6a și 6b.

Lămpile cu încălzire indirectă sunt mult mai bune ca cele cu încălzire directă având o emisiune electronică mult mai mare.

Montajul triodei pentru studiu se face după schema din fig. 7.

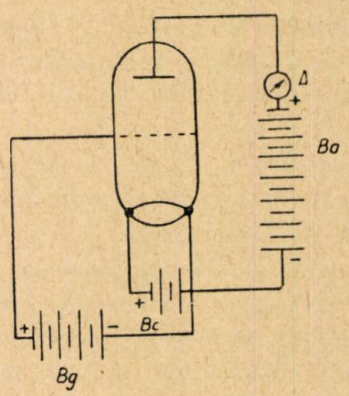


Fig. 7.

Ba este bateria anodică, Bg este bateria din circuitul grilei iar *Bc* bateria de încălzire a filamentului.

Celor trei baterii le corespund trei circuite ale triodei: circuitul plăcii, circuitul grilei și circuitul de încălzire al filamentului.

La triodă apare un al treilea factor care poate influența curentul de electroni între filament și placă. Acesta este grila, care poate acționa prin tensiunea ei asupra electronilor care se mișcă între filament și placă.

Prin tensiunea grilei, se va înțelege diferența de potențial între grilă și extremitatea negativă a filamentului.

Cu ajutorul bateriei din circuitul grilei se poate varia tensiunea grilei dela valori negative până la valori pozitive ridicate. Se constată cu miliampermetrul *A*, că are loc o variație a curentului de placă în funcție de variația potențialului grilei și anume la un potențial negativ al grilei nu există nici un curent în circuitul de placă. El apare la un potențial negativ al grilei care depinde de tensiunea plăcii, crește când se mărește potențialul grilei și atinge o valoare limită numită curent de saturație. Deci grila joacă rolul unui fel de robinet care reglează prin tensiunea care-i este aplicată, valoarea curentului de placă. Ea comandă fluxul de electroni dintre filament și placă.

Rolul grilei apare și mai evident dacă se reprezintă câmpul electric în spațiul dintre filament și placă.

Pentru aceasta se secționează filamentul, grila și placa printr'un plan. In acest plan distribuția liniilor de forță se prezintă ca în fig. 8, 9, 10, și 11.

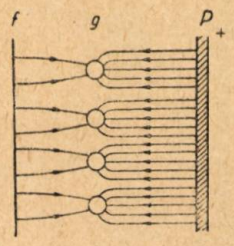


Fig. 8
Distribuția liniilor de forță când grila este la un potențial foarte inferior celui al filamentului

Liniile de forță eșite din placă și filament se termină pe grătar. Nicio linie de forță pornită dela placă nu ajunge la filament.

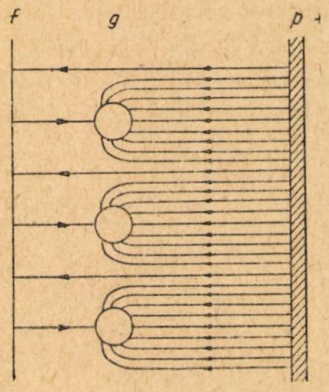


Fig. 9
Distribuția liniilor de forță când potențialul negativ al grilei este apropiat de cel al filamentului

Liniile de forță eșite din placă încep să atingă în parte filamentul. Electronii, puțini la număr, sunt antrenați dealungul acestor linii de forță și începe să apară curentul de placă.

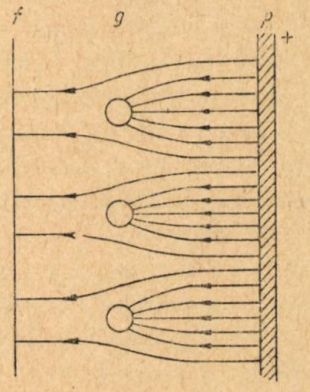


Fig. 10
Distribuția liniilor de forță când potențialul grilei devine egal cu al filamentului

Liniile de forță dintre filament și grilă dispar când potențialul grilei devine egal cu al filamentului.

Apar din nou linii de forță între filament și grilă și ia naștere curentul de grătar, în circuitul grătarului din cauza electronilor antrenați dealungul liniilor de forță dintre filament și grătar.

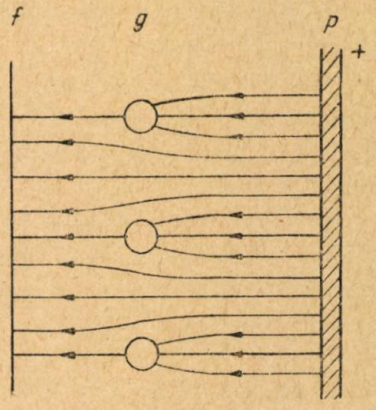


Fig. 11
Distribuția liniilor de forță când potențialul grilei devine mai ridicat ca al filamentului

Deoarece curentul de placă este determinat de cei 3 factori: temperatura filamentului, tensiunea plăcii și tensiunea grilei, un studiu rațional al triodei presupune menținerea constantă a câte 2 factori, rând pe rând pentru a putea determina influența fiecăruia din ei.

A. Temperatura filamentului și tensiunea plăcii sunt menținute constante. Variază numai potențialul grilei.

Variația intensității curentului de placă este arătată în graficul fig. 12.

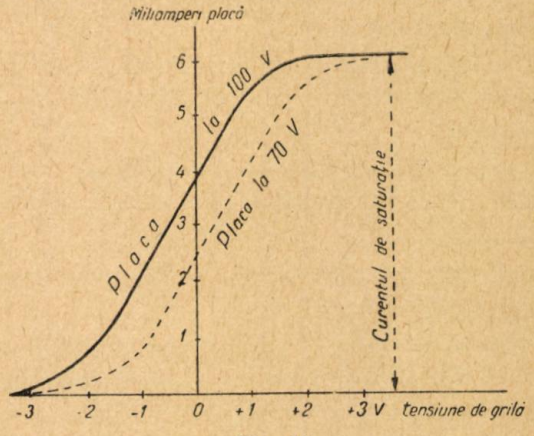


Fig. 12

Curba obținută a fost numită *caracteristica* curentului de placă. Dacă se studiază variația curentului de placă pentru o temperatură constantă a filamentului și o tensiune constantă a plăcii dar de altă valoare, se obține o altă curbă caracteristică care are aceeași formă dar care este deplasată spre stânga dacă tensiunea plăcii crește și spre dreapta dacă tensiunea plăcii scade (vezi curba punctată din fig. 12).

Curbele din fig. 12 permit definirea unor mărimi caracteristice ale lămpii cu 3 electrozi.

Să considerăm o lampă la care, la tensiunea de placă de 70 v, corespunde tensiunii de grilă nulă, un curent de placă de 2,5 mA, iar pentru —1 v la grilă un curent de 1 mA.

Diferența de 1,5 mA se numește *panta triodei* și reprezintă variația curentului de placă pentru o variație de 1 v la tensiunea grilei. Se exprimă în miliamperi pe volți.

Panta este importantă pentrucă ea caracterizează acțiunea grilei asupra curentului de placă. Se consideră tensiunea grilei constantă și egală cu 0; dar se variază tensiunea plăcii dela 70 V la 100 V.

In acest caz curentul trece dela 2,5 mA la 4 mA.

Variația de 1,5 mA datorită variației de 30 V la placă, arată că spațiul filament-placă se comportă ca o rezistență egală cu

$$\rho = \frac{30\ \text{V}}{1{,}5\ \text{mA}} = \frac{30\ \text{V}}{0{,}0015\ \text{A}} = 20000\ \Omega.$$

Această rezistență a fost numită *rezistența internă* ρ *a lămpii* și ea caracterizează influența tensiunii placă.

Rezistența triodelor variază după construcție între 1000 și 100 000 Ω. Foarte importantă este comparația între acțiunea tensiunii de placă și aceea a tensiunii de grilă asupra curentului anodic.

Se observă în fig. 12 că pentru a obține aceeași variație a curentului de placă de 1,5 mA se poate proceda în 2 feluri:

— sau se variază tensiunea de placă cu 30 V, dela 70 V la 100 V menținând tensiunea grilei constantă.

— sau se variază tensiunea de grilă cu 1 volt — dela 0 v la —1 v, menținând tensiunea de placă constantă.

Se spune că lampa are un *coeficient de amplificare* k de 30 ori.

Dacă se notează cu v variația de tensiune a grilei și cu V variația de tensiune a plăcii care produc aceeași variație de curent-placă, atunci coeficientul de amplificare $= \frac{V}{v}$.

Creșterea potențialului de grilă mai are o consecință importantă.

Grila începe să capteze ea însăși electroni care constitue un curent în circuitul grilei.

Pentru potențiale puțin ridicate intensitățile curenților de grilă sunt foarte mici față de curenții corespunzători din circuitul de placă.

Schema fig. 14 arată ce se întâmplă dacă potențialul grilei ia valori mari.

B. Influența tensiunii anodice asupra formei caracteristicelor.

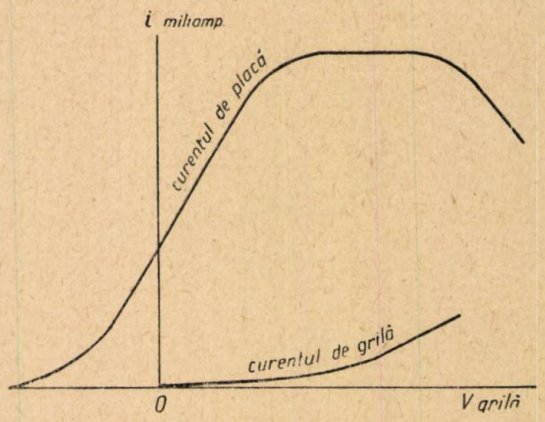


Fig. 13.

Reprezentând pentru aceeași temperatură a filamentului curbele caracteristice ale curentului de placă la diferite tensiuni anodice, se obține în același sistem de axe o rețea de curbe de aceeași formă și paralele în porțiunile lor rectilinii. (Fig. 14).

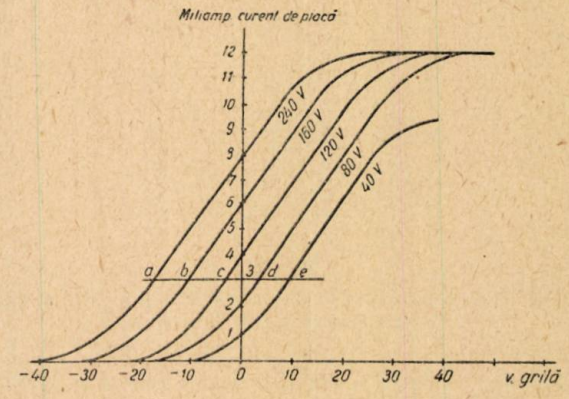


Fig. 14.

Deplasările *ab*, *bc*, *cd*, *de* paralele cu axa absciselor sunt egale în cazul fig. 14 și corespund la variațiuni egale de tensiune a plăcii. In general ele sunt proporționale cu variația tensiunii de placă.

Demn de remarcat este faptul că curbele pornesc dela potențiale de grilă diferite, dar ating același curent de saturație. Aceasta se datorește dependenței unice a numărului de electroni, de temperatura filamentului (catodei).

Creșterea potențialului plăcii are o influență neînsemnată asupra curentului de grilă.

Este important de observat că dacă punctul de funcționare al lămpii se găsește pe partea centrală a curbei caracteristice, atunci pentru un potențial de placă constant, variațiile de intensitate ale curentului anodic sunt proporționale cu variațiile de potențial ale grilei.

Această proprietate este foarte importantă deoarece pe ea se sprijină utilizarea lămpii ca releu

amplificator, căci pentru ca un releu să redea exact, trebue ca variațiile de curent să fie proporționale cu variațiile potențialului de grilă.

Sensibilitatea releului va fi cu atât mai mare cu cât va fi mai mare variația intensității curentului de placă pentru o variațiune dată de potențialul grilei; aceasta înseamnă că panta $\frac{k}{\rho}$ trebue să fie mare (Fig. 15).

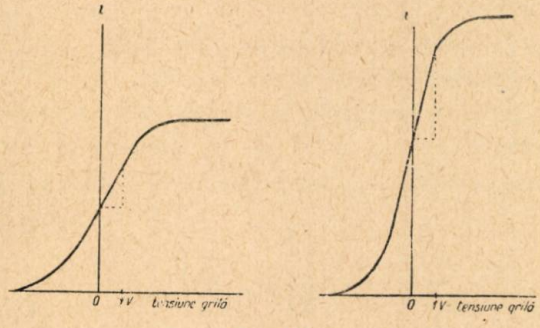


Fig. 15
Curbe caracteristice cu pante diferite

C. Influența temperaturii filamentului.

Punctul unde începe curba caracteristică a curentului de placă depinde foarte puțin de temperatura filamentului, forma curbei deasemenea; în schimb valoarea curentului de saturație crește când temperatura filamentului crește (fig. 16).

4. *Funcțiunile triodei.*

După această trecere în revistă a condițiilor de funcționare și a mărimilor caracteristice ale triodei, rămâne de văzut ce funcțiuni poate îndeplini într'un montaj, o triodă.

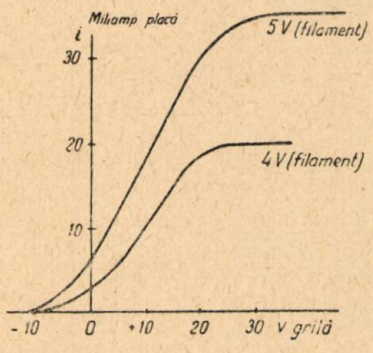


Fig. 16.

Trioda posedă trei funcțiuni fundamentale:

a) funcțiunea de generator de oscilații întreținute;

b) funcțiunea de detecție;

c) funcțiunea de amplificare.

Aceste funcțiuni sunt determinate de curbele caracteristice, de poziția punctului de funcționare pe caracteristică și de montaj.

A. *Trioda generator de oscilații întreținute.*

Se știe că oscilațiile electrice pot fi obținute cu ușurință în circuitele oscilante, dacă se provoacă în acestea din urmă, perturbații.

Un circuit oscilant este constituit dintr'o bobină și un condensator. Frecvența oscilațiilor depinde de valorile inductanței proprii L și capacității condensatorului.

Perioada $T = 2\pi \sqrt{L \cdot C}$.

Dacă condensatorul este variabil, frecvența poate fi variată prin schimbarea capacității.

Schema circuitului oscilant este cea din fig. 17.

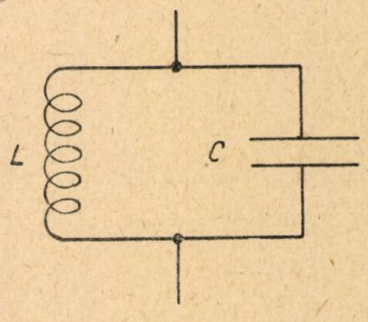


Fig. 17

Introducând circuitul oscilant într'un circuit electric și stabilind curentul, însuși faptul stabilirii curentului este o perturbație care antrenează după sine producerea de oscilații. Acestea se amortizează însă foarte repede.

Pentru a le întreține ar trebui ca circuitul oscilant să primească la momente potrivite impulsuri în fază cu oscilațiile, așa cum se întâmplă în cazul unui leagăn a cărui mișcare oscilatorie poate fi întreținută dând leagănului impulsuri ritmice în concordanță de fază cu mișcarea lui oscilatorie.

Trioda oferă o asemenea posibilitate. In acest scop, circuitul oscilant este intercalat cu circuitul plăcii și cuplat cu circuitul de grilă prin intermediul unei bobine.

Două circuite sunt cuplate dacă unul din ele poate acționa asupra celuilalt. Această acțiune se numește reacție.

Schema de montaj este dată în fig. 18.

Prin încălzirea catodului și stabilirea contactului K, curentul anodic va încărca condensatoul C care se va descărca în bobina L astfel că vor apare oscilații amortizate cu frecvență determinată de valorile lui L și C.

Oscilațiile din bobina L vor induce în bobina de grilă Lg o tensiune alternativă. Din această cauză potențialul grilei va oscila cu aceiași frecvență și va acționa asupra curentului anodic și fiindcă lampa este un releu foarte sensibil, oscilațiile grilei sunt concordante cu oscilațiile circuitului LC.

In consecință circuitul *LC* primind impulsuri concordante cu oscilațiile din el, va continua să oscileze, iar oscilațiile vor păstra o amplitudine constantă, vor fi adică oscilații neamortizate.

Se spune că oscilațiile sunt întreținute prin reacția inductivă dintre *L* și *Lg*. Cuplajul reactiv poate fi însă și electrostatic adică realizat printr'un condensator.

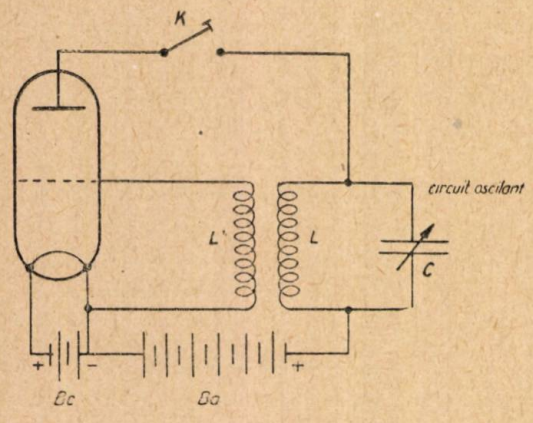


Fig. 18

Deși schematic foarte simplu, montajul triodei ca generator trebue să satisfacă anumite condiții pentru ca oscilațiile să se amorseze.

B. *Detecția cu tricdă.*

Oscilațiile de înaltă frecvență modulate la frecvența acustică, induse în antenă de undele hertziene nu pot avea direct nici o acțiune asupra receptorilor telefonici sau difuzorilor. Ele sunt mai întâi convertite în curenți continui și variabili grație unui aparat numit detector și apoi făcute să acționeze asupra difuzorului. Orice detector este un aparat care lasă să treacă mai ușor curenții într'un sens decât în celălalt. Prezintă deci o conductibilitate unilaterală.

Cel mai simplu detector este cel cu cristal de galenă. Dacă este supus în mod succesiv la dife-

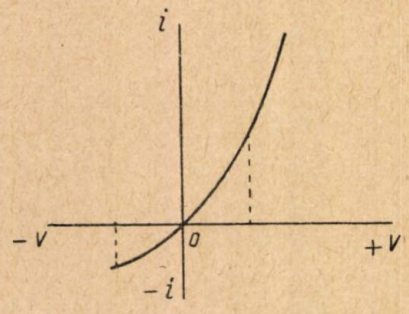


Fig. 19

rențe de potențial variabile, curentul care-l traversează este reprezentat de graficul din fig. 19.

Curba obținută se chiamă *caracteristica detectorului*. Pentru diferențe de potențial egale dar de sens contrar se obțin intensități de curent inegale. Este evident că dacă caracteristica ar fi fost rectilinie, cei 2 curenți ar fi fost egali. In concluzie detecția se datorește curburii caracteristice.

Revenind la triodă se înțelege acum ușor dece ea poate fi utilizată la detecție.

Intr'adevăr ambele caracteristice prezintă curburi și în special caracteristica curentului de placă are o curbură inferioară și una superioară. Deaceea detecția poate fi realizată pe 2 căi cu ajutorul triodei:

a) folosind caracteristica de placă,

b) folosind caracteristica de grilă.

In detecția de placă, montajul triodei este astfel construit încât punctul de funcționare al lămpii să fie în regiunea marei curburi a caracteristicii.

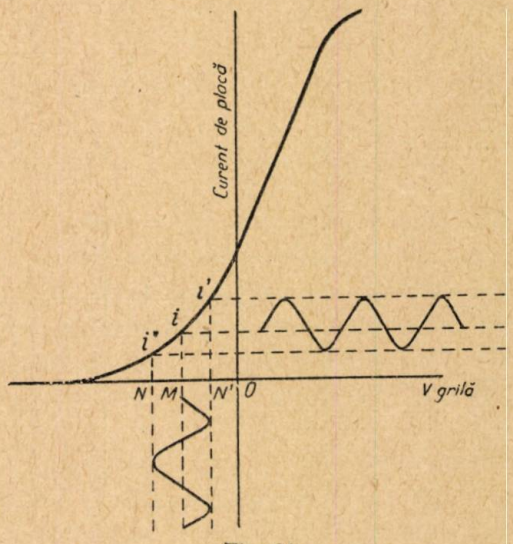


Fig. 20

Punctul de funcționare este fixat în *M* prin bateria de negativare *Bg*. Corespunde un curent de placă *i*.

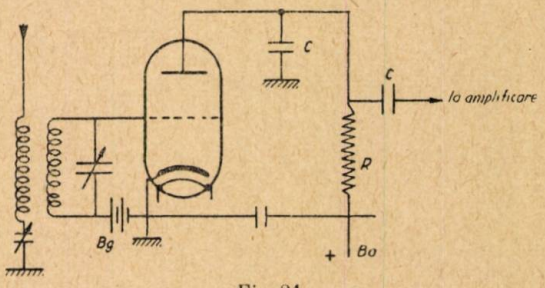


Fig 21

Când oscilațiile induse în antenă acționează asupra circuitului oscilant de grilă, potențialul grilei oscilează între valorile *ON* și *ON'*.

Curentul de placă variază și el între *i'* și *i''*, dar variația într'un sens este mai mare ca variația în sens contrar de unde urmează că curentul mediu este deosebit de *i*. Alternanțele de un sens au fost suprimate parțial. De aici decurge fenomenul de detecție.

Detecția pe placă este însă puțin sensibilă.

Mult mai sensibilă este detecția pe grilă.

In cazul acesta punctul de funcționare trebue să se găsească în regiunea rectilinie a caracteristicei anodice și pe curbura caracteristicei de grilă. Aci se folosește deci curbura caracteristicei de grilă pentru realizarea detecției.

Trioda se fixează într'un montaj ca cel din fig. 22.

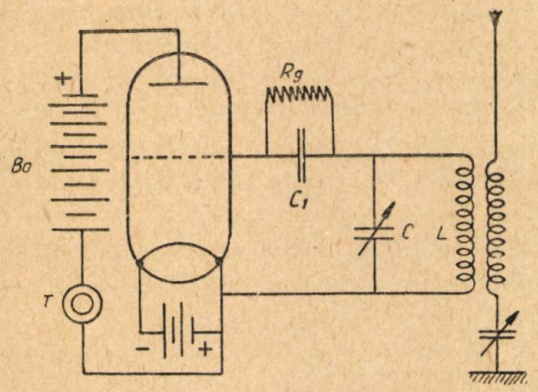


Fig. 22

In acest montaj negativul bateriei *Ba* și circuitul de grilă sunt legate la pozitivul bateriei de încălzire.

Pe circuitul grilei se adaugă o foarte mare rezistență *Rg* (circa 3—4 megohmi). Curentul electric de grilă trecând prin această rezistență va produce o cădere de potențial *OP* (fig. 23) aducând potențialul grilei până la o valoare foarte mică *OP*. Curentul de grilă este atunci *PM*, iar curentul de placă *PN*.

Oscilațiile induse în antenă în circuitul *LC* sunt transmise grilei prin condensatorul de grilă C_1, iar punctul *P* la care a fost fixat potențialul grilei

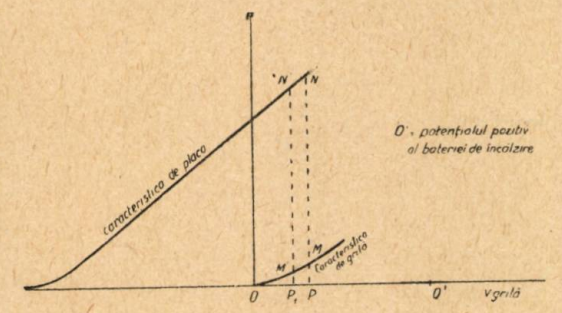


Fig. 23

oscilează în jurul poziției sale medii. Din această cauză se produc variații periodice ale intensității curentului de grilă; intensitatea medie a curentului de grilă este mărită, căderea de potențial la extremitățile rezistenței *R* se face și ea mai mare și aceasta are drept efect deplasarea punctului de funcționare din *P* în P_1.

Ca urmare curentul de placă oscilează și el în jurul valorii P_1N'. De aci rezultă detecția.

Detecția pe grilă, foarte sensibilă, nu este însă bună în cazul semnalelor puternice din cauza distorsiunilor pe care le produc.

C. *Trioda ca amplificator.*

S'a arătat mai înainte cu ocazia studiului general al triodei că una din mărimile caracteristice ale ei este coeficientul de amplificare.

Orice triodă prezintă un coeficient de amplificare a cărui mărime este determinată prin construcție. Acest factor de amplificare caracterizează amplificarea tensiunii alternative aplicată pe grilă.

Un montaj în care lampa îndeplinește funcțiunea de amplificare este un amplificator.

Amplificatorul poate fi construit cu una sau mai multe lămpi, cu transformatori, rezonanță, cu rezistențe, pentru joasă sau înaltă frecvență.

Oricare ar fi amplificatorul, tensiunea alternativă de amplificat acționează prin inducție asupra circuitului de grilă al triodei.

In fig. 24 este dată schema de montaj a unui amplificator cu o singură lampă, cu transformator.

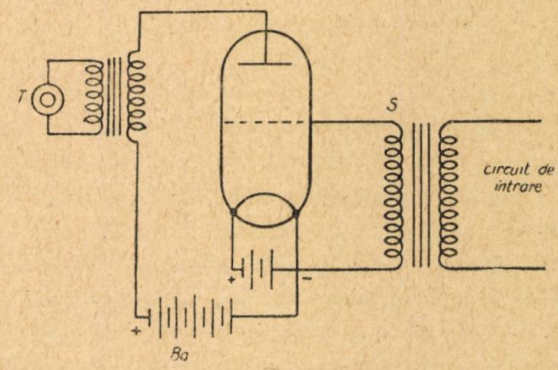


Fig. 24

Curenții alternativi slabi din circuitul de intrare induc în secundarul *S* al transformatorului o forță electromotoare care provoacă variațiuni ale potențialului grilei.

Variațiunile curentului anodic corespunzătoare, au amplitudinea pe care ar produce-o în circuitul de placă o forță electromotoare egală în fiecare moment cu produsul dintre variația de potențial a grilei *u* și factorul de amplificare al lămpii *k*.

Tensiunea grilei este astfel reglată ca punctul de funcționare al triodei să se afle în regiunea rectilinie a caracteristicii de placă (fig. 25). In acest mod variațiile de intensitate ale curentului anodic sunt proporționale cu variațiile de potențial ale grilei și din această cauză în circuitul de eșire curenții conservă riguros aceeași formă dar cu am-

plitudini mult mai mari. Nu se vor produce deci deformații de curent.

Trioda împreună cu transformatorul ei constituie un etaj de amplificare.

Amplificarea cu transformatori nu poate merge la mai mult de 3 etaje, din cauza oscilațiilor parazite care se produc.

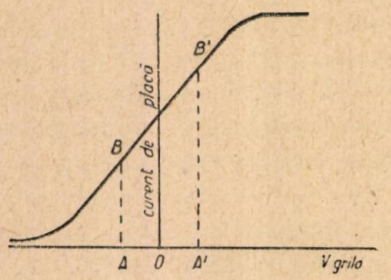


Fig. 25

Un amplificator cu triodă care dă bune rezultate în frecvențe joasă și mijlocie este cel cu rezistență.

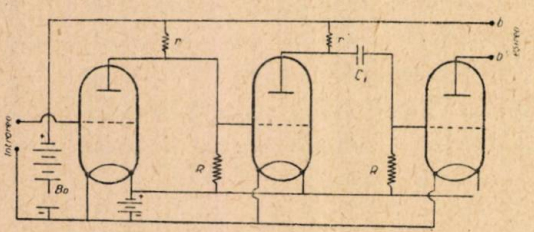


Fig. 26

Este un amplificator cu 3 etaje. În aa' este aplicată tensiunea alternativă de amplificat, în bb' se culege tensiunea amplificată. Principiul este simplu. Variațiile de potențial alternative ale grilei produc variații alternative ale curentului anodic și prin urmare variații de același fel ale diferenței de potențial dela extremitățile rezistenței r. Notând cu i variațiunea curentului anodic, se poate scrie $i = \frac{ku}{r + \rho}$ unde u este variația de potențial a grilei. Atunci tensiunea rezistenței r este $r \cdot i = \frac{ku}{1 + \frac{\rho}{r}}$, r fiind mult mai mare ca ρ (circa 80.000 Ω), urmează că variațiile diferenței de potențial între extremitățile rezistenței r au o amplitudine de k ori mai mare ca aceea a variațiilor de potențial ale grilei. Aceste variații amplificate de prima lampă se transmit prin condensatorul C la a doua lampă unde sunt din nou amplificate și apoi prin condensatorul C' transmise la grila celei de a doua triode pentru amplificare finală.

Dacă factorii de amplificare ai celor trei lămpi sunt k_1, k_2, k_3, atunci factorul de amplificare al amplificatorului este egal cu $k_1 k_2 k_3$.

Cele două sisteme de amplificare examinate mai sus ca și altele amintite doar, dovedesc că în esență amplificarea se datorește unei funcțiuni proprii triodei — funcțiunea de amplificare.

Tehnica și desvoltarea tot mai mare pe care au luat-o telefonia cu fir și radiotelefonia au contribuit la perfecționarea triodei în așa măsură încât lămpile de radio utilizate astăzi seamănă din ce în ce mai puțin cu triodele de acum 20—30 ani.

S'au construit lămpi electronice cu mai mult de trei electrozi, ajungând până la octodă, precum și lămpi complexe care îndeplinesc în același timp mai multe funcțiuni.

Examinarea lor — foarte interesantă de altfel — ar depăși cadrul articolului.

Fără îndoială că evoluția lămpii electronice nu poate fi considerată încheiată și viitorul rezervă desigur multe surprize în acest domeniu.

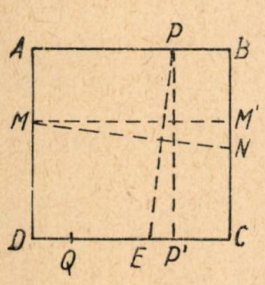
Problema 344

Să se construiască un patrat ale cărui laturi să treacă fiecare prin câte un punct dat.

Câte astfel de patrate se pot construi care să răspundă problemei?

Gh. Nicoară

Soluție. Fie un patrat ABCD. Luăm punctele M, P, N, Q respectiv pe AD, AB, BC, CD. Ducem PE perpendicular pe MN. Triunghiurile NMM' și PEP' sunt egale având $MM' = PP' = AB$ și $\sphericalangle EPP' \sphericalangle NMM'$ (unghiuri cu laturile perpendiculare). Rezultă $PE = MN$.



Când ni se dau punctele M, P, N și Q, pentru a construi patratul ABCD unim M cu N și ducem PE perpendicular cu MN, $PE = MN$.

Unim Q cu E apoi proiectăm punctele M și N pe QE în punctele D și C. Mai departe construcția este evidentă.

Un singur patrat răspunde problemei.

Problema 367

Să se verifice egalitățile:

$$1 + \sqrt{9 + 6\sqrt{2}} = \sqrt{3} + \sqrt{7 + 2\sqrt{6}} = \sqrt{6} + \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = \sqrt{10 + 6\sqrt{2} + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{3}}$$

fără extragerea numerică a rădăcinii patrate.

C. Ionescu-Țiu

Soluție.

$$\sqrt{10 + 6\sqrt{2} + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{3}} = \sqrt{(1 + \sqrt{6} + \sqrt{3})^2} = 1 + \sqrt{6} + \sqrt{3}$$

Ținem seamă de transformarea:

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - C}{2}}$$

unde $C = \sqrt{A^2 - B}$. Avem:

$$1 + \sqrt{9 + 6\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{9 + \sqrt{72}} = 1 + \sqrt{\frac{9 + 3}{2}} + \sqrt{\frac{9 - 3}{2}} = 1 + \sqrt{6} + \sqrt{3};$$

$$\sqrt{3} + \sqrt{7 + 2\sqrt{6}} = \sqrt{3} + \sqrt{7 + \sqrt{24}} = \sqrt{3} + \sqrt{\frac{7 + 5}{2}} + \sqrt{\frac{7 - 5}{2}} = \sqrt{3} + \sqrt{6} + 1;$$

$$\sqrt{6} + \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = \sqrt{6} + \sqrt{4 + \sqrt{12}} = \sqrt{6} + \sqrt{\frac{4 + 2}{2}} + \sqrt{\frac{4 - 2}{2}} = \sqrt{6} + \sqrt{3} + 1$$

Deci egalitățile sunt adevărate.

Problema 368

Să se arate că expresia

$$E = 25^n - 4^{2n} - 9$$

se divide cu 180, unde n este un întreg pozitiv.

Miron Oprea
elev, Târgoviște

Soluție. Să arătăm că trecând dela n la $n + 1$, expresia se mărește cu un multiplu de 180. Avem:

$$E_{n+1} - E_n = 25^{n+1} - 4^{2n+2} - 9 - 25^n + 4^{2n} + 9 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5\,(2 \cdot 5^{2n} - 1 - 4^{2n} - 1) =$$
$$= 2^2 \cdot 3 \cdot 5\,[2\,(2 \cdot 3 - 1)^{2n-1} - (3 + 1)^{2n-1}] =$$
$$= 2^2 \cdot 3 \cdot 5\,(M\,3 - 2 - M\,3 - 1) =$$
$$= 2^2 \cdot 3 \cdot 5\,(M\,3 - 3) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot M3 = M\,180.$$

Problema 369

Dacă a, b, c sunt laturile unui triunghiu și avem relația:

$$\frac{a}{c} = \frac{b^2 + (a - c)^2}{b^2 - (a - c)^2}$$

să se arate că triunghiul este dreptunghic.

Gh. Bercea
elev, Oravița

Soluție. Ținând seamă de proprietățile rapoartelor obținem:

$$\frac{a - c}{c} = \frac{2(a - c)^2}{b^2 - (a - c)^2}$$

și simplificând cu $(a - c) \neq 0$, avem

$$\frac{1}{c} = \frac{2\,(a - c)}{b^2 - (a - c)^2}$$

Egalând produsul mezilor cu produsul extremilor avem:

$$2ac - 2c^2 = b^2 - a^2 - c^2 + 2ac$$

sau

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Problema 396

Razele ultraviolete cu lungimea de undă $\lambda = 3341\ \mathring{A}$ *cad pe un metal şi produc fenomenul fotoelectronic. Ştiind că 20% din energia adusă de foton se cheltueşte pentru a smulge electronul din metal, să se determine viteza cu care ies electronii din metal.*

(Se dă $c = 3.10^{10}$ *cm/s,* $m_e = 0,9.10^{-27}$ *gr şi* $h = 6,55.10^{-27}$ *ergi/s.*

Mihail Stănescu
elev, Bucureşti

Soluţie. Calculăm frecvenţa ν prin formula

$$\nu = \frac{c}{\lambda}.$$

Obţinem:

$$\nu = \frac{3 \cdot 10^{18}}{3341}.$$

Mai avem:

$$h\nu = w + \frac{m_e v^2}{2}.$$

Insă $w = 0,20\ h\nu$ aşa că relaţia devine:

$$0,80\ h\nu = \frac{m_e v^2}{2}$$

de unde:

$$v^2 = \frac{1,6\ h\nu}{m_e} = \frac{1,6 \cdot 6,55.3.10^{18}}{0,9.3341}$$

$$2 \log v = 0,20412 + 0,81624 + 18 -$$
$$-\bar{1},47712 - 3,52388$$
$$\log v = 8,00968$$
$$v = 1,02253.10^8 \text{ cm/s}$$
$$v = 1022,53 \text{ km/s}.$$

Problema 399

Prin disolvarea a 7,965 antracen în 100 gr benzen, temperatura de fierbere a benzenului s'a ridicat cu 1,15°.

1. *Să se determine greutatea moleculară a antracenului cunoscând constanta ebulioscopică (creşterea punctului de fierbere corespunzătoare disolvării a 1 mol. substanţă în 1000 gr. solvent) a benzenului egală cu 2,57°.*

2. *Această soluţie a îngheţat la 3,176°. Ştiind că benzenul pur îngheaţă la 5,5°, să se calculeze constanta crioscopică a benzenului (scăderea punctului de congelare corespunzătoare disolvării a 1 mol. substanţă în 1000 gr. solvent).*

George Scurtu
elev, Galaţi

Soluţie. 1. Fie x greutatea moleculară a antracenului. Putem calcula pe x prin regula compusă.

$$1,15 \ldots 700 \ldots 7,965$$
$$2,57 \ldots 1000 \ldots x$$
$$x = \frac{7,965 \times 1000 \times 2,57}{100 \times 1,15} = 178 \text{ gr.}$$

2. Fie y constanta crioscopică a benzenului. O calculăm tot prin regula de mai sus.

$$7,965 \ldots 100 \ldots 5,5 - 3,176$$
$$178 \ldots 1000 \ldots y$$
$$y = \frac{100 \times 2,324 \times 178}{1000 \times 7,965} = 5°,193$$

Problema 401

O maşină termică consumă pe fiecare oră $m = 0\ 75$ *kg combustibil, care degajă prin ardere* $Q = 6000$ *k cal. de fiecare kilogram. Care este randamentul maşinii dacă lucrul mecanic efectuat de maşină într'o oră este de 2250 watt?*

C. F. F. F. B.

Soluţie. Lucrul consumat de maşină, în kgm, este:

$$L_e = 0,75 \times 6000 \times 427 \text{ kgm.}$$

iar lucrul efectuat, tot în kgm,

$$L_c = 2250 \times 8600 \times \frac{1}{9,81} \text{ kgm.}$$

Randamentul maşinii este deci:

$$r = \frac{L_e}{L_c} = \frac{2250 \times 3600}{0,75 \times 6000 \times 427 \times 9,81}$$
$$r = 0,4297 \cong 43\%.$$

Problema 402

Să se arate că a, b, c, fiind laturile unui triunghiu oarecare şi x, y, z numere reale oarecare avem:

$$a(1 + yz)\sqrt{1 + x^2} + b(1 + zx)\sqrt{1 + y^2} +$$
$$+ c(1 + xy)\sqrt{1 + z^2} \leqslant$$
$$\leqslant (a + b + c)\sqrt{(1 + x^2)(1 + y^2)(1 + z^2)}$$

C. Ionescu-Ţiu

Soluţie. Considerăm radicalii aritmetici. Să demonstrăm că:

$$(1)\ a(1 + yz)\sqrt{1 + x^2} \leqslant a\sqrt{(1 + x^2)(1 + y^2)(1 + z^2)}$$

Putem simplifica cu a şi cu $\sqrt{1 + x^2}$ şi obţinem:

$$1 + yz \leqslant \sqrt{(1 + y^2)(1 + z^2)}$$

Ridicând la patrat inegalitatea devine:

$$1 + y^2 z^2 + 2yz \leqslant 1 + y^2 + z^2 + y^2 z^2$$

$$y^2 + z^2 - 2yz \leqslant 0$$

$$(y - z)^2 \leqslant 0$$

Inegalitatea de demonstrat, (1) este justă deoarece am obținut o inegalitate evidentă.

Analog se demonstrează că:

$$(2)\quad b(1 + zx)\sqrt{1+y^2} \leqslant b\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)}$$

$$(3)\quad c(1 + xy)\sqrt{1+z^2} \leqslant c\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)}$$

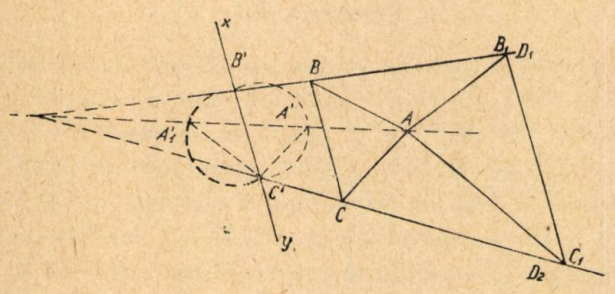
Prin adunarea inegalităților (1), (2), (3), obținem inegalitatea cerută. Egalitatea are loc când $x = y = z$.

Problema 475

Se dau două drepte D_1 *și* D_2 *și un punct fix A. Se cere să se construiască triunghiul ABC cu vârful B pe* D_1 *și vârful C pe* D_2 *cunoscând direcția laturii BC și unghiul A.*

Gh. D. Simionescu

Soluție. Locul geometric al vârfului A al triunghiului, în condițiile problemei, este dreapta ce trece prin intersecția dreptelor D_1, D_2 și prin A (Geometrie, manual unic, cl. IX-a medie, pag. 274, exerc. 289).



Fie B', C' respectiv intersecțiile direcției BC, (xy), cu D_1, D_2.

Triunghiul A'B'C' construit pe B'C' cu $\sphericalangle A' = \sphericalangle A$ și vârful A' pe locul geometric al lui A este asemenea cu ABC.

Vom descrie deci, pe B'C', de ambele părți câte un arc capabil de $\sphericalangle A$ și ducând paralele la B'A', A'C' și $B'A'_1$, $C'A'_1$ prin A obținem soluțiile problemei: ABC și AB_1C_1.

In cazul când D_1 este paralelă cu D_2 locul lui A este o paralelă cu D_1, D_2 iar triunghiurile ABC și AB_1C_1 au laturile în prelungire.

Problema 476

Un generator de curent având f.e.m. de 150 V și rezistența interioară de 0,4 ohmi, alimentează cu curent 10 lămpi, fiecare cu rezistența de 240 ohmi, și 5 lămpi fiecare cu rezistența de 145 ohmi.

Știind că lămpile sunt unite în paralel, iar rezistența firelor conducătoare de curent este de 2,5 ohmi, să se afle tensiunea sub care se găsesc lămpile.

Zn.

Soluție. Rezistența datorită lămpilor este dată de relația

$$\frac{1}{R} = \frac{10}{240} + \frac{5}{145}, \text{ de unde}$$

$$R = \frac{24 \times 29}{24 + 29} = 13{,}13 \text{ ohmi.}$$

Intensitatea curentului furnizat de generator este:

$$I = \frac{E}{r_i + r + R} = \frac{150}{0{,}4 + 2{,}5 + 13{,}13} = 9{,}3 \text{ A.}$$

Tensiunea sub care se găsesc lămpile este deci:

$$U = E - I(r_i + r) = 123{,}03 \text{ Volți.}$$

Problema 480

Să se transforme într'o expresie calculabilă prin logaritmi, expresia:

$$E = \frac{a \sin x + b \cos x}{a \cos x + b \sin x} + \frac{a \sin x - b \cos x}{a \cos x - b \sin x}.$$

Simon Șt. Petre

Soluție. Numărătorul expresiei E este

$$(a \sin x + b \cos x)(a \cos x - b \sin x) +$$

$$+ (a \sin x - b \cos x)(a \cos x + b \sin x) =$$

$$= 2 \sin x \cos x \cdot (a^2 - b^2) = \sin 2x \cdot (a^2 - b^2)$$

Notând $\frac{b}{a} = \operatorname{cotg} \varphi$ avem

$$\sin 2x \cdot (a^2 - b^2) = -a^2 \frac{\sin 2x \cos 2\varphi}{\sin^2 \varphi}.$$

Numitorul expresiei E este

$$a^2 \cos^2 x - b^2 \sin^2 x = a^2\left(\cos^2 x - \frac{b^2}{a^2}\sin^2 x\right).$$

Cu aceeași notație, ca mai sus, avem:

$$a^2\left(\cos^2 x - \frac{b^2}{a^2}\sin^2 x\right) =$$

$$= \frac{a^2}{\sin^2 \varphi}(\sin \varphi \cos x + \cos \varphi \sin x)(\sin \varphi \cos x -$$

$$- \cos \varphi \sin x) = \frac{a^2}{\sin^2 \varphi} \sin (\varphi + x) \sin (\varphi - x)$$

Prin urmare

$$E = \frac{\sin 2x \cos 2\varphi}{\sin (x + \varphi) \sin (x - \varphi)}.$$

Problema 482

O găleată plină cu apă, legată de capătul unei frânghii lungă de 0,5 *m, se rotește în plan vertical. Care este iuțeala cea mai mică cu care trebue rotită căldarea pentru ca la trecerea ei cu fundul în sus prin punctul cel mai înalt, apa să nu cadă din găleată?*

Zn.

Soluție. Pentru ca apa să nu cadă din găleată trebue ca forța centrifugă a mișcării de rotație să fie cel puțin egală cu greutatea apei. De aceea putem scrie:

$$\frac{m V^2}{R} = mg \text{ ; de unde}$$

$$V_{minim} = \sqrt{gR}$$

$$V_{minim} = 2{,}21 \text{ m/sec.}$$

Problema 491

Pe un con de lemn — circular drept — având lungimea bazei L *se așează un cerc de oțel de lungime* l. *Cu cât trebue să fie mai scurt un alt cerc de oțel decât primul, pentru ca porțiunea depe conul de lemn cuprinsă între cele două cercuri să fie a n-a parte din volumul conului?*

Să se demonstreze că dacă așezăm două cercuri de lungime l *și* l′ *pe un con circular drept de bază dată, porțiunea între cele două cercuri este întotdeauna în același raport cu volumul conului oricare ar fi înălțimea sa.*

O. Sacter

Soluție. Fie l' lungimea celui de al doilea cerc. Fie V, v, v' respectiv volumele conurilor ce au ca baze cercurile de lungime L, l, l'.

Raportul a două volume asemenea fiind egal cu cubul raportului a două lungimi omoloage, avem:

$$\frac{v}{V} = \frac{l^3}{L^3} \text{ și } \frac{v'}{V} = \frac{(l')^3}{L^3}$$

de unde

$$v = \frac{l^3 \times V}{L^3} \qquad v' = \frac{l'^3 \times V}{L^3}.$$

Volumul porțiunii cuprinse între cele două cercuri este deci:

$$v - v' = \frac{V(l^3 - l'^3)}{L^3}.$$

Deoarece $\frac{V}{v - v'} = n$ rezultă:

$$\frac{L^3}{l^3 - l'^3} = n, \quad \text{sau}$$

$$l' = \sqrt[3]{l^3 - \frac{L^3}{n}}.$$

Al doilea cerc trebue să fie mai scurt cu

$$l - l' = l - \sqrt[3]{l^3 - \frac{1}{n} L^3}.$$

Se observă că am justificat și partea finală a enunțului, deoarece am văzut că

$$\frac{v - v'}{V} = \frac{l^3 - l'^3}{L^3} = \text{constant.}$$

Problema 497

O sferă de metal are volumul de 1,8 dm^3 *la temperatura* 12° C. *Sfera este încălzită până ce volumul ei devine* 1815,973 cm^3 *și apoi este introdusă într'un vas cu* 4 *kg apă, care-și ridică temperatura la* 24° C. *Știind că temperatura inițială a apei este de* 12° C, *că greutatea sferei este de* 20.475 *g.; iar căldura specifică a metalului din care-i făcută sfera este de* 0,03, *să se afle temperatura la care a fost încălzită sfera și din ce metal este făcută ea.*

C. Ionescu-Timuș

Soluție. Notând cu t temperatura la care a fost încălzită sfera avem:

$$20.475 \times 0{,}03\ (t - 24^0) = 4000 \times 1\ (24^0 - 12^0)$$

de unde

$$t = 78^0{,}144 + 24^0 - 102^0{,}144 \text{ C.}$$

Calculând constantele fizice ale elementului din care este făcută sfera și consultând o tabelă cu

constantele fizice ale elementelor, găsim metalul din care este făcută sfera. Avem:

$$1{,}815.973 - 1{,}8\,[1 + (102{,}144 - 12)\,\beta]$$

unde β este coeficientul de dilatare cubică. Rezultă

$$\beta = 0{,}000.098$$

iar coeficientul de dilatare lineară

$$\alpha \cong \frac{1}{3}\beta = 0{,}000.032$$

Mai avem:

$$d_{12} = \frac{20.475}{1800} = 11{,}375\ \text{gr/cm}^3,$$

$$d_{12} = \frac{d_{12}(1 + 12\,\beta)}{(1 + 20\,\beta)} = 11{,}36\ \text{gr/cm}^3 r$$

In rezumat

$$c = 0{,}03;\quad \alpha = 0{,}000.032;\quad d_{20} = 11{,}36$$

Sfera este făcută din plumb.

Problema 501

O cameră de minge de foot-ball este umflată dela o temperatură de 1^0, *până la presiunea de* 1,2 *atmosfere.*

Ştiind că această cameră nu rezistă la o presiune mai mare de 1,6 *atmosfere, să se determine care este temperatura maximă la care se poate supune aerul din interior.*

Anastasiu E. Dinu
elev, Bucureşti

Soluţie. Aerul din cameră păstrându-şi volumul constant, vom avea:

$$P_{1^0} = P_{0^0}\,(1 + \alpha), \quad \text{unde} \quad \alpha = \frac{1}{273}\cdot$$

$$P_{t_0} = P_{0^0}\,(1 + \alpha\, t).$$

Eliminând P_{0^0} între cele două relaţii găsim:

$$P_{t^0}\,(1 + \alpha) = P_{1^0}\,(1 + \alpha t)$$

$$1{,}6 + 1{,}6\,\alpha = 1{,}2 + \alpha\, t, \text{ pentru } \alpha = \frac{1}{273}$$

avem:

$$t = 92^0{,}33.$$

Problema 505

Intr'un triunghi ABC *cu toate unghiurile ascuţite ducem înălţimile* AA_1 *şi* BB_1. *Să se arate că:*

$$\frac{AA_1 + AB_1}{BB_1 + BA_1} = \frac{BB_1 - BA_1}{AA_1 - AB_1}$$

şi

$$\frac{AA_1 + BB_1}{AB_1 + BA_1} = \frac{AB_1 - BA_1}{AA_1 - BB_1}$$

C. Ionescu-Ţiu

Soluţie. Putem scrie:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AA_1}^2 + \overline{BA_1}^2 = \overline{BB_1}^2 + \overline{AB_1}^2 \qquad (1)$$

de unde

$$AA_1^2 - AB_1^2 = BB_1^2 - BA_1^2$$

$$(AA_1 + AB_1)\,(AA_1 - AB_1) =$$

$$= (BB_1 + BA_1)\,(BB_1 - BA_1)$$

sau

$$\frac{AA_1 + AB_1}{BB_1 + BA_1} = \frac{BB_1 - BA_1}{AA_1 - AB_1}.$$

Relaţia (1) se mai poate scrie:

$$AA_1^2 - BB_1^2 = \overline{AB_1}^2 - BA_1^2$$

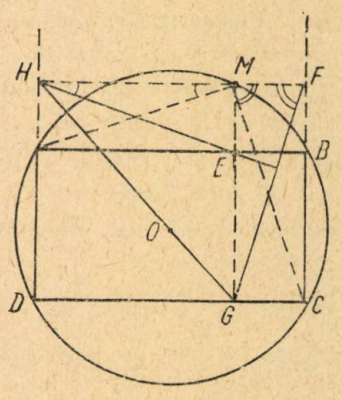
de unde rezultă, analog ca mai sus, relaţia doua.

Problema 508

Fie cercul O *şi dreptunghiul* ABCD *înscris în acest cerc. Dintr'un punct* M *depe cerc ducem perpendicularele la fiecare din laturile dreptunghiului. Vom obţine* 4 *puncte de intersecţie, care sunt vârfurile şi ortocentrul unui triunghi.*

Boboc Nicu
elev, Brăila

Soluţie. Fie E, F, G, H respectiv intersecţiile perpendicularelor cu AB, BC, CD, AD.



Să arătăm că E este ortocentrul triunghiului FGM. Pentru aceasta vom arăta că HE $\perp$ FG. Avem:

$$\sphericalangle EHM = \sphericalangle AMH = 90^0 - \sphericalangle AME;$$

$$\sphericalangle HFG = \sphericalangle CMF = 90^0 - GMC.$$

Prin adunare obţinem:

$$\sphericalangle EHM + \sphericalangle HFG = 180^0 - \sphericalangle AMC = 90^0.$$

Rezultă că HE este înălţime. Punctul E fiind intersecţia a două înălţimi MG şi HE este ortocentrul triunghiului HFG.

Exerciţii

Demonstraţi

$$\left(\frac{125}{64}\right)^{10} < 1000$$

EXERCIŢII ŞI PROBLEME PROPUSE

Probleme

A, B = puncte fixe;
Locul geometric M?

$$\frac{1}{AM} - \frac{1}{BM} = \text{const.}$$

623. Să se determine unghiurile B şi C ale triunghiului ABC, ştiind că laturile lui sunt legate prin relaţia:

$$(a^2 - c^2)^2 = (2c^2 - b^2)$$

şi că unghiul $A = 72^0$.

M. Kraizman

624. Numerele a, b şi c satisfac condiţiile:

$$1 \leqslant a \leqslant b + c < a + 1 \quad \text{şi} \quad b \leqslant c$$

Să se demonstreze că $a - b > 0$.

N. Cernov

625. Să se rezolve ecuaţia

$$\operatorname{arctg} \frac{2}{1-x} - \operatorname{arctg} \frac{4}{2+x} = \operatorname{arctg} 3$$

L. Reizinş

626. Un navigator măsoară cu sextantul unghiurile dintre un astru necunoscut şi stelele: Merak (β Ursae Majoris); Castor (α Geminorum) şi le găseşte respectiv de 69°42′36″ şi 53°04′24″. Se cere să se determine coordonatele ecuatoriale ale astrului necunoscut, ştiind că Merak şi acest astru necunoscut se găsesc de o parte şi de alta a liniei ce uneşte Steaua Polară cu Castor.

Coordonatele ecuatoriale ale stelelor Merak şi Castor sunt respectiv:

$$\alpha_m = 10^h\ 58^m\ 40^s \quad ; \quad \delta_m = +\ 56^0\ 40'$$

$$\alpha_c = 7^h\ 31^m\ 13^s \quad ; \quad \delta_c = +\ 32^0\ 00'24$$

C. V. Costăchescu

527. La transatlanticele mari, consumul de cărbune reprezintă aproximativ 0,6 kg pe cal putere şi oră.

Ce randament au maşinile transatlanticului, ştiind capacitatea calorică a cărbunelui consumat de 7500 K cal/kg.

* * *

628. Pentru iluminarea coridoarelor lungi se execută o astfel de conexiune a conductorilor încât la capetele coridorului se instalează câte un întrerupător. In orice parte am merge, acţionând primul întrerupător se poate aprinde becul şi apoi acţionând pe al doilea se poate stinge.

Să se deseneze o schemă care să satisfacă aceste condiţii şi în acelaşi timp să fie şi economică.

* * *

629. Frecvenţa oscilaţiilor unui camerton este $f = 100$ Hz. Ce frecvenţă percepe urechea unui observator dacă:

a) Camertonul se îndepărtează cu viteza sunetului;

b) Camertonul se apropie cu viteza sunetului;

c) Observatorul se apropie de camerton cu viteza sunetului;

d) Observatorul se depărtează de camerton cu viteza sunetului.

* * *

630. Două mase magnetice m şi $2m$, unde $m = 1000$ *u.c.g.s*, se atrag cu o forţă $F = 600$ mgr. La ce distanţă se află una de cealaltă?

N. Gaiu

631. Un jghiab pentru apă de secţiune trapezoidală are lăţimea udată a fundului de 7 dm şi laturile de câte 3 dm. Se întreabă ce înclinare trebue dată laturilor faţă de fund pentru a obţine o capacitate maximă.

Ioan Gligor

632. Fie trapezul cu laturile paralele AB şi CD; iar E şi F intersecţiile laturii AD cu cercul ce trece prin punctele B, C, D, şi cu paralela dusă din C la BE.

Să se arate că BC este medie geometrică între AD şi EF.

C. Ionescu-Ţiu

633. Se roteşte triunghiul echilateral ABC în jurul laturii BC. Să se arate că volumul V al solidului obţinut este a şasea parte din produsul ariei laterale A a aceluiaşi solid, prin înălţimea h a triunghiului ABC.

N. N. Mihăileanu

634. Să se arate că prelungirea coardei comune a cercurilor descrise pe diagonalele unui trapez ca diametre, trece prin punctul de intersecție al laturilor neparalele.

Petre Stanciu

635. Să se rezolve ecuația.

$$6 \sin^3 x - 5 \sin x + 2 \cos^3 x = 0$$

Ion Zarda
profesor, Câmpina

636. Să se calculeze sumele:

$$S_1 = 1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \ldots + (2n-1)\, x^{n-1}$$

$$S_2 = 1 + 2^2 x + 3^2 x^2 + 4^2 x^3 + \ldots + n^2\, x^{n-1}.$$

Gh. I. Bercea
elev, Oravița

637. Să se verifice inegalitatea

$$2\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} < 3\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

algebric și apoi geometric.

C. Ionescu-Țiu

638. Să se găsească patru patrate perfecte a căror sumă este 1078.

Voiculescu Paul
elev, Slatina

639. Dacă

$$a^2 = f(e^2 - d^2)$$
$$b^2 = e(f^2 - d^2)$$
$$c^2 = d(e^2 - f^2),$$

avem relația

$$a^2\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right) = b^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right) = c^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right) = 1$$

Sălan Nicolae
student

640. Să se verifice identitatea

$$\sum_{1}^{n} n(n+1)(n+2)(n+3) = 24\, C_{n+4}^{5}$$

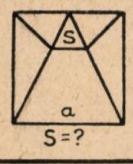
Popescu P. Pavel
elev, Craiova

641. Într'un con este înscrisă o sferă de rază r. Să se găsească volumul conului dacă se știe că planul tangent la sferă și perpendicular pe una din generatoarele conului este la distanța d de vârful conului.

* * *

642. Să se determine unghiul secțiunii axiale ce trece prin vârful unui con circumscris la patru sfere de raze egale, așezate astfel încât fiecare este tangentă la celelalte trei sfere.

* * *



EXERCIȚII PROPUSE PENTRU ÎNVĂȚĂMÂNTUL ELEMENTAR

E. **193.** Prin barele unui cuptor electric trece un curent de 4500 amperi, iar barele au secțiunea de 50 cm², lungimea de 10 metri și rezistivitatea $\rho = 1$. Ce cantitate de căldură se desvoltă în timp de o oră?

Aurelian Diaconescu
elev, București

E. **194.** Dela mina A la locul de preparație B cărbunele este transportat pe funiculare, linia având o lungime în circuit de 16 km, iar capacitatea de încărcare a unui vagonet- funicular este de 500 kg.

Vagonetii sunt așezați la 40 metri distanță unul după altul și fiecare vagonet face un circuit în 2 ore.

Se întreabă câte vagoane cărbune a 15 tone se încarcă la stația B în 24 ore, știind că $\frac{1}{12}$ din numărul vagonetilor transportă lemn și $\frac{1}{50}$ sunt vagoane de control; iar cărbunele prin preparație pierde $\frac{1}{10}$ din greutatea sa.

Alex. Pantea (Oradea)

E. **195.** Circumferința roții din spate a unui vehicul este de două ori mai mare decât circumferința celei din față. Dacă lungimea circumferinței roții din spate se micșorează cu un metru; iar a celei din față se mărește cu un metru, atunci pe distanța de 60 metri, roata din spate va face cu 30 ture mai mult decât cea din față. Să se determine lungimea circumferinței fiecărei roți.

* * *

E. **196.** Un butoi conține un amestec de alcool rafinat cu apă în raportul 2 : 3; iar alt butoi un amestec în raportul 3 : 7. Câți litri trebue luați din fiecare butoi pentru a obține 12 litri de un amestec în raportul 3 : 5.

* * *

E. **197.** Se dă un triunghi oarecare ABC. Un cerc care trece prin vârfurile B și C taie latura AB în punctul B′ și latura AC în punctul C′. Din A se duce perpendiculara AH pe BC și perpendiculara AP pe B′ C′.

Să se arate că unghiurile BAP și CAH sunt egale.

I. Enache (București)

E. **198.** Un robinet umple un bazin în 12 ore, un altul în 9 ore și un altul în 7 ore. In cât timp se umple bazinul dacă au curs timpuri egale două câte două din robinete.

C. I. Ț.

E. **199.** Să se arate că

$$\sqrt{2-\sqrt{3}} < 2\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

C. I. Ț.

E. **200.** Intr'un triunghi dreptunghic ABC, notăm cu a, b, c și h_a respectiv ipotenuza, catetele și înălțimea dusă din vârful A. Să se arate că:

$$\frac{b \cdot c}{h_a} + \frac{h_a \cdot b}{c} + \frac{h_a \cdot c}{b} = 2a$$

Gh. I. Bercea elev, Oravița

E. **201.** Intr'un bazin pot să curgă trei robinete și anume: primul cu apă de 16° care poate umple singur bazinul în două ore, al doilea cu apă caldă de 36° care poate umple singur bazinul în trei ore, iar al treilea cu apă fierbinte de 84° care poate să umple singur bazinul în șase ore.

Dacă lăsăm deodată cele trei robinete să curgă, care va fi temperatura apei când bazinul va fi plin?

Dinu I. Schileru
elev, București

E. **202.** Din portul Constanța pleacă 4 vapoare în diferite direcții. Primul pleacă din 6 în 6 zile, al doilea din 9 în 9 zile, al treilea din 15 în 15 zile și al patrulea din 24 în 24 zile. La 1 Martie au plecat toate din port. In ce zi vor mai fi din nou toate în port?

* * *

$x = 1 + \frac{1}{x}$

PAGINA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

S'au mai evidențiat prin rezolvări de probleme din Revista Matematică și Fizică, primite în cursul lunii Iunie 1952: Namdovan Virgil (clasa X-a Pitești), *Decu Dorel* (Brăila), *Weszely Tiberiu* (clasa IX-a Târgu Mureș), *Anton Vasile* (Lic. 5 băieți București), *Bocu Mircea* (clasa VIII-a Oradea), *Ionescu V. Savin* (clasa IX-a Pitești), *Muedin Sureia* (Școala hidrotehnică Constanța), *Culiță T. Cezar* (Focșani), *Istrate I. Mircea* (Focșani(), *Oprea A. Aurelian* (clasa VII-a Târgoviște), *Șerbănescu Dinu* (București) și *Cazanacli P. Nicolae* (clasa IX-a Craiova).

* * *

In cursul lunii Iunie 1952 *s'au primit soluții bune la cel puțin cinci probleme dela*:

ALEXANDRIA. Clasa X-a Cârdea Constantin (505, 506, 533, 536, 537, 541).

AIUD (Reg. Cluj). Clasa VIII-a. Petrescu Vasile (502, 506, 515, 517, 518, 520, 522, 533, 536, 537, 541, 543, P).

ARAD. Clasa IX-a B. Pușcașu Sabina (412, 427 505, 518, 522, 536), Sasu Aurora (505, 525, 537, 540, 541, 542).

BACĂU. Clasa XI-a A. Ardeleanu Eduard (348, 351, 505, 512, 514, P), Saveluc Virgil (350, 503, 512, 522, 536, 537), Schulem M. (518, 520, 522, 536 537), Tofan Ion (449, 506, 515, 520, 523, 536, 537, 538, 540, P), Velincov D. Ioan (307, 325, 358, 369, 371, 407, 416, 514, 518, 536, 541, 578, E: 51, 60, 64, 70, 83, 109, 147).

BAIA MARE. Cadar Ioan (265, 298, 323, 364, 368, 388, 436, 440, 471, 550, 560, 576, 578, 583, E: 157). Clasa XI-a A. Couți Romulus (325, 364, 388, 443, 469, 471, 520 536, 541, 545, 567, 576, 578, E: 34, 35, 50).

BRĂILA. Bichir Constantin (533, 536, E: 156, 157, 159, 163), Clasa XI-a Decu Dorel (298, 301, 344, 372, 375, 377, 379, 386, 390, 392, 406, 419, 420, 426, 437, 439, 444, 459, 474, 476, 485, 504, 505, 506, 507, 516, 517, 518, 520, 523, 528, 530, 533, 534, 536, 537, 543, P).

BÂRLAD. Clasa VII-a Bichir Ilie (E: 148, 155, 156, 157, 158, 160, 161, 163, 164, P), clasa X-a Bichir Ionel (341, 342, 344, 348, 349, 358, 372, 382, 388, 512, 513, 514, 515, 516, 517, 518, 520, 536, P).

BUCECEA (Botoșani. Clasa VII-a Ionescu Mihai (E: 156, 157, 159, 161, 163).

BUCUREȘTI. Liceul 1 băieți: clasa IX-a B. Petcu C. Nicolae (268, 269, 297, 321, 324, 333, 364, 386, 392, 404, 416, 443, 484, 505, 525, 533, 536, 537, 540), Oprea Constantin (388, 426, 441, 506, 578, E: 158). Liceul 2 băieți. Clasa VII-a A: Bonoiu Gr. Vasile (E: 20, 35, 36, 58, 156, 160, 165), Clasa IX-a B: Medar D. Ion (260, 263, 268, 269, 348, 363, 364, 443, 484, 485, 490, 536, 541). Liceul 5 băieți. Clasa X-a A: Anton Vasile (242, 245, 264, 268, 269, 270, 271, 278, 290, 297, 303, 313, 321, 323, 324, 228, 329, 333, 340, 353, 354, 363, 367, 368, 369, 371, 374, 386, 389, 404, 407, 410, 413, 415, 416, 429, 431, 444, 448, 465, 466, 480, 499, 506, 514, 517, 520, 550). Liceul 10 băieți. Clasa X-a C: Șincan Corneliu (371, 388, 398, 426, 443, 446, 454, 461, 477, 486, 487, 574, E: 132, 165, 166, 171, P). Liceul « I. L. Caragiale ». Clasa XI-a. Șerbănescu Dinu (290, 297, 303, 350, 354, 427, 432 449, 454, 456, 457, 461, 466, 471, 474, 480, 484, 485, 488, 495, 496, 499, 505, 506, 514, 517, 518, 520, 521, 522, 523, 525) Școala elementară 4 băieți. Clasa VII-a Schileru I. Dinu (568, E: 156, 157, 158, 159, 165, 166, 168, 169, 170, 171, 172, P). Școala medie de Statistică. Anul I A. Badea Maria (E: 131, 132, 137, 156, 160).

BUZĂU. Clasa VIII-a Cucu P. Dan (353, 369, 536, 537, 541, E: 157, 159, 163, 186). Clasa IX-a. Badea N. Alexandru (358, 368, 371, 387, 388, 390, 391, 392, 432, 443, 457, 458, 466, 468, 480, 499, 514, 518, 520, P). Coman Ovidiu (270 290, 333, 353, 369, 374, 514, 536, 540, 541, P). Golianu Petru (444, 536, 541, E: 156, 157, P). Stoicescu T. Dumitru (322, 324, 348, 353, 367, 442, 439, 434, 455, 518, 520, 525, 536, 537, 540, 541, 542, P). Clasa X-a: Găloiu Vespasian (358, 367, 369, 371, 375, 387, 388, 392, 466, 512, 514, 520, 541).

CÂMPULUNG (Muscel). Clasa IX-a Marinescu I. Nicolae (379, 386, 398, 512, 516, 517, 518, 522, 536, 537).

CLUJ. Școala specială de 2 ani. Muscalu C. Ștefan (517, 540, 542, E: 155, 156); Liceul băieți, clasa IX-a: Covrig Basil (407, 465, 506, 517, 536, 541, P). Clasa X-a: Barbu Dănilă (516, 537, 538, E: 155, 156), Grecu Dan (512, 518 536, 537, 541), Clasa XI-a: Damaschin Sergiu (404, 406, 413, 420, 457).

CONSTANȚA. Școala medie tehnică de lucrări edilitare Fotescu Nicolae (568, 578, E: 156, 164, 171,). Școala hidrotehnică: Ionescu I. Ion (517, 535, 536, 537, E: 156, 157, 164), Muedin Sureia (264, 265, 274, 280, 320, 323, 321, 324, 329, 449, 492, 528, 529, 530, 531, 532, 533, 534, 535, 536 537, 538, 539, 540, 541, 542, 543, 544).

CORABIA. Clasa VIII-a: Popescu Alexandru (392, 518, 537, E: 156, 164).

COSTEASCA (Argeș). Dinescu T. Alexandru (426, 435, 439, 454, 472, 476, 486, 504).

CRAIOVA. Clasa VIII-a: Cetățeanu Cecilia (518, 537, E: 51, 53, 92); Clasa IX-a A. Cazanacli P. Nicolae (358, 363, 364, 367, 368, 369, 370, 371, 374, 380, 432, 436, 440, 449, 456, 466, 471, 480, 488, 522, 532, 533, 536, 537, 541). Clasa XI-a: Popescu Steluța (505, 506, 507, 508, 518, 536, P), Sârbu I. Ovidiu (386, 415, 440, 472, 479, 506, 550, 578, E: 53, 92, 129).

CURTEA DE ARGEȘ. Boncea Vasile (432, 461, 535, 536, 537, 540, 541).

DOROHOI. Scurtelnicu C. (457, 461, 466, 468, 484, 503, 517, E: 120).

FĂGĂRAȘ. Clasa X-a: Burlea Gavrilă (461, 504, 512 517, 525, 543, E: 156, 158, 160, 161, P).

FOCȘANI. Clasa IX-a C. Ion D. Ion (364, 386, 375, 379, 427, 429, 438, 439, 443, 415, 522, 528, 530, 533, 539, 540, 554, 561, 568, 583, P). Clasa X-a: Istrate I. Mircea, (236, 286, 301, 303, 324, 331, 333, 359, 361, 363, 372, 373, 410, 413, 416, 424, 433, 436, 440, 441, 454, 456, 466, 472, 520, 523, 525, 535, 536, 537, P), Culiță T. Cezar (296, 326, 337, 344, 349, 351, 359, 363, 381, 426, 430, 436, 441, 445, 448,

456, 501, 503, 505, 506, 507, 508, 512, 514, 516, 517, 518, 520, 525, 535, 536, 537).

GIURGIU. Bigan Stan (536, E: 156, 157, 158, 159, 160, 161), Clasa IX-a C: Fotă M. Stan (297, 292, 325, 333, 335, 347, 375, 377, 379, 390, 398, 404, 407, 449, 466, 486, 503, 510, 530, 537, 539, 543, E: 111, 116, 121, 122, 123, 124, 125), Petcu I. Dumitru (401, 422, 518, 525, 574, E: 121, 156, 157, 161).

IAŞI. Clasa X-a B. Ursache Eugeniu (242, 246, 498, 501, 503, 528, 533, 536, 537, 540, 541, 550, 554, P). Clasa IX-a B. Ciobanu M. (583, E: 98, 165, 163, 171).

IBANEŞTI (Mureş). Clasa VI-a Sasu E. Dorin (E: 155, 156, 157, 160, 161,)

MEDIAŞ. Clasa X-a: Varga Constantin (501, 512, 522, 525, 540, 542).

ORADEA. Clasa VII-a: Bocu Monica (E: 150, 153, 155, 156, 157, 159, 160, 161, 163, 164); Clasa VIII-a A: Bocu Mircea (375, 377, 379, 382, 383, 386, 387, 388, 389, 390, 392, 398, 401, 403, 404, 415, 416, 443, 444, 445, 448, 449, 450, 461, 468, 478, 482, 484, 485, 489, 498).

PITEŞTI. Şcoala medie tehnică metalurgică: Bărbulescu T. Alexandru (339, 399, 506, 514, 534, 540, 541), Dinescu Gheorghe (245, 305, 322, 399, 534, 540, 541); Liceul de băieţi. Clasa IX-a A: Ionescu V. Savin (265, 276, 278, 289, 290, 291, 307, 375, 379, 386, 392, 398, 401, 403, 404, 422, 484, 486, 497, 501, 518, 522, 523, 525, 536, 540, 541, 542, 543,); Clasa X-a: Namdovan Virgil (270, 305, 323, 333, 336, 346, 348, 368, 375, 379, 386, 387, 388, 390, 392, 398, 401, 411, 422, 423, 426, 427, 428, 429, 423, 433, 434, 436, 437, 439, 443, 447, 448, 453, 454, 456, 461, 462, 465, 466, 476, 481, 484, 487, 488, 493, 496, 497, 499, 501, 503, 512, 516, 517, 525, 530, 536, 540, 541, 543).

PLOEŞTI. Clasa IX-a A: Făgăraş Constantin (363, 379, 387, 445, 457, 479, 480, 481, 484, 489, 495, 503, 514, 518, 522, 525, 528, 536, 537, 540, 541, P), Mihai Iulian (269, 270, 458, 464, 479, 484, 499, 512, 550, 563), Puşcaşu Alexandru 345, 422, 429, 445, 497, 503, 505, 506, 514, 517).

RĂDĂUŢI. Clasa IX-a. Botezat Radu (503, 505, 506, 517, 522, 525, 536, E: 155, 156, 157, 160, 163).

REŞIŢA. Clasa IX-a: Popescu Alex. Dan (245, 264, 265, 269, 270, 278, 290, 292, 298, 299, 307, 314, 321, 324, 335, 336, 438, 443, 503, 536, 542, E: 105, 163).

SIBIU. Reghintovschi Vasile (505, 507, 518, 523, 534, 548, 563, 577, E: 157, 164, 165, 170, 171, 172).

SLATINA. Cochinţoiu St. Ioan (362, 16, 512, 541, 543, E: 156, 160, 161, P), Voiculescu Paul (268, 278, 328, 384, 405, 407, 414, 419, 420, 457, 459, 479, 507, 519, 528, 533, 554, 559, 562, 563, P).

TÂRGOVIŞTE. Clasa VII-a: Stoian I. Gheorghe (386, 404, E: 70, 72, 99, 105, 107, 109, 121, 135, 142, 149, 154, 60, 161, P), Oprea A. Aureliu (307, 372, 386, 390, 392, 404, 448, 505, 509, E: 121, 123, 129, 135, 136, 137, 138, 143, 146, 152, 153); Clasa VIII-a: Sipoteanu A. Ion (525, 536, 537, E: 155, 156, 157, 159); Clasa IX-a Petrescu I. Constantin (315, 346, 364, 369, 375, 379, 386, 422, 439, 443); Clasa X-a: Amuza Gheorghe (429, 432, 437, 512, 514, 523, 525), Andreescu C. (301, 305, 359, 374, 398, 436, 437, 471, 487, 512, 532, 536, 540, 541, 544, 548, 550, 554, 564, Bălescu G. Eftimie (374, 387, 410, 411, 440, 484, 485, 550' 559, 578), Brezeanu Ionim (290, 306, 448, 461, 466, 487, 554, 563, E: 69, 70, 89, 95, 137, 138, 142, 147, 156, 157, 160). Dobrescu Andrei (272, 274, 282, 287, 301, 312, 313, 321, 322, 324, 325, 339, 348, 357, 361, 393, 404, 406, 410, 414, 417, 436, 437, 439, 440, P), Oprea A. Constantin (369, 379, 380, 401, 404, 405, 420, P); Clasa XI-a: Oprea A. Niculae (501, 502, 503, 505, 507, 508, 509, 510,), Stroe R. Dumitru (419, 475, 483, 484, 495, 499, 500, 505, 508, 512).

TÂRGU-JIU. Clasa VIII-a: Borcan Al. Marcel (517, E: 157, 159, 160, 165), Casinschi Dragoş 439, 518, E: 155, 165, 166, 169, 170), Clonda Ovidiu (517, E. 69, 72, 88, 99, 138, 139, 153, 156, 157, 159, 160) — Râcă Gheorghe (449, 459, 463, 484, E: 155, 160).

TÂRGU-MUREŞ. Clasa IX-a: Weszely Tiberiu (268, 329, 367, 372, 375, 404, 407, 410, 415, 422, 441, 449, 457, 458, 459, 463, 464, 475, 485, 500, 501, 505, 507,508, 518, 519, 522, 523, 528, 533, 536, 537, 545, 552, 560, 561,).

TECUCI. Clasa XI-a: Popa Dumitru (518, 525, 536, 541, E: 156, 157, 158, 160, 161).

TIMIŞOARA. Şcoala Pedagogică. Rathenştein I. Clara (517, 521, 547, 548, 551, P). Clasa X-a liceu; Pascu Pavel (456, 457, 459, 461, 466).

TURNU-MĂGURELE. Clasa IX-a; Voiculescu P. Stelian (501, 518, 525, 536, 540, E: 156, 157, 160).

* * *

Redactarea problemelor. Pe aceeaşi foaie de formatul caietului obişnuit, se va rezolva câte o singură problemă. Soluţia să fie însoţită de numărul şi enunţul problemei. Se poate scrie în continuare şi pe contrapagină; iar dacă soluţia necesită figură, se va desena cu îngrijire şi se va anexa. Nu se vor trimite soluţiile mai multor probleme pe aceeaşi foaie.

Rezolvitorul va scrie, pe fiecare soluţie, numele, şcoala, clasa şi localitatea. Soluţiile trimise să nu fie copiate unele după altele.

Se mai primesc soluţii şi la problemele propuse în anul 1951 şi nerezolvate încă în paginile revistei (vezi tabla de materii IV. 6 din Nr. 12, anul II).

Problemele ce se propun de către colaboratorii revistei să fie clar compuse şi însoţite de soluţii, să fie personale şi nu luate din cărţi sau reviste.

REVISTA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

ORGAN AL SOCIETĂŢII DE ŞTIINŢE MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R.

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

APARE SUB ÎNGRIJIREA UNUI SECRETARIAT DE REDACŢIE

REDACŢIA: STR. DIONISIE LUPU, 40. Parter. — BUCUREŞTI
RAIONUL STALIN

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică şi fizică a şcolilor, precum şi orice material informativ care ar interesa redacţia noastră

se vor trimite pe adresa de mai sus

ABONAMENTE:

Tarif general ... ... *Lei 60*

Tarif redus pentru elevi, studenţi şi profesori ... ... *Lei 10*

Abonamentele se fac numai prin:

Centrul de Difuzare a Presei

Pentru Bucureşti: Str. Const. Mille Nr. 14 — Telef. 5.28.90

Pentru Provincie: Centrul de Difuzare a Presei din Capitalele Regiunilor sau Raioanelor — Banca de Stat în Contul C.D.P. Nr. 038.068

CĂRŢI APARUTE IN

M.I.M.I.C.

Curs de Matematică

Vol. I 400 pag. — 6,81 lei
Vol. II 340 pag. — 6,81 lei

ALEXANDROV:

Probleme de construcţii geometrice
(traducere din limba rusă)

212 pag. — 7,65 lei

MINISTERUL COMERŢULUI INTERIOR

Matematici economice

261 pag. — 11,70 lei

MINISTERUL COMERŢULUI INTERIOR

Manualul de calculaţii economice

170 pag. — 8,50 lei

MINISTERUL INVĂŢĂMÂNTULUI PUBLIC

Curs de matematici

400 pag. — 7,80 lei

Desenul tehnic

Vol. I 212 pag. — 8,50 lei
Vol. II 356 pag. — 10,63 lei

M.I.M.I.C.

Desenul tehnic

Vol. I 132 pag. 4,25 lei
Vol. II 152 pag. 3,40 lei
Vol. III 112 pag. 3,80 lei

EDITURA TEHNICĂ

ÎNTREPRINDEREA POLIGRAFICĂ Nr. 4. — C. 2091.

Lei 1.—

E 1426

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE ȘI FIZICE DIN R.P.R.

KAT
BIBLIOTECA I. D. T.
ELLENŐRIZVE 1952

REVISTA MATEMATICĂ și FIZICĂ

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

★

Tineri și tinere! Noul an școlar să însemne pentru voi un pas înainte în cucerirea științei. Fiți pătrunși de flacăra patriotismului și munciți cu hotărîre și perseverență pentru a vă însuși cunoștințe temeinice, necesare construirii socialismului în Patria noastră.

★ ★

SEPTEMBRIE

1952 9

EDITURA TEHNICĂ

REVISTA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

SUMARUL:

Pag.

1. *Transformarea prin polare reciproce de Dan G. Ionescu* ... 209
2. *Efectul fotoelectric şi aplicaţiile lui de Virgil Atanasiu* ... 214
3. *Să construim cu mijloace proprii modele şi aparate de fizică* ... 222
4. *Probleme rezolvate (208, 251, 265, 361, 363, 365, 388, 390, 400, 407, 411, 412* ... 223
5. *Exerciţii şi probleme propuse* ... 229
6. *Exerciţii propuse pentru Inv. elementar* ... 230
7. *Pagina rezolvitorilor de probleme* ... 231

9

ANUL III SEPT. 1952

4819
BIBLIOTECA I. D. T.

REVISTA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ
PUBLICAŢIE PENTRU TINERET A SOCIETĂŢII DE MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ DIN R.P.R.
Anul III, Nr. 9 Septembrie 1952

Országos Műszaki Könyvtár TULAJDONA
ELLENŐRIZVE 1953

TRANSFORMAREA PRIN POLARE RECIPROCE

Dan Gh. Ionescu, student

I. *Transformări geometrice*

1. Să ne închipuim că un profesor explică elevilor săi proprietăţile cercului înscris într'un triunghiu. El va desena pe tablă un triunghiu şi fiecare elev va trasa în caietul său un triunghiu, mai mic decât cel depe tablă şi pe care să-l presupunem şi *asemenea* aceluia. Elevul poate urmări pe figura din caiet întru totul raţionamentul făcut de profesor pe tablă, pentru a dovedi, de exemplu, că centrul cercului coincide cu punctul de întâlnire al bisectoarelor. Mai mult, el poate face acest raţionament acasă, după ce figura din caiet a fost supusă mişcării, adică a suferit translaţii şi rotaţii. In fine, raţionamentul rămâne valabil şi pentru o figură simetrică, pe care elevul o poate desena pe caietul său.

Iată dar o proprietate care a rămas valabilă după ce asupra figurii iniţiale s'au efectuat o serie de transformări, precum: translaţii, rotaţii, simetrii, asemănări. Dar există şi proprietăţi ale triunghiului de pe tablă, pe care nu le mai regăsim în caietul elevului; de exemplu, lungimile laturilor omoloage sunt diferite. Pe de altă parte, există şi alte transformări decât cele amintite şi e posibil ca o proprietate să fie invariantă sau nu, după transformarea pe care o efectuăm.

Suntem astfel conduşi la studiul consecinţelor pe care transformările geometrice le au asupra figurilor. Dar, pe lângă aspectul lor teoretic, aceste cercetări au o importanţă practică, deoarece transformările au aplicaţii în tehnică — în special în studiul mecanismelor[1]). In acest paragraf, vom prezenta câteva noţiuni de bază ale transformărilor geometrice.

2. Se numeşte *transformare* a mulţimii tuturor punctelor planului (sau spaţiului) o corespondenţă prin care fiecărui punct al planului (sau al spaţiului) i se asociază un punct sau o linie în plan (sau un punct, o linie sau o suprafaţă în spaţiu). Prin urmare, printr'o anumită lege, noi putem stabili o legătură între elementele a două figuri geometrice. Figura obţinută, aplicând unei figuri o transformare se numeşte *transformata* acesteia. Două figuri se zic *corelative în plan*, dacă există o lege astfel ca unui punct al uneia să-i corespundă un punct sau o linie în cealaltă şi reciproc. La fel, vom numi figuri *corelative în spaţiu* două figuri în spaţiu pentru care putem găsi o lege astfel ca oricărui punct al unuia să-i corespundă un punct, o linie sau o suprafaţă în cealaltă şi reciproc.

Dacă, date două figuri plane sau în spaţiu, fiecărui punct al uneia îi corespunde un punct în cealaltă, transformarea se numeşte *punctuală*. Sunt cunoscute în şcoale medie următoarele transformări punctuale:

α) Translaţia
β) Rotaţia
γ) Simetria
δ) Asemănarea.

3. Am dat ca exemplu o proprietate care rămâne invariantă când efectuăm anumite transformări; să considerăm cazul general.

Vom numi *proprietăţi geometrice* acele proprietăţi ale figurilor geometrice care nu se schimbă (rămân invariante) prin efectuarea următoarelor tranformări în plan:

α) Translaţie (paralel cu o dreaptă);
β) Rotaţie (în jurul unui punct);
γ) Simetrie (faţă de o dreaptă);
δ) Omotetie[1]) (de centru şi raport oarecare).

Celelalte proprietăţi ale figurilor geometrice le vom numi *metrice*.

4. Aceste noţiuni ne sunt suficiente pentru înţelegerea celor ce vor urma. Credem totuşi că nu e lipsit de interes să arătăm cum se pune problema

[1]) Vezi articolul «Câteva aplicaţii tehnice ale transformărilor geometrice», de A. Kahane, în R.M.F., anul II, Nr. 3, Martie 1951.

[1]) Omotetia este transformarea care face ca, dat un punct O numit centru şi un raport K, fiecărui punct A să-i corespundă punctul A′ situat pe OA şi astfel ca $OA' = K \times OA$.

prin introducerea noțiunii moderne de *grup*, despre care s'a mai vorbit în R.M.F. [1]).

Asupra unei figuri plane, noi putem efectua nu numai una din transformările arătate la punctul 3, ci putem imagina diferite combinații ale lor, pe care le putem efectua succesiv; de exemplu: două translații și o rotație, sau: o omotetie, o translație și două rotații. Suntem astfel conduși la a considera mulțimea tuturor transformărilor obținute din cele inițiale, făcând toate combinațiile ce le putem imagina. Se poate arăta că această mulțime îndeplinește condițiile pentru ca să fie un *grup*; în cazul nostru avem un *grup de transformări* și noi îl vom numi *grupul principal* G_2 *al geometriei elementare plane*. Caracteristica fundamentală a acestui grup este că prin aplicarea oricărei transformări conținută în el, transformata obținută are aceleași proprietăți geometrice ca figura inițială. *Geometria elementară plană constă în cercetarea acelor proprietăți ale figurilor geometrice, ce rămân invariante prin efectarea transformărilor din grupul* G_2.

Putem extinde aceste considerații la spațiu și defini un grup de transformări G_3 pe care să-l numim *grup principal al geometriei elementare în spațiu* și care este format din transformările următoare și din orice combinație a lor:

α) Translații (paralele cu un plan);
β) Rotații (în jurul unei drepte);
γ) Simetrii (în raport cu un plan);
δ) Omotetii (de centru și raport oarecare).

Geometria elementară în spațiu constă în studierea acelor proprietăți ale figurilor geometrice care rămân invariante prin efectuarea transformărilor grupului G_3.

5. Vom prezenta acum o transformare deosebită de cele amintite până aici și care ne conduce la o metodă remarcabilă de investigație a proprietăților geometrice ale figurilor. Această transformare, numită *prin polare reciproce* este caracteristică metodelor de cercetare ale geometriei moderne.

II. *Diviziune armonică*

6. *Definiții.* Date punctele A,B,C,D pe o dreaptă (Fig. 1), se spune că C și D *divid armonic segmentul* AB, dacă avem relația

$$\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB}$$

[1]) Pentru înțelegerea acestui punct, recomandăm cetirea prealabilă a articolului «Noțiunea de grup în Matematici» de E. Rusu, din R.M.F., Anul III, Nr. 5, Mai 1952.

Punctele C și D se numesc *conjugate armonic* în raport cu A și B și reciproc; cele patru puncte A, B, C, D formează o *diviziune armonică*. Dacă unim un punct oarecare 0 al planului cu cele patru ale unei diviziuni armonice, obținem un sistem de patru drepte concurente care alcătuesc un *fascicol*

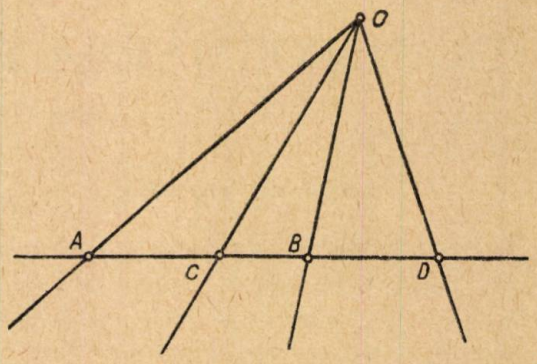


Fig. 1

armonic Dreptele OA, OB,... se numesc razele fascicolului. Razele OC și OD sunt *raze conjugate* în raport cu OA și OB și reciproc.

7. *Teorema* 1: «Orice secantă paralelă la una din razele unui fascicol armonic este împărțită în două părți egale de celelalte trei raze».

Dacă EBF e paralelă la raza OA (fig. 2), avem din asemănări de triunghiu

$$\frac{OA}{BE} = \frac{CA}{BC} = \frac{DA}{DB}$$

și

$$\frac{OA}{FB} = \frac{DA}{DB}$$

deci BE = FB și atunci pentru orice altă paralelă

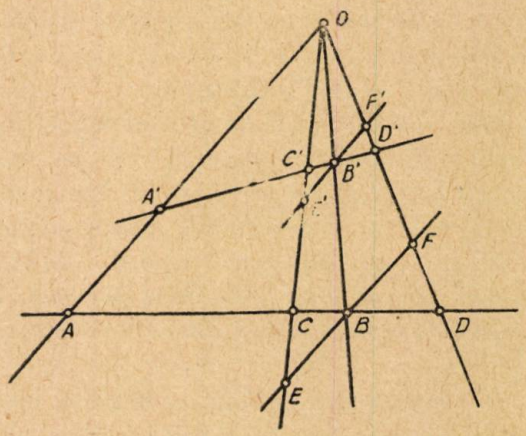


Fig. 2

E'B'F' la OA rezultă E'B' = B'F'.

8. *Reciproca* 1: «Un fascicol de patru drepte este armonic, dacă paralela la una din raze este împărțită în două părți egale de celelalte trei raze».

Dacă paralela EBF la OA are mijlocul în B (fig. 2), avem

$$\frac{OA}{BE} = \frac{CA}{BC} \quad \text{și} \quad \frac{OA}{FB} = \frac{DA}{DB},$$

deci

$$\frac{CA}{BC} = \frac{DA}{DB},$$

adică diviziunea ABCD e armonică.

9. *Teorema* 2: « Un fascicol armonic divide armonic orice secantă ».

Dat fascicolul (O, ABCD) armonic și secanta A'C'B'D' (fig. 2), să ducem paralelele EBF și E'B'F' la OA; atunci avem EB = BF și E'B' = B'F' și după reciproca 1 diviziunea A'B'C'D' e armonică.

10. *Teorema* 3: « Laturile și bisectoarele unui unghiu formează un fascicol armonic ». (Demonstrația ca exercițiu).

III. *Pol și polară*

11. *Teorema* 4: « Locul geometric al conjugatului armonic Q al unui punct P în raport cu punctele de intersecție a două drepte fixe OX, O*R* cu o secantă dusă prin P este o dreaptă ».

Intr'adevăr, cele patru drepte OP, OX, OQ, OY formează un fascicol armonic (Fig. 3), care divide armonic orice secantă trecând prin P. Conjugatul lui P descrie deci dreapta OQ. Drepata OQ se numește *polara* punctului P în raport cu unghiul XOY, iar P este *polul* dreptei OQ.

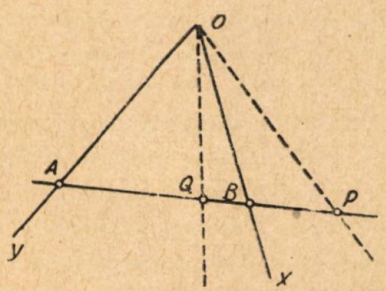


Fig. 3

12. *Teorema* 5: « Locul geometric al conjugatului armonic al unui punct P față de punctele de intersecție ale unui cerc cu o secantă oarecare ce trece prin P este o dreaptă Δ perpendiculară pe diametrul ce trece prin P ».

Fie A, B intersecțiile cu cercul (0) ale unei secante trecând prin P și A'B' proiecțiile lor pe diametrul ce trece prin P, iar B'' simetricul lui B față de acest diametru (Fig. 4)

Deoarece AE și AF sunt bisectoarele unghiului PAI. diviziunea PEIF e armonică și atunci punctul I este fix când secanta se rotește în jurul lui P. Perpendiculara în I pe EF taie secanta în Q și avem

$$\frac{QA}{QB} = \frac{IA'}{IB'} = \frac{AA'}{B'B''} = \frac{AA'}{BB'} = \frac{PA}{PB},$$

adică diviziunea PAQB e armonică. Când secanta se rotește, Q descrie deci dreapta Δ.

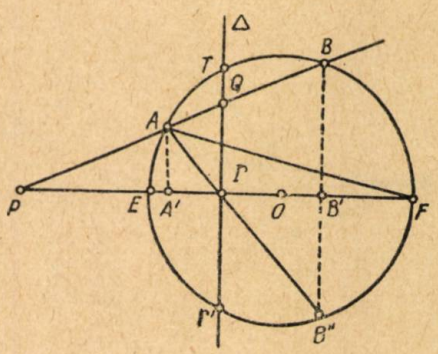


Fig. 4

13. Dreapta Δ se numește *polara* punctului P în raport cu cercul (0). iar punctul P este *polul* dreptei Δ. Dacă P este exterior cercului, I este interior cercului și polara taie cercul în două puncte T și T'. Când A = B, Q se confundă cu aceste puncte, atunci PT și PT' sunt tangente la cerc. Dacă P se îndepărtează la infinit, polara devine diametrul perpendicular pe EF; de aceea se spune că polul unui diametru este punctul dela infinit în direcția perpendiculară pe acest diametru. Dacă P este pe cerc, polara e tangenta în acel punct la cerc, iar dacă P este interior cercului, polara nu taie cercul. In fine, dacă P coincide cu centrul, polara e la infinit; se spune că polara centrului este dreapta dela infinit a planului.

14. *Teorema* 6: « Dacă printr'un punct P se duc secantele PAB, PA' B' la un cerc, dreptele AB' și BA', dreptele AA' și BB', tangentele la cerc în punctele A, B, și tangentele în punctele A', B' se taie pe polara lui P în raport cu cercul (Fig. 5) »'

Punctele C și D, conjugate ale lui P în raport cu AB și A'B' se găsesc pe polara lui P în raport cu:

cercul (0)
unghiul A'SB'
unghiul A'S''B'

și atunci punctele S și S'' sunt pe dreapta CD. Când secanta PA'B', rotindu- se, se confundă cu secanta PAB, coardele AA' și BB' devin tangentele în A și B, iar punctul S are ca poziție limită pe S', care e deci situat pe polara CD.

IV. *Reciprocitate polară*

15. *Teorema* 7: « Dacă un punct descrie o dreaptă Δ, polara sa în raport cu un cerc se rotește în jurul punctului P, polul dreptei Δ'' (Fig. 6).

Un punct M oarecare al dreptei Δ este conjugatul lui P în raport cu intersecțiile A, B, ale lui PM cu cercul. Polara lui M, adică locul geometric al conjugatelor lui M, trece deci prin P.

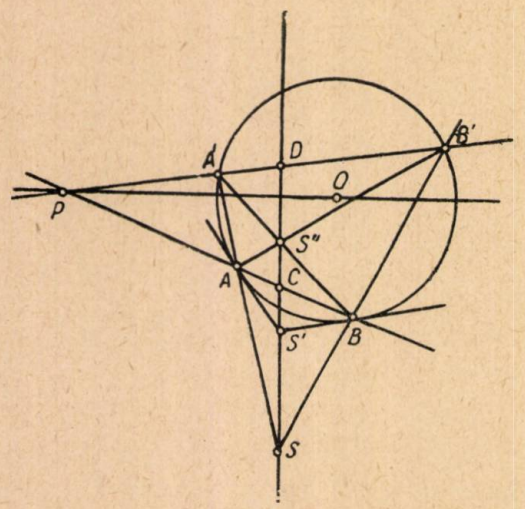


Fig. 5

16. *Teorema* 8: « Dacă o dreaptă se rotește în jurul unui punct P, polul ei descrie o dreaptă Δ, polara lui P ». (fig. 6).

Polul M al unei drepte Δ' trecând prin P este conjugatul lui P în raport cu cercul; dar conjugatul lui P se găsește pe polara Δ a lui P, deci M e pe Δ.

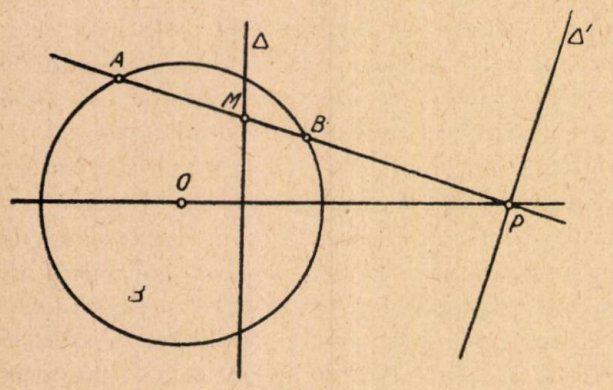


Fig. 6

17. Să considerăm în plan o figură (F) formată din puncte și drepte. Fiecărui punct P al acestei figuri îi putem asocia polara sa Δ' în raport cu un *cerc director* (0) și fiecărei drepte Δ a lui (F) îi putem asocia polul său P' în raport cu acelaș cerc. Polurile dreptelor și polarele punctelor figurii (F) formează o nouă figură (F') pe care o numim *figura polar reciprocă* a primei. Invers, (F) este figura polar reciprocă a lui (F') în raport cu (0). Din cele expuse până acum, rezultă următoarele proprietăți a două figuri polar reciproce (F) și (F'):

1° « La puncte colineare ale figurii (F) corespund drepte concurente în (F') și reciproc ».

2° « La drepte concurente în (F) corespund puncte colineare în (F') și reciproc ».

3° « Dacă patru puncte formează o diviziune armonică în (F), dreptele corespunzătoare în (F') formează un fascicol armonic și reciproc ».

4° « Unui fascicol armonic în (F) îi corespunde o diviziune armonică în (F') și reciproc ».

La o proprietate geometrică privind puncte și drepte ale figurii (F) va corespunde o proprietate geometrică în (F'). Unei teoreme privind în figura (F) puncte ce trebue să fie colineare îi va corespunde în (F') o teoremă privind drepte ce trebue să fie concurente; asemenea teoreme se numesc *corelative*. Este evident că putem porni dela proprietăți ale lui (F') și găsi proprietățile corelative în (F).

18. Am definit astfel o transformare care atașează fiecărui punct al unei figuri o dreaptă și fiecărei drepte un punct; o vom numi *transformare prin polare reciproce*. Ea ne permite să găsim noi proprietăți ale figurilor, pornind dela proprietăți cunoscute. Totodată, această transformare ne ajută în demonstrarea unor proprietăți complicate, acesta dacă figura transformată e mai simplă decât cea inițială. Intr'adevăr, se poate ca o proprietate complicată a lui (F) să se reducă în (F') la o proprietate cunoscută sau ușor de demonstrat și demonstrația acestei proprietăți în (F') constituie implicit și demonstrarea proprietății figurii (F). Trebue să remarcăm că simplicitatea uneia din figurile (F) sau (F') în comparație cie cealaltă constă numai într'o aranjare mai comodă a punctelor și dreptelor, care ușurează raționamentul. Din punct de vedere logic, demonstrațiile a două proprietăți corelative sunt identice, deoarece orice raționament făcut asupra uneia din figuri poate fi aplicat și celelalte figuri, efectuând o transformare prin polare reciproce. Deci noi găsim numai o proprietate mai ușor de demonstrat.

Transformarea prin polare reciproce se poate aplica unei figuri, pentru a studia proprietăți atât geometrice cât și metrice. Studiul proprietăților metrice devine însă foarte complicat și de aceea această transformare se folosește mai ales în studiul proprietăților geometrice ale figurilor.

Transformarea prin polare reciproce constitue o metodă fecundă a geometriei moderne. In cele ce urmează, vom da câteva exemple ce vor lămuri mai bine mecanismul acestei transformări.

V. *Exemple*

19. *Exemplul* 1. Să transformăm prin polare reciproce următoarea teoremă numită a lui *Desargues*: « *Dacă* două triunghiuri ABC, A'B'C' au vârfurile așezate două câte două pe trei drepte concurente, laturile corespunzătoare se taie în trei puncte colineare (Fig. 7)

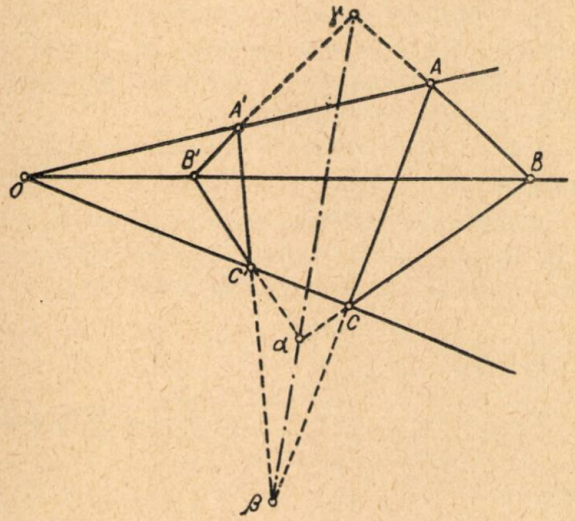


Fig. 7

Transformând figura prin polare reciproce în raport cu un cerc director oarecare, triunghiurile ABC, A'B'C' vor deveni alte triunghiuri a,b,c, și a',b',c'. Dreapta AA' devine intersecția α' a dreptelor a și a':

$$\alpha' = (a,a')$$

Analog, BB' și CC' devin

$$\beta' = (b,b')$$
$$\gamma' = (c,c')$$

Deoarece AA', BB', CC' sunt concurente, α', β', γ' sunt colineare. Deoarece α, β, γ sunt colineare, triunghiurile a, b, c și a', b', c' au vârfurile pe drepte concurente. Transformata teoremei lui Desargues este deci:

« Dacă laturile a două triunghiuri se taie în puncte colineare, vârfurile respective sunt așezate pe drepte concurente ».

20. *Exemplul* 2. Să transformăm acum prin polare reciproce teorema următoare: « Se dă un triunghiu ABC și o transversală Δ care întâlnește pe BC în α, CA în β și AB în γ. Fie A', B', C' punctele de intersecție ale dreptelor (Bβ, Cγ), (Cγ, Aα), (Aα, Bβ). Dreptele A'α, B'β, CC' sunt concurente ».

Transformând figura corespunzătoare, avem următoarea corespondență între elemente

Figura inițială		Figura transformată	
Dreapta	BC	Punctul	a
	CA		b
	AB		c
Punctul	A	Dreapta	bc
	B		ca
	C		ab
Dreapta	Δ	Punctul	O
Punctul	α	Dreapta	ca
	β		ob
	γ		oc
Dreapta	$A\alpha$	Punctul	$a_1\ (bc, oa)$
	$B\beta$		$b_1\ (ca, ob)$
	$C\gamma$		$c_1\ (ab, oc)$
Punctul	A'	Dreapta	$b_1 c_1$
	B'		$c_1 a_1$
	C'		$a_1 b_1$
Dreapta	$A'\alpha$	Punctul	$a_2\ (oa, b_1 c_1)$
	$B'\beta$		$b_2\ (ob, c_1 a_1)$
	CC'		$c_2\ (ab, a_1 b_1)$

(Pentru urmărirea transformării, cetitorul va construi figura dată și transformata ei, folosind acest tablou). Găsim astfel proprietatea următoare: « Se dă un triunghiu abc și un punct 0 în planul său. Dreptele Oa, Ob, Oc întâlnesc laturile bc, ca, ab respectiv în punctele a_1, b_1, c_1. Punctele $a_2\,(Oa, b_1 c_1), b_2\,(Ob, c_1 a_1)$, $c_2\ (ab, a_1 b_1)$ sunt colineare».

VI. *Extinderi*

21. Executând o rotație a figurii 4 în jurul diametrului EF, obținem extinderea noțiunii de polară, în spațiu și teorema 5 devine: « Locul geometric al conjugatului armonic al unui punct P în raport cu punctele de intersecție ale unei sfere cu o secantă oarecare ce trece prin P ,este un plan π perpendicular pe diametrul OP''. Planul π se numește planul polar al lui P, iar P este *polul* planului π față de sfera (0). Celelalte teoreme au forme analoage și stabilirea lor nu constitue o problemă specială.

Am considerat polara față de un unghiu și față de un cerc. Însăși definiția noțiunii de polară ne sugerează ideia considerării unei curbe oarecare, pe care o dreaptă o taie în două puncte, adică a unei *conice*. In spațiu, putem considera planul polar al unui punct în raport cu o suprafață întâlnită de o dreaptă în două puncte, adică în raport cu o *cuadrică*.

Pe marginea acestor principii se pot face încă multe considerații; ele se găsesc în cărțile de geometrie modernă. Principalul este însă o înțelegere temeinică a principiului de bază, în vederea aplicațiilor.

EFECTUL FOTOELECTRIC ŞI APLICAŢIILE LUI

Virgil Atanasiu

Basmele şi legendele din cele mai vechi timpuri au întrezărit năzuinţele cele mai tainice ale omului. Multe din aceste năzuinţi, întrezărite în basme au devenit cu timpul realităţi. Astfel minunatul covor sburător a devenit avionul de azi care poate să ridice sute de oameni şi zeci de tone de mărfuri şi să le transporte prin aer la destinaţie, urechea fină a călăreţului care auzea cum creşte iarba, a devenit radioul de azi, iar oglinda fermecată a devenit şi ea o realitate în zilele noastre. Ea este televizorul, un aparat asemănător ca înfăţişare cu aparatul de radio-recepţie, dar care ne permite ca pe ecranul lui să putem vedea un film, un jurnal cinematografic cu ultimele noutăţi şi alte evenimente, care sunt transmise prin ajutorul undelor, la fel ca şi vocea omului sau muzica pe care o auzim la radio.

Televiziunea, această minunată realizare a geniului uman a devenit posibilă datorită lucrărilor savanţilor şi inventatorilor ruşi.

Să cercetăm cum dela îndepărtatul vis despre oglinda fermecată a ajuns omul la construirea ingeniosului aparat care ne permite să vedem dela distanţă.

In 1888 A. G. Stoletov, mare fizician şi electrotehnician rus, căruia îi aparţin lucrări foarte importante în domeniul acusticii şi opticii şi în domeniul căldurii, studia trecerea unui curent electric printr'un strat de gaz. El aşezase paralel şi la o mică distanţă o placă metalică şi o reţea de metal, ce erau puse în legătură cu cei doi poli ai unei baterii electrice.

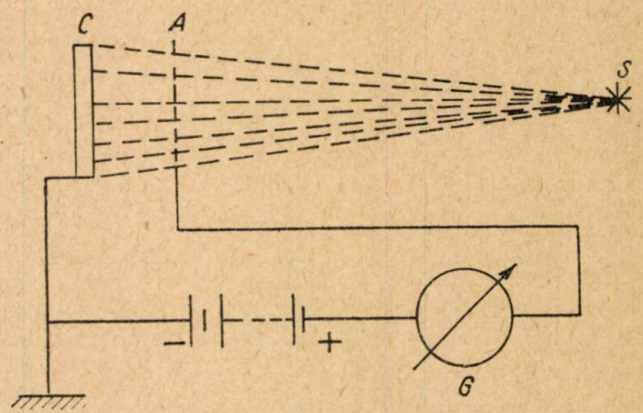
Circuitul rămânea deschis şi din această cauză curentul nu trecea, pentrucă aerul din spaţiul intermediar nu lăsa să treacă electricitatea. A. G. Stoletov aprinse în apropierea reţelei de metal un arc electric. Razele acestuia cădeau în spaţiul dintre reţea şi placă. In acest moment însă, acul galvanometrului sensibil din circuitul bateriei a deviat brusc. Deci, în circuit lua naştere un curent electric. Acest curent nu circula numai prin metal, ci şi prin spaţiul aerian care despărţea placa de reţea.

Astăzi, noi ştim că lumina arcului electric, căzând pe o placă de metal, desprinde din ea electroni. Ieşind din placă, electronii se deplasează în direcţia reţelei încărcate pozitiv. Astfel lumina dădea naştere curentului electric. Arătând că «... energia curentului în acest element aerian ia naştere pe socoteala energiei razelor de lumină», Stoletov a construit prima celulă fotoelectrică din lume.

Energia necesară pentru scoaterea electronilor din metal, cu alte cuvinte pentru crearea emisiei de pe suprafaţa metalului, poate fi transmisă electronilor şi prin alte metode. In funcţie de sursa acestei energii pot fi deosebite mai multe feluri de emisii de electroni:

— emisia termoelectronică ce apare la încălzirea metalului;

— emisia autoelectronică (emisie rece), emisie care se produce în urma ataşării de suprafaţa metalului a unui pol electric, pentru accelerare;



SCHEMA EXPERIENŢEI LUI STOLETOV
C-placa; A-reţeaua; S-arcul electric; G-galvanometru

Fig. 1.

— emisia electronică secundară, care se produce la bombardarea suprafeţei metalului cu un fascicol de electroni, numiţi primari;

— emisia electronică prin bombardarea metalului cu atomi sau cu ioni pozitivi.

In articolul de faţă se va expune numai metoda prin care emisia de electroni de pe suprafaţa metalului are loc datorită energiei transmisă electronilor de către lumină, adică emisia fotoelectronică.

Studierea în continuare a acestui fenomen a arătat că lumina căzând pe plăci de diferite metale smulge de pe suprafaţa lor electroni. Aceştia creează curent electric în circuitul instalaţiei. După cum se ştie, metalele conţin aşa numiţii electroni «liberi» care nu sunt legaţi de atomi, ci se mişcă între aceştia. Prezenţa unor astfel de electroni explică buna conductibilitate electrică a metalelor; curentul electric în metale înseamnă mişcarea electronilor liberi, dela polul negativ la cel pozitiv,

sub influența forțelor electrice, care acționează la suprafața corpurilor. Pentru a smulge în afară de metal electronul liber, trebue cheltuit un anumit lucru. Energia necesară pentru ca acești electroni liberi să fie smulși, o dă lumina care întâlnește suprafața metalului. Pentru a folosi în scopuri practice acest fenomen, placa de metal, care eliberează electronii se conectează cu polul negativ al unui generator de curent electric, iar polul pozitiv se instalează la o oarecare distanță de placă. La iluminarea suprafeței de metal, electronii smulși de pe aceasta se vor mișca sub influența forțelor electrice, către anod, închizând astfel circuitul.

Fenomenul studiat de A.G. Stoletov și numit ulterior efect fotoelectric exterior, a constituit baza inventării elementelor fotoelectrice — mici aparate electrice speciale, care transformă energia luminoasă în energie electrică.

Tot în acest timp s'a observat că un conductor de seleniu (element chimic cu proprietăți apropiate de ale metalelor) își schimbă simțitor rezistența electrică, în funcție de faptul dacă este sau nu luminat. Este suficient să se îndrepte pe suprafața seleniului o rază de lumină pentruca rezistența lui electrică să scadă brusc și să treacă prin el un curent mult mai mare decât în întuneric.

Proprietatea seleniului de a-și schimba rezistența electrică sub influența luminei a făst numită efect fotoelectric intern.

Astăzi se cunosc multe corpuri asemănătoare seleniului. Numeroase cercetări au stabilit că variația conductibilității sub acțiunea luminii este un fenomen complex.

Construcția fotoelementelor

Astăzi aproape toate fotoelementele bazate pe fotoefectul exterior și destinate transformării razelor de lumină vizibile și invizibile în curenți electrici, dispun de catozi care conțin metal alcalin. Deaceea toate aceste fotoelemente trebue construite în formă de recipiente de sticlă, cu vid înaintat, în interiorul cărora se montează fotocatodul fixat fie pe suprafața interioară a sticlei, fie pe o placă de metal. In fața catodului se pune anodul care colectează electronii smulși. Dimensiunile anodului nu trebue să fie mari pentru a nu împiedica accesul luminei la suprafața catodului. Piesele de metal și de sticlă ale fotoelementului, independent de construcția fotoelementului și de tipul fotocatodului trebue să îndeplinească o serie de condiții.

a) Alegerea sticlei. Cele mai importante proprietăți ale sticlei care se iau în considerație la alegerea ei pentru construirea fotoelementelor sunt:

— transparența optică pentru razele regiunii respective a spectrului.

— stabilitatea chimică și

— coeficientul de dilatare la căldură.

b) Alegerea metalului pentru filamente și curățirea lui. Cele mai întrebuințate materiale pentru filamentele fotoelementelor sunt:

— platina și molibdenul care se sudează solid cu sticlele obișnuite;

— părțile armăturii interioare a fotoelementului (anod, catod, etc.) se fac de obicei din nichel. Acesta nu se oxidează la aer, suprafața lui poate fi bine curățită și degazificată. Coeficientul de dilatare la căldură al nichelului depășește pe acela al oricărui fel de sticlă, așa că nu poate fi întrebuințat pentru filamente. Deaceea electrozii care urmează a fi sudați în piciorul fotoelementului se fac compuși: partea electrodului care intră în interiorul fotoelementului se face din nichel iar aceea sudată cu sticla din platin sau molibden. Locurile de unire a nichelului cu molibdenul se sudează electric (punctiform);

— părțile de metal ale armăturii fotoelementului înainte de a fi sudate în balon cer o minuțioasă curățire, întrucât suprafața lor este de obicei murdară de grăsimi, săruri minerale, și fiindcă conține în cantități mari, diferite gaze absorbite.

Afară de metalele mai sus arătate la construirea fotoelementelor, deseori se întrebuințează și argint în foi, sau cupru argintat, precum și metale alcaline.

Legile efectului fotoelectric

1. *Curentul de saturație.* O problemă importantă a fotoelectricității este stabilirea legăturii care există între energia radiantă a razelor ce cad pe o suprafață anumită și electronii eliberați de această suprafață.

Pentru aceasta vom considera schema reprezentată în fig. 2. In această schemă P este placa metalică iluminată, N o altă placă, legată împreună cu prima printr'un galvanometru G de polii corespunzători ai unei baterii B. Pentru exactitatea cercetărilor se cere ca să fie realizată puritatea suprafeței iluminate. Pentru aceasta se folosesc suprafețe proaspete, foarte bine curățite pe cale mecanică, sau prin distilarea în vid a metalului.

Intre cele două plăci P și N trebue realizat un vid înaintat, deoarece prezența unor gaze poate schimba foarte mult proprietățile suprafeței și în plus se complică condițiile pentru ieșirea și deplasarea electronilor.

Dacă iluminarea se menține constantă și se variază numai tensiunea bateriei B, se constată cu ajutorul galvanometrului G o variație în anumită măsură a intensității curentului. Experiența efectuându-se în vid și electrozii (P și N) având o astfel de formă și poziție, încât toți electronii smulși depe suprafața iluminată să cadă pe al doilea electrod, chiar fără ajutorul unui câmp accelerator, atunci intensitatea curentului (curent fotoelectric) nu crește odată cu mărirea tensiunii aplicată electrozilor. Dacă există însă un câmp întârzietor, adică un câmp care se opune mișcării electronilor smulși, acesta poate micșora curentul fotoelectric putând chiar să-l reducă la zero. Variația curentului fotoelectric I față de diferența de potențial V a electrozilor se prezintă ca în figura 3 (curba neîntreruptă). In cazul câmpului întârzietor, care împiedică mișcarea electronilor dela suprafața iluminată spre cel de al doilea electrod, curentul fotoelectric este micșorat și chiar anulat (fig. 3) (curba întreruptă).

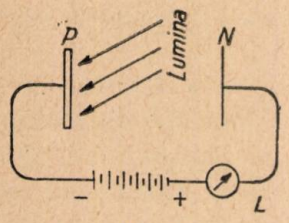


Fig. 2

Trăsăturile esențiale totuși se păstrează: pentru o anumită diferență de potențial acceleratoare, curentul atinge o valoare constantă (curent de saturație); la o anumită diferență de potențial întârzietoare, curentul se anulează. Curentul de saturație corespunzând totalității electronilor eliberați de suprafață măsoară acțiunea fotoelectrică a luminii.

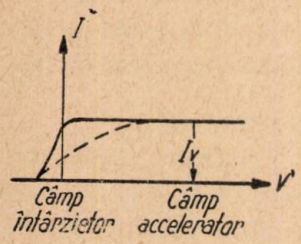


Fig. 3

2. *Variația curentului de saturație cu intensitatea luminii incidente* (legea lui Stoletov). Prin cercetări și măsurători precise s'a constatat că intensitatea curentului fotoelectric de saturație este direct proporțională cu intensitatea luminii incidente (a luminii absorbite de metal). O aplicație a acestei legi este folosirea celulelor fotoelectrice ca fotometre, care spre deosebire de celelalte sunt absolut obiective. Pentru aceasta însă, curentul de saturație trebue să fie format numai din electronii eliberați sub influența luminii. Deci suprafața sensibilă trebue să se afle în vid. Dacă în interiorul celulei se află gaz, sensibilitatea este mult mai mare, deoarece pe lângă electronii eliberați de metal se mai adaugă și cei proveniți din ionizarea gazului, însă în acest caz avem abateri dela simpla proporționalitate între intensitatea curentului de saturație și cea a luminii; deaceea și rezultatele obținute cu instrumente de acest fel nu sunt riguros exacte.

3. *Vitezele electronilor* (fotoelectronilor).

S'a văzut că dacă se aplică electrozilor un câmp electric întârzietor, intensitatea curentului fotoelectric scade. Aceasta se explică prin faptul că o parte din electroni posedă la pornire o energie cinetică $\frac{1}{2} m v^2$, inferioară lucrului mecanic necesar pentru învingerea diferenței de potențial aplicate. Dacă potrivim diferența de potențial V în așa fel încât curentul fotoelectric să se anuleze, aceasta înseamnă că toți electronii au fost reținuți, chiar și cei mai rapizi. Insemnând prin v_m viteza maximă a electronilor eliberați de lumină avem relația:

$$\frac{1}{2} m v_m^2 = eV \qquad (1)$$

Caracteristica curentului fotoelectric nu se întrerupe brusc, ci scade lent spre zero. Aceasta înseamnă că electronii la pornire au viteze diferite. Electronii cu viteze mici sunt reținuți de un câmp electric întârzietor slab, iar cei mai rapizi, sunt reținuți numai dacă diferența de potențial contrarie este egală cu V. Diversitatea vitezelor se explică prin faptul că lumina poate elibera electronii nu numai dela suprafața metalului, ci și dela oarecare adâncimi; electronii smulși dela aceste adâncimi își pierd o parte din viteza pe care o aveau înainte de a ieși la suprafață, din cauza eventualelor ciocniri din interiorul metalului.

Din această cauză, viteza maximă ce poate fi determinată din formula (1) prezintă un interes fizic special, deoarece această viteză caracterizează energia transmisă electronului, la eliberarea sa cu ajutorul luminii.

Să nu ne închipuim însă că pentru eliberarea unui electron depe suprafața metalului, cu viteza v ar fi suficient să-i transmitem energia $\frac{1}{2} m v^2$. Trecând prin suprafața metalului, electronul trebue să învingă o anumită rezistență, care se opune ieșirii lui, cheltuind în acest scop un lucru mecanic corespunzător L (travaliu de extracție). Acest lucru depinde de natura metalului și deaceea între două bucăți de metal, care se ating, se stabilește o diferență de potențial de contact. Energia necesară pentru ca un electron să fie smuls cu o viteză maximă v_m dintr'o placă este dată de relația:

$$W = \frac{1}{2} m v_m^2 + L = eV + eV_0. \qquad (2)$$

unde $v_0 = L/e$ este potențialul de extracție.

Relația (2) permite evaluarea energiei W, căștigate de electron în cadrul fenomenului fotoelectric. Cercetările experimentale au stabilit în această privință o lege foarte importantă: energia W câștigată de electron nu depinde de intensitatea luminii incidente, nici de natura substanței luminate și nici de temperatura acesteia; această energie este determinată exclusiv de frecvența luminii monocromatice, incidente, fiind proporțională cu această frecvență.

Ipoteza cuantelor de lumină

Tot pe timpul când această relație a fost stabilită experimental într'o formă calitativă, Einstein (1905) a găsit pe cale teoretică legătura cantitativă între energia dobândită de electron la eliberarea sa de către lumină și frecvența acestei lumini. După teoria lui Einstein, legea efectului fotoelectric se exprimă prin:

$$W = \frac{1}{2} m v_m^2 + L = eV + L = h\nu \qquad (3)$$

unde $h = 6{,}547.10^{-27}$ ergi. s. este constanta lui Planck.

După concepția lui Einstein energia, câștigată de electron îi este dată sub forma unei cuante de lumină $h\nu$ pe care și-o însușește în întregime; deci electronii nu iau energia dela atomii substanței catodice și deaceea natura acestei substanțe nu joacă niciun rol la determinarea energiei W. Deoarece energia cuantei este foarte mare în raport cu energia termică a electronilor, o variație a temperaturii se resfrânge foarte puțin asupra vitezei de pornire a electronilor. După teoria lui Einstein, proporționalitatea curentului fotoelectric de saturație cu intensitatea luminoasă este deasemeni explicată: intensitatea luminoasă este determinată de numărul de cuante ce cad pe suprafața substanței catodice în unitate de timp și deci numărul electronilor eliberați trebue să fie proporțional cu cel al cuantelor respective.

Formularea teoretică a lui Einstein a fost confirmată în mod strălucit prin experiențe.

Frecvența luminei ν_0, sau lungimea de undă corespunzătoare $\lambda_0 = \frac{c}{\nu_0}$, pentru care electronii nu ies din metal, chiar în prezența unui câmp accelerator exterior se numește *frecvența de prag*, sau *prag fotoelectric*. Cu cât metalul este mai electropozitiv adică cedează mai ușor electronii, cu atât pragul fotoelectric este situat în regiunea undelor mai lungi. Astfel pentru metalele alcaline care sunt mai electropozitive, pragul fotoelectric este situat în spectrul vizibil pe când pentru celelalte metale, în invizibil (ultraviolet) exemplu: pentru potasiu pragul fotoelectric este $\lambda_0 = 5500$ Å, pentru sodiu $\lambda_0 = 5400$ Å, pentru fer $\lambda_0 = 2620$ Å, pentru argint $\lambda_0 = 2610$ Å, etc.

Intensitatea curentului fotoelectric crește cu micșorarea lungimii de undă. In figura 4 unde pe ordonată se ia intensitatea I a curentului fotoelectric iar pe abscisă lungimea λ a razelor ce cad pe substanța catodică, se poate vedea clar cât de puternic crește, începând dela pragul fotoelectric căruia îi corespunde $\frac{c}{\lambda_0} = \nu_0$, facultatea fotonilor de a smulge electroni pe măsura trecerii la lungimi de undă mai mici.

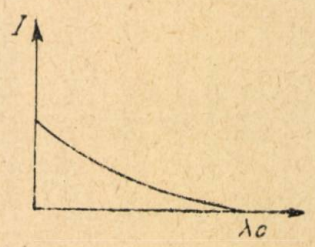


Fig. 4.

Experiența arată, în special pentru metalele alcaline, că această variație în intensitatea curentului nu este totdeauna cum se arată în figura 4, ci se observă că intensitatea curentului fotoelectric prezintă un maximum foarte pronunțat (fig. 5), pentru un anumit interval al spectrului de lumină descrescând apoi repede de ambele părți ale acestuia (efect fotoelectric selectiv).

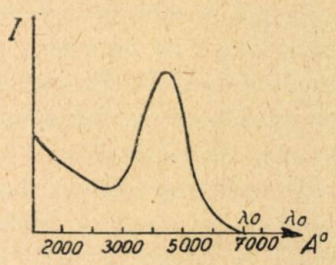


Fig. 5.

Aplicațiile efectului fotoelectric

Atât efectul fotoelectric extern, cât și cel intern au dat posibilitatea construirii de fotocelule speciale, care și-au găsit aplicații foarte largi atât în știință, cât și în tehnică.

Deoarece numărul și diversitatea aplicațiilor sunt deosebit de mari, vom aminti doar principalele domenii în care celulele fotoelectrice își găsesc utilitatea: cinematograful sonor și televiziunea.

1. *Cinematograful sonor.*

Domeniul de aplicație cel mai important este acela al cinematografului sonor. Problema cinematografului sonor este de a înregistra pe peliculă (film) și de a reproduce ulterior sunetul înregistrat, sincron cu proiectarea pe ecran a fotografiilor corespunzătoare din film.

Există două metode de înregistrare optică a sunetului: metoda inversă și transversală. In primul caz (fig. 6) sunetele (vocea, muzica, sgomotele) sunt recepționate de microfonul *M* în care vibrațiile aerului, create de undele sonore, sunt transformate în vibrații electrice corespunzătoare. Cu cât mai puternic este sunetul, cu atât mai mare

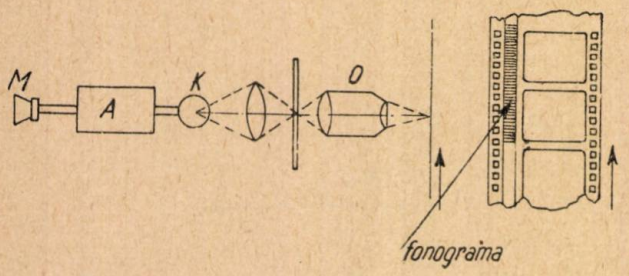


Fig. 6

este amplitudinea vibrațiilor electrice; cu cât mai înalt este sunetul, cu atât mai mare este frecvența vibrațiilor. Impulsurile electrice care se creiază în circuitul microfonului sunt amplificate în *A* (amplificator) și trec apoi în modulatorul de lumină *K*, construit dintr'o lampă de gaz sau un condensator Kerr de construcție specială. Fascicolul de lumină ce pleacă dela modulator este îndreptat prin intermediul unui sistem de lentile către o fantă, iar de aici cu ajutorul microobiectivului *O*, lumina modulată este proiectată pe marginea filmului, înregistrându-se odată cu fotografia obiectului.

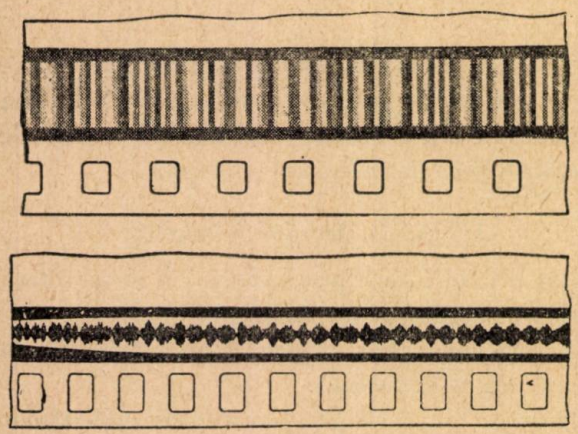


Fig. 7 a, b

După prelucrarea fotografică a peliculei și după obținerea pozitivului, înregistrarea vibrațiilor de lumină se prezintă (fig. 7 a) sub forma unor dungi închise și deschise la culoare de intensitate optică variabilă. Transparența pozitivului obținut va fi direct dependentă de fascicolul de lumină emis la un moment dat, și în consecință corespunzător sunetului prins de microfon. Inregistrarea obținută în acest fel pe peliculă se numește « fonogramă intensivă » întrucât vibrațiile sunetului sunt redate prin această metodă sub formă de variații ale intensității înegririi peliculei.

In cazul înregistrării transversale (fig. 7 b) vibrațiile electrice corespunzătoare vibrațiilor sonore recepționate de microfon, trec după amplificare de asemeni la modulatorul de lumină care în acest caz este un galvanometru cu oglindă de construcție specială.

Reproducerea fonogramei înregistrată pe peliculă prin metoda intensivă sau transversală se face în felul următor: fascicolul de lumină dela lampa de iluminare *L* se proiectează — după cum se vede în figura 8 — cu ajutorul microobiectivului *O*, sub forma unei dungi înguste de lumină. In spatele

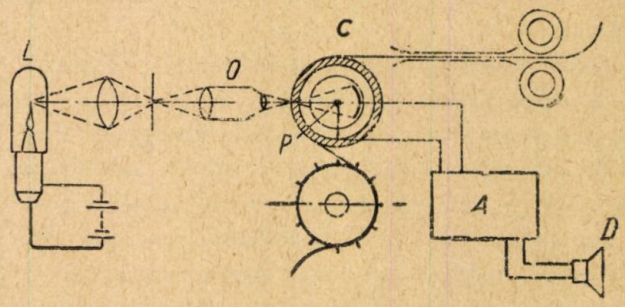


Fig. 8

peliculei se află fotoelementul *C*, care recepționează fascicolul de lumină, ce-a trecut prin peliculă. Dacă se pune în mișcare pelicula, cu aceeași viteză pe care a avut-o la înregistrarea sunetului, fascicolul de lumină dela izvorul luminos *L*, ce cade pe peliculă, va varia cu înregistrarea de pe fonogramă, iar pe fotoelement va cădea un fascicol de lumină variabil, ale cărui variații de intensitate, vor corespunde cu variațiile intensității sunetului înregistrat. In fotoelement variațiile de lumină se transformă din nou în variații electrice, și după amplificarea necesară în amplificatorul *A*, trec în difuzorul *D*.

2. *Televiziunea.* Problema televiziunii este transmiterea la distanță a imaginei unui obiect oarecare în mișcare. Această imagine trebue să creeze o cât mai deplină iluzie a obiectului transmis și prin urmare, trebue să fie cât mai clară, cât mai detaliată, mai fidelă.

O etapă importantă în rezolvarea acestei probleme o constitue transmiterea și recepționarea

prin sistemul discului Nipkow. Scena ce trebuia transmisă — după acest sistem — era prinsă de un obiectiv *O*, (fig. 9) care micșora imaginea scenei respective și o proiecta pe discul Nipkow, (un disc perforat în spirală, figura 9 în stânga) care explora întreaga imagine. Fiecare punct al imaginei, prin intermediul discului Nipkow trimite lumina sa pe

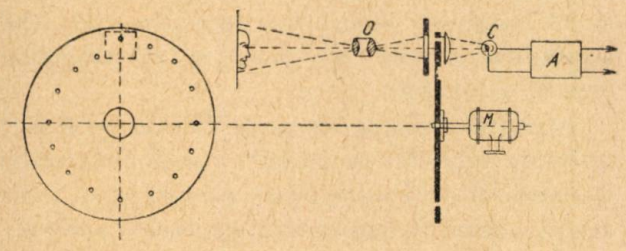


Fig. 9

stratul sensibil al celulei fotoelectrice *C*, (cu ajutorul obiectivului *O*) așezată în spatele discului. Deoarece diferitele elemente ale imaginei au o strălucire diferită, curentul celulei fotoelectrice se va schimba neîntrerupt în funcție de lumina ce cade pe celulă, lumină dată de fiecare punct al imaginei.

Pentru a transmite la distanță o imagine în mișcare, ca și în cinematografie, mișcarea e descompusă într'un număr oarecare de elemente separate, numite cadre. Succesiunea rapidă a acestor cadre permite să se obțină o mișcare legată. La fel și în televiziune se compune întâi din elemente separate o imagine nemișcată (cadru), apoi dintr'o serie de cadre, se realizează o imagine în mișcare. Experiența cinematografică a arătat că numărul de cadre trebue să fie de cel puțin 12,5 pe secundă. De aceea și în televiziune trebuia realizat același ritm. Ținându-se seama că fiecare cadru fixat se compune din 1200 elemente și trebuind să se transmită dela emițător la dispozitivul de recepție 12,5 cadre pe secundă, aceasta înseamnă 15.000 semnale electrice sau impulsuri de curent pe secundă.

Recepționarea folosește de asemeni un disc Nipkow ce se rotește în același ritm cu cel dela emisie (sincron).

Utilizarea discului Nipkow a fost un pas de mare importanță pe calea creării televiziunii moderne, dar îmbunătățirea preciziei imaginei pe această cale nu putea fi realizată.

Rezolvarea acestei probleme — și încă prin cea mai revoluționară metodă — aparține și în această privință Rusiei.

Incă în 1907 profesorul B. L. Rozing dela Institutul Tehnologic din Petersburg a creat după mulți ani de cercetări un sistem absolut nou de recepție cu ajutorul *tubului catodic* (fig. 10). In tubul catodic există un ecran, făcut dintr'un strat subțire de substanță specială luminiscentă, pe care pot fi obținute semne luminoase, cu ajutorul unei raze electronice — un fel de « creion ». Tubul catodic realizează simplu și ingenios descompunerea imaginei recepționate. In acest tub nu există nici o singură piesă mecanică în mișcare, iar comanda razei se face pe cale electrică. Mișcarea razei care descompune imaginea la emisie trebue sincronizată cu mișcarea razei din tubul de recepție. Tubul catodic al lui Rozing a fost perfecționat între timp, și el reprezintă acum « inima » oricărei instalații de recepție în televiziune.

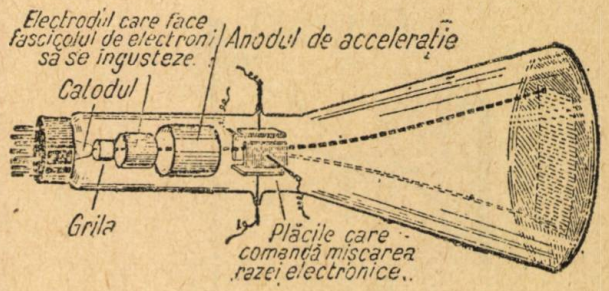


Fig. 10

Mijlocul de a crea un emițător electronic de televiziune de bună calitate a fost indicat pentru prima dată de către B. L. Rozing și a fost realizat practic de savantul sovietic S. I. Cataev. In 1931 S. I. Cataev a inventat tubul electronic de emisie cu așa numitul catod de mozaic (fig. 11).

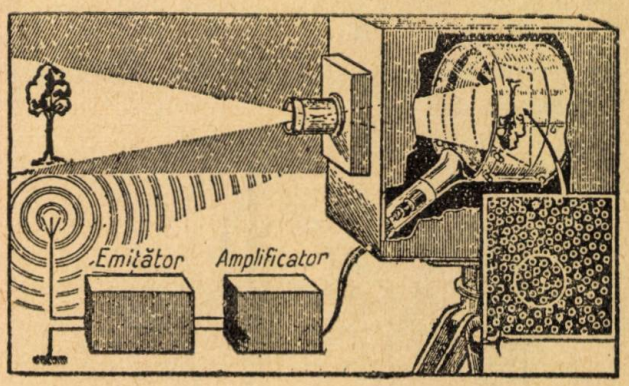


Fig. 11

Tubul lui Cataev a deschis o pagină nouă în desvoltarea televiziunii; construcția lui este arătată în figura 11.

In interiorul aparatului se află o placă foarte subțire de mică, pe care e fixată o substanță sensibilă la lumină, însă nu sub formă de strat continuu ca la celulele fotoelectrice obișnuite, ci în formă de mozaic, alcătuit din milioane de grăunțe mici izolate unele de altele (fig. 11 jos). Fiecare grăunte reprezintă o celulă fotoelectrică în miniatură, ceva

analog cu retina ochiului. Partea opusă a plăcii de mică este acoperită cu un strat metalic subțire și continuu; mozaicul, stratul metalic și mica alcătuesc un condensator. Sub acțiunea luminii — trimisă de imagine — sunt smulși electroni din stratul sensibil la lumină, al fiecărei celule; grăunții de mozaic se încarcă astfel pozitiv (fig. 12). Se obține în acest fel pe mozaic o « copie electrică » ascunsă, a imaginei, copie formată din sarcini pozitive. Aceste sarcini pozitive trebue transformate în semnale de aceiași intensitate și transmise pe rând mai departe la o lampă amplificatoare. Aceste

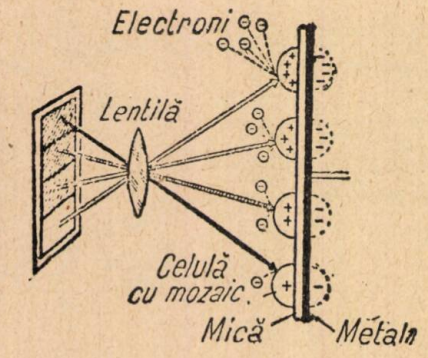


Fig. 12

două funcțiuni sunt îndeplinite de raza electronică, ce alunecă pe suprafața mozaicului, parcurgând element după element. Sarcinile pozitive ale grăunțelor de mozaic smulg electronii din raza electronică de îndată ce aceasta cade asupra lor și în felul acesta dispare sarcina mozaicului în acel loc (fig. 12). Raza electronică alunecând în jos pe mozaic, grăunțele din partea superioară se încarcă din nou.

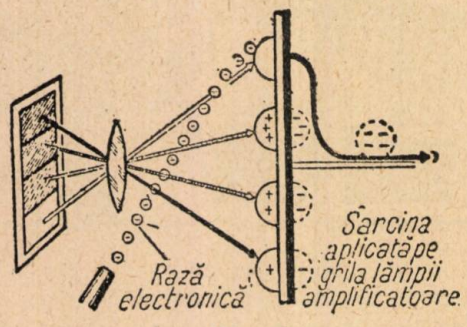


Fig. 13

In acest timp, când pe suprafața mozaicului se formează din sarcini pozitive, imaginea ascunsă, pe armătura metalică legată de grila unei lămpi amplificatoare, apare o cantitate egală de sarcini negative. Când sarcina pozitivă de pe o porțiune oarecare a mozaicului dispare, sub acțiunea razei electronice, dispare în același timp și o sarcină negativă egală cu ea de pe stratul metalic (fig. 13).

Aceste oscilații ale numărului de sarcini pe stratul metalic se transmit la grila de comandă a lămpii electronice, care le amplifică. După o serie de transformări, semnalele sunt reproduse pe ecranul tubului de recepție.

Inginerul sovietic L. A. Cubețchi a perfecționat (1932) transmiterea prin televiziune, inventând multiplicatorul electronic ce funcționează pe principiul emisiunii electronice secundare; în felul acesta s'a obținut un emițător al imaginilor extrem de sensibil.

Astăzi televiziunea nu poate fi concepută fără existența tuburilor cu mozaic, a multiplicatorului electronic și a tuburilor catodice de recepție. Toate aceste realizări se datoresc științei ruse și sovietice.

Televiziunea în viitor.

Astăzi transmisia în televiziune este monocromatică, plană și ecranul relativ mic (60 cm diametru). Viitorul are de rezolvat deci problema televiziunii în culori, în spațiu, și mărirea dimensiunilor ecranului. In prezent se fac încercări în toate aceste direcții, însă deocamdată nu s'a putut trece încă din faza experimentală.

Alte aplicații ale efectului fotoelectric

Progresul necontenit al fotocelulelor și răspândirea aplicațiilor lor în cele mai diferite domenii ale științei și tehnicii nu pot fi cuprinse în cadrul unui articol. Deasemeni caracteristicele diferitelor aparate, calitățile lor, sunt într'o continuă perfecționare, schimbare, deaceea și datele ce le sunt atribuite trebue considerate doar ca orientare.

Tehnica avansată sovietică a creat astfel posibilități noi de ajutorare a omului scutindu-l de atenția continuă încordată în supravegherea diferitelor procese de fabricație, în comanda precisă a mașinilor, macaralelor, etc., în observarea instrumentelor de măsură, sau a cuptoarelor incandescente, prin dispozitive care observă și acționează automat rapid, fără greșeală și fără oboseală.

Asociate cu mecanisme electromagnetice corespunzătoare, fotoelementele pot conduce automat strunguri și prese, pot semnaliza automat temperatura prea ridicată a unei piese, acționând chiar în consecință.

Diferitele dispozitive fotoelectrice pot acționa sau prin întreruperea razei de lumină ce cade pe celulă, sau prin proiectarea luminei pe celulă.

In primul caz, anumite dispozitive acționează asupra unei comenzi când celulele fotoelectrice încetează de a mai fi luminate. Avem de a face

aci cu un « cordon fotoelectric » constituit din raze vizibile sau invizibile ce pornesc dela o sursă și cad pe celulă. Cât timp această rază nu este întreruptă în drum printr'o cauză oarecare (interpunerea unui corp opac) sistemul este în repaos, dar imediat ce intervine o cauză care provoacă întreruperea cordonului, comanda sistemului se declanșează punându-se în funcție, după caz un servomecanism, un semnal, etc. Bazat pe acest principiu se pot cita o serie de aplicații:

— transmiterea de diferite comenzi (automatizare) fie pentru a se interveni într'un proces de fabricație, fie pentru a se asigura protecția muncii încadrând prin cordon zonele periculoase;

— se poate face numărătoarea pieselor pe banda rulantă, sau a vehiculelor ce trec pe șosea, sau a vizitatorilor unei expoziții, etc.;

— se pot pune automat în mișcare scări speciale în momentul când o persoană punând piciorul pe scară a întrerupt cordonul;

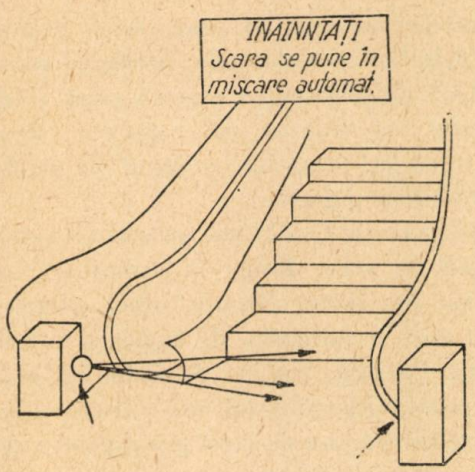


Fig. 14

— se pot păzi băncile;

— se poate preîntâmpina izbucnirea unui incendiu prin apariția fumului;

— se pot înregistra deasemenea cețe naturale sau artificiale, etc. etc.

In cel de al doilea caz, dispozitivul acționează când pe celulă cade lumina vizibilă sau invizibilă. Și aci se pot cita o serie de aplicații:

— se pot face măsurători fotometrice determinând intensitatea curentului fotoelectric rezultat prin iluminarea celulei, pe rând, de către sursele respective;

— se poate măsura transparența unui lichid și prin aceasta, în unele cazuri, concentrația soluției;

— se pot tria obiectele de același tip după culoare;

— se pot stinge automat luminile într'un oraș când se luminează de ziuă;

— utilizarea ecranelor sensibile la razele infraroșii permit să vedem noaptea, sau prin ceață, etc.

Exemplele enumerate sunt suficiente pentru a ne face o idee despre importanța fenomenului fotoelectric, despre diversitatea folosirii acestui fenomen, prin intermediul fotoelementelor.

Progresul în domeniul tehnicii fotoelectrice stimulează în permanență pe fizicieni la alte cercetări științifice în această direcție. In nici o țară din lume nu există o tendință atât de pronunțată către tot ce este nou și avansat în domeniul culturii și tehnicii, ca în Uniunea Sovietică.

Numeroasele aplicații posibile ale celulei fotoelectrice au făcut ca știința și tehnica sovietică să studieze și să pună în exploatare tot felul de dispozitive fotoelectrice.

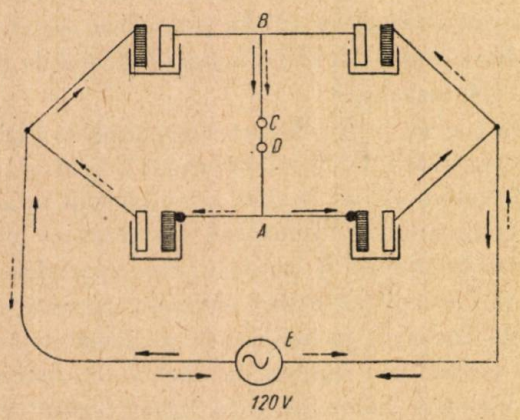
De curând la noi în țară, Institutul de Fizică al Academiei R.P.R. în colaborare cu C.G.M. și industriile interesate au studiat și au început aplicarea pe teren a unor dispozitive fotoelectrice pentru protecția muncii și automatizări, spre deosebire de țările capitaliste care folosesc această admirabilă invenție ca mijloc de reclamă deșănțată sau ca un nou mijloc de război de distrugere. In Uniunea Sovietică și în întreg lagărul democratic, oamenii de știință și tehnică fac eforturi însemnate pentru progresul continuu în acest domeniu al tehnicii moderne, pusă în slujba construirii unei vieți noi și a păcii.

SĂ CONSTRUIM CU MIJLOACE PROPRII MODELE ŞI APARATE DE FIZICĂ

CONSTRUIREA UNUI REDRESOR ELECTROLITIC

N. Rădulescu, Profesor la Liceul Nr. 1 băieţi Bucureşti

Pentru a veni în ajutorul elevilor care îşi construesc singuri aparate de fizică, Revista Matematică şi Fizică va publica o serie de scheme simple, uşor de realizat. Incepem cu laboratorul de electricitate. Primul lucru de care avem nevoie este un izvor de curent continuu, cu ajutorul căruia vom putea verifica principalele legi ale electricităţii. Apoi sunt necesare instrumente care să arate trecerea curentului electric şi tăria lui. In numărul de faţă arătăm construirea unui izvor de curent continuu, care este un redresor ce transformă curentul electric alternativ dela reţeaua oraşului în curent continuu pulsator. E un redresor electro-



litic. La acest tip de redresor transformarea curentului alternativ în curent continuu se bazează pe faptul că prin soluţia dintr'un voltametru care are un electrod de aluminiu şi altul de fier curentul nu poate trece decât dela fier la aluminiu, alternanţa inversă fiind oprită.

Putem face un redresor numai cu un voltametru sau cu 4 voltametre. Cel cu un singur voltametru transformă numai o singură alternanţă din cele două ale curentului alternativ, pe când redresorul format din 4 voltametre dirijează pe acelaşi drum şi în acelaşi sens ambele alternanţe ale curentului alternativ.

Se iau 4 vase de sticlă (borcane) în care se pune apă fiartă în prealabil, pentru a elimina clorul din ea (apa conţine urme de clor dela purificarea ei). In fiecare vas se pune bicarbonat de sodiu (din comerţul alimentar) până ce se formează o soluţie saturată (pe fundul vaselor să mai rămână bicarbonat nedisolvat).

In fiecare vas se cufundă două lamele; una de aluminiu (din orice vas vechi de aluminiu) şi una de fier (tablă dela cutiile de conserve căci ruginește mai greu) şi aşezăm vasele într'o cutie pătrată sau dreptunghiulară din lemn, făcând legăturile arătate în schema din figură.

Deoarece curentul nu poate trece prin soluţie decât dela fier spre aluminiu, urmărind pe schemă cele două alternanţe (cu săgeată plină şi săgeată punctată), pe puntea AB, ambele alternanţe merg în acelaşi sens, deci curentul pe puntea AB este continuu pulsator.

Intre punctele C şi D ale punţii AB intercalăm aparatul în care dorim să trimitem curentul continuu (un motor electric, arcul electric, electroliza apei, a sulfatului de cupru, o sonerie, experienţa Oersted, curenţi de inducţie, etc.).

Pe puntea AB curentul este pulsator. Se poate construi un redresor de acest gen şi pentru curentul trifazic, pulsaţia fiind mult mai micşorată.

Soluţia trebue lipsită de clor altfel el nu redresează bine, de asemeni, ea se încălzeşte şi când ajunge la 60° el nu mai redresează, ci trebue lăsat să se răcească sau schimbăm soluţia.

Pentru a obţine o intensitate de curent cât mai mare luăm plăcile de fier şi aluminiu de suprafaţă cât mai mare şi le aşezăm în vas cât mai apropiat unele de altele, separându-le printr'o placă de sticlă pentru a nu veni în contact sau fixându-le într'un capac de lemn. De asemeni firul de cupru cu care am realizat conexiunile din figură să fie de diametru cât mai mare şi izolat. La plăcile de fier se face sudura lor cu fierul de cupru prin lipirea cu cositor cu ajutorul letconului de cupru obişnuit, sau se pot lăsa şi nesudate. Pe plăci putem pune mâna fără să avem vreun şoc.

Redresorul electrolitic astfel constituit funcţionează la tensiunea de 120 volţi, fără să provoace scurt circuit.

Dacă tensiunea reţelei este mai mare (220 volţi la periferia oraşului) atunci se foloseşte un transformator de scoborîrea tensiunei până la 120 volţi.

La câteva zile dela construirea sa, posibilitatea de redresare scade întrucât parte din bicarbonat trece în carbonat de sodiu şi deci trebue să reîmprospătăm soluţia, punând bicarbonat proaspăt în soluţie.

Oprirea uneia din alternanţe se datoreşte faptului că pe suprafaţa aluminiului se formează un strat spongios de $Al(OH)_3$ îmbinat cu soluţie de bicarbonat, bioxid de carbon şi oxigen. Această peliculă nu permite trecerea alternanţei dela aluminiu la fier.

Formarea definitivă a redresorului este terminată numai după ce s'a constituit această peliculă, iar pentru aceasta, timp de 3—4 minute nu-l punem în sarcină ci îl lăsăm să funcţioneze, restabilind puntea AB (scurtcircuităm bornele C şi D).

$i^i = x$

PROBLEME REZOLVATE

$x = e^{-\frac{\pi}{2}}$

Problema 208

Intr'un ascensor e montat un dinamometru de care e agăţat un corp cu masa 1 kg.

Ce va arăta dinamomentrul dacă ascensorul:

1. *Se mişcă în jos cu o acceleraţie de 4,9 m/s^2 îndreptată în sus.*
2. *Se mişcă în sus cu o acceleraţie de 4,9 m/s^2 îndreptată în jos.*
3. *Se mişcă în jos cu o acceleraţie de 1 m/s^2 îndreptată în jos.*

* * *

Soluţie. Greutatea corpului este $P = mg = 9{,}8$ KG.

In cele trei cazuri dinamometrul va indica respectiv

1) $P_1 = P + 4{,}9 \times 1 = 14{,}7$ KG

2) $P_2 = P - 4{,}9 \times 1 = 4{,}9$ KG

3) $P_3 = P - 1 \times 1 = 8{,}8$ KG

S'a adăugat de fiecare dată forţa de inerţie a lui d'Alembert de semn contrar acceleraţiei, sensul pozitiv fiind cel al gravităţii.

Problema 251

In cercul de centru 0 se înscrie triunghiul ABC ale cărui laturi AB şi BC sunt egale respectiv cu latura octogonului regulat şi a patratului înscris în cercul 0. Să se demonstreze că bisectoarea AA' înălţimea BB' şi mediana CC' ale acestui triunghi sunt concurente.

Gh. Buicliu

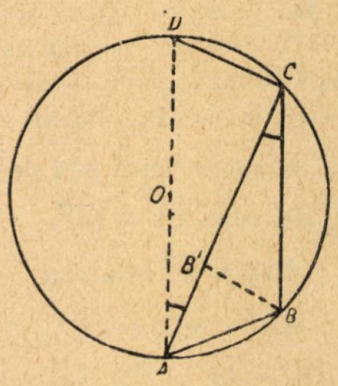
Soluţie. Avem:

$$\frac{A'B}{A'C} = \frac{AB}{AC}$$

Fie D punctul diametral opus lui A.

Triunghiurile dreptunghice ACD şi BCB' sunt asemenea ($\sphericalangle B'CB = \sphericalangle CAD$).

$$(1) \qquad \frac{BB'}{CD} = \frac{CB'}{AC} \text{ sau } \frac{BB'}{AB} = \frac{CB'}{AC}$$



Insă $\sphericalangle CAB = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$, deci triunghiul dreptunghic ABB' este isoscel şi $BB' = AB'$. Relaţia (1) devine

$$\frac{CB'}{AB'} = \frac{AC}{AB}$$

Pentru ca AA', BB', CC' să fie concurente este necesar ca

$$(2) \qquad \frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = 1$$

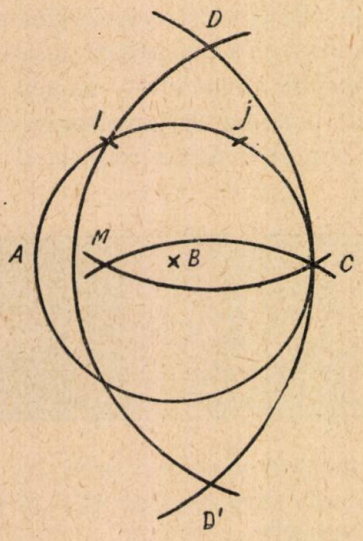
Ţinând seamă că $AC' = C'B$ relaţia (2) este verificată.

Problema 265

Să se găsească mijlocul distanţei între două puncte numai cu compasul (fără riglă).

N. Patrulea

Soluție. Dându-se un segment AB se poate construi punctul C astfel ca AB=BC, prin purtarea coardelor AI, IJ, JC egale cu BA pe cercul B (AB)



Revenind la problemă se construește ca mai sus punctul C astfel ca AB=BC; trasăm apoi cercurile A(AC) și C(CI) care se taie în D și D' simetrice în raport cu AC. Cercurile D (DC) și D'(D'C) se taie în C și în M care este punctul căutat.

Intr'adevăr, CM fiind perpendiculară pe DD', coincide în direcție cu AC. Putem scrie:

$$AM \times AC = \text{puterea lui A față de cercul C (DC) este } \overline{AD}^2 - \overline{DC}^2.$$

Notăm $\overline{AB} = a$, deci

$$\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 = 4a^2$$

$$\overline{DC}^2 = \overline{CI}^2 = l_3^2 = 3a^2.$$

Deci:

$$AC \times AM = 4a^2 - 3a^2 = a^2$$

și cum $AC = 2a$,

Rezultă, $AM = \frac{1}{2}a.$

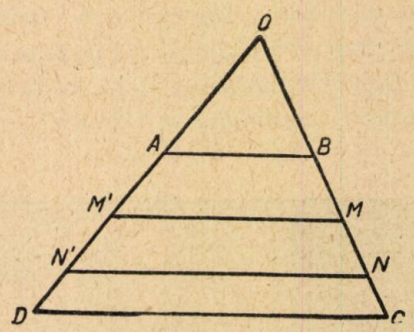
Problema 361

Un teren arabil în formă de trapez ABCD *are baza mică* AB *de* 200 *m, baza mare* CD *de* 500 *m și latura* BC *de* 600 *m. Pentru a fi însămânțat cu grâu, secară și porumb în suprafețe egale, trebue împărțit prin drepte paralele cu cele două baze. Să se afle poziția punctelor* M *și* N *pe dreapta* BC *prin care ducând paralelele la cele două baze, obținem trei arii echivalente. Verificare.*

C. Ionescu-Țiu

Soluție. Intr'un trapez oarecare ABCD segmentul MM' (M pe BC) paralel cu bazele are ca valoare

$$MM' = \frac{AB \cdot BC + BM\,(CD - AB)}{BC}$$



Demonstrație. Prelungim BC și AD până se întâlnesc în O. In triunghiurile OMM' și ODC avem:

$$\frac{AB}{MM'} = \frac{OB}{OM} \quad (1) \quad ; \quad \frac{CD}{MM'} = \frac{OC}{OM} \quad (2)$$

Adunând (1) cu (2), obținem:

$$\frac{AB + CD}{MM'} = \frac{OB + OC}{OM} = \frac{2\,OB + BC}{OB + BM} \quad (3)$$

In triunghiul OCD putem scrie:

$$\frac{OB}{OB + BC} = \frac{AB}{CD}$$

de unde

$$OB = \frac{AB \cdot BC}{CD - AB}$$

Inlocuind în (3) obținem:

$$MM' = \frac{AB \cdot BC + BM\,(CD - AB)}{BC}$$

Revenind la problemă, notăm $BM = x$, $BN = y$ și avem:

$$MM' = 200 + \frac{1}{2}x$$

$$S_{ABMM'} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.$$

$$\left(200 + \frac{1}{4}x\right)x \sin C = 70.000 \sin C$$

$$x^2 + 800\,x - 280.000 = 0$$

$x = -400 + 100\sqrt{44} = 263{,}32\,m$; $MM' = 331{,}66$ m.

In mod analog pentru $BN = y$ avem:

$$NN' = 200 + \frac{1}{2}y.$$

$$S_{ABNN'} = \frac{2}{3}S_{ABCD}$$

$$\left(200 + \frac{1}{4}y\right)y \sin C = 140.00 \sin C$$

$$y^2 + 800\,y - 560.00 = 0$$

$y = -400 + 848{,}53 = 448{,}53$ m; $MN' = 424{,}27$ m

Verificare.

$$S_{ABNN'} = 265{,}83 \times 263{,}32 \sin C =$$
$$= 69998{,}3556 \sin C \cong$$
$$\cong 70.000 \sin C\ m^2 = \frac{1}{3} S_{ABCD}$$
$$S_{ABNN'} = 377{,}96 \times 185{,}21 \sin C =$$
$$= 70.001{,}9716 \sin C \cong$$
$$\cong 70.000 \sin C\ m^2 = \frac{1}{3} S_{ABCD}.$$

Problema 363

Dintr'un punct P se duce o secantă variabilă la un cerc dat. Fie A şi B punctele de intersecţie ale secantei cu cercul. Dacă C este mijlocul segmentului AB, să se arate că

$$\frac{1}{PC}\left(\frac{1}{PA}+\frac{1}{PB}\right)$$

este constant.

S. Fissgus
student

Soluţie. Putem scrie:

$$\frac{1}{PC}\left(\frac{1}{PA}+\frac{1}{PB}\right)=\frac{1}{PC}\left(\frac{PA+PB}{PA\cdot PB}\right)=$$
$$=\frac{1}{PA+AC}\left(\frac{2\,PA+2\,AC}{PA\cdot PB}\right)=\frac{2}{PA\cdot PB}=$$

constant, produsul PA · PB fiind puterea punctului P faţă de cercul O.

Problema 365

Să se construiască un triunghiu oarecare cunoscând raza cercului circumscris şi lungimile segmentelor determinate de ortocentru pe una din înălţimile triunghiului. Discuţie

Claudiu Ionescu-Bujor

Soluţie.

Fie ABC triunghiul de construit în care cunoaştem AH, HA' şi raza cercului circumscris. Evident că se cunoaşte şi direcţia laturii BC, perpendiculară pe AA', în punctul A'.

Se observă că se poate construi cercul lui Euler determinând în acest fel punctul D, mijlocul lui BC. Mai ţinem seamă că punctele H,G,O sunt colineare şi GH = 2 GO. (0 este centrul cercului circumscris, G este baricentrul).

Deducem următoarea construcţie:

1°. Construim cercul ce trece prin punctele A' şi M (mijlocul lui AH) şi are ca rază, (R/2) (Cercul lui Euler).

Acest cerc taie direcţia BC în punctul D mijlocul lui BC. Unim D cu A şi luăm pe AD punctul G astfel ca $DG = \frac{1}{3} AD$.

2°. Fixăm centrul cercului circumscris O prin una din următoarele metode:

a) In prelungirea lui HG luăm segmentul $GO = \frac{1}{2} HG$.

b) Prelungim segmentul HG şi-l tăiem cu cercul de rază R cu centrul în A în punctul O.

3°. Construim cercul circumscris care taie direcţia BC în punctele B şi C.

Problema este posibilă numai atunci când cercul lui Euler se poate construi, deci când:

$$A'H + HM \leqslant R.$$

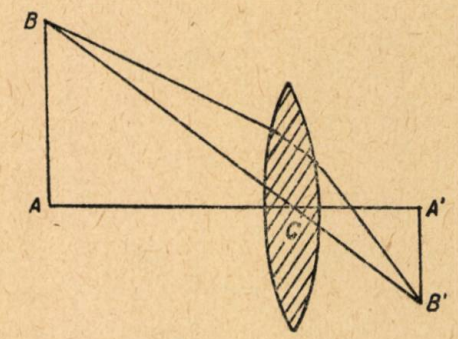
Observare. In realitate avem două soluţii căci punctul O' centrul cercului lui Euler se poate construi şi în dreapta lui A'M. Triunghiurile sunt simetrice faţă de AA'.

Problema 388

O lentilă convergentă are puterea de 3/32 dioptrii. Ştiind că drumul razei drepte ce trece prin centrul lentilei şi uneşte o extremitate a obiectului cu cealaltă extremitate a imaginei este de 60 m., iar raportul dintre imagine şi obiect este 1/2, să se găsească mărimea obiectului.

Gh. Cristea, elev Bucureşti

Soluţie. Fie AB obiectul, A' B' imaginea şi C centrul lentilei.



Din triunghiurile asemenea avem:

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C}{AC}=\frac{B'C}{BC}=\frac{1}{2}.$$

Deoarece $BB' = 60$ m şi $\frac{B'C+BC}{BC}=\frac{B'B}{BC}=\frac{3}{2}$.

Rezultă $\overline{BC} = 40$ m; $\overline{B'C} = 20$ m;

$$\overline{A'C} = d' = \frac{1}{2}\overline{AC} = \frac{1}{2} d.$$

Mai avem:

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{d}+\frac{1}{d'}, \quad \text{sau} \quad \frac{3}{32}=\frac{1}{2d'}+\frac{1}{d'}\ ; \quad d' = 16\,m$$

şi $$d = 2d' = 32\ \text{m}$$

Prin urmare $AB = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{AC}^2} = \sqrt{576} = 24$ m.

Problema 390

Să se verifice algebric și geometric egalitatea

$$\sqrt{6}=\sqrt{2}+2\sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

Gh. Bercea, elev Oraviţa

Soluţie, 1°. Egalitatea se verifică algebric foarte uşor, prin ridicare la patrat sau ţinând seamă de transformarea

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+C}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-C}{2}}$$

unde $C^2=A^2-B.$

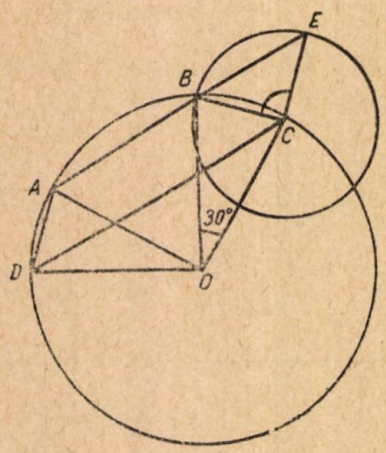
Avem:

$$2\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{6}-\sqrt{2}.$$

2°. Impărţind egalitatea cu $\sqrt{2}$ obţinem:

$$\sqrt{3}=1+\sqrt{2}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

Insă $\sqrt{3}$ este latura triunghiului echilateral înscris în cercul de rază 1, iar 1 şi $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}$ sunt respectiv latura exagonului regulat înscris în cercul de rază 1 şi latura patratului înscris în cercul de rază latura dodecagonului regulat înscris în cercul de rază 1.



Prin urmare în cercul de rază unitatea luăm două raze perpendiculare OD şi OB, apoi trasăm $AB=l_6$, $CD=l_{12}$, $CD=l_3$ iar pe BC construim un triunghiu dreptunghiu isoscel de ipotenuză BE.

Insă $\sphericalangle OBC=75°$ iar $\sphericalangle ABE=\sphericalangle ABO+\sphericalangle OBC+\sphericalangle CBE=60°+75°+45°=180°$, ceea ce ne arată că punctele A, B, E sunt colineare. Deoarece $\sphericalangle DCB=75°-30°=45°=\sphericalangle CBE$ segmentele AE şi CD sunt paralele.

Mai avem $\sphericalangle ADC+\sphericalangle DCE=\sphericalangle DCB+\sphericalangle DCB+90°=180°$ deci $AD\parallel CE$.

Prin urmare patrulaterul AECD este paralelogram şi rezultă:

$$\overline{AE}=\overline{DC} \quad \text{sau:} \quad \overline{AB}+\overline{BE}=\overline{DC}$$

sau: $$1+\sqrt{2}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{3}.$$

Problema 400

In triunghiul ABC fie B_1, C_1, B_2, C_2, proiecţiile vârfurilor B şi C pe bisectoarea interioară sau exterioară a unghiului A şi a_1 piciorul înălţimii corespunzătoare aceluiaşi unghi. Să se arate că:

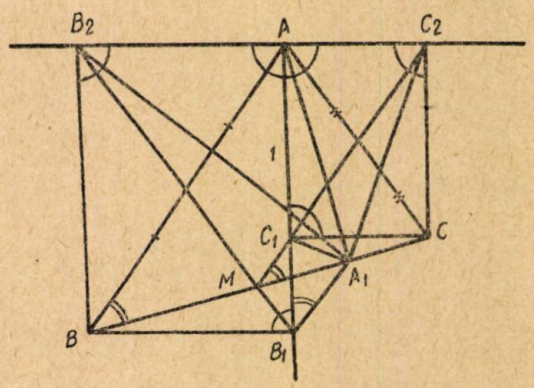
1°. *Triunghiurile $A_1B_1C_1$ şi $A_1B_2C_2$ sunt asemenea triunghiului ABC.*

2°. *Cercurile circumscrise unghiurilor $A_1B_1C_1$, $A_1B_2C_2$* trec prin mijlocul laturii BC.

Gh. Nicoară

Soluţie. 1°. Segmentul A_1C_1 este antiparalel faţă de AC şi deci:

$$\sphericalangle B_1C_1A_1=\sphericalangle C.$$



Patrulaterul AA_1B_1B este inscriptibil având $\sphericalangle BB_1A=\sphericalangle BA_1A=90°$, deci $\sphericalangle C_1B_1A_1=\sphericalangle B$.

Prin urmare triunghiurile $A_1B_1C_1$ şi ABC sunt asemenea

Patrulaterele AA_1CC_2 şi AA_1BB_2 fiind inscriptibile (câte două unghiuri opuse drepte) avem

$$\sphericalangle B_2C_2A_1=C \text{ şi } \sphericalangle C_2B_2A_1=B.$$

Triunghiurile $A_1B_2C_2$ şi ABC sunt asemenea

2°. Patrulaterele AB_1BB_2 şi AC_1CC_2 fiind dreptunghiuri (câte trei unghiuri drepte menţionate prin arce pe figură) diagonalele AB şi B_1B_2 respectiv AC şi C_1C_2 se taie în părţi egale. Este uşor de observat că $B_1B_2\parallel AC$ şi $C_1C_2\parallel AB$. Intr'adevăr

$$\sphericalangle B_2B_1A=\frac{A}{2}=\sphericalangle B_1AC$$

şi $$\sphericalangle AC_1C_2=\frac{A}{2}=\sphericalangle BAB_1.$$

Conform celor spuse mai sus B_2B_1 şi C_2C_1 sunt concurente pe BC în punctul M mijlocul acesteia.

Rezultă imediat $\sphericalangle C_2MC=B=\sphericalangle C_1B_1A_1$ şi $\sphericalangle B_2MC_2=A$

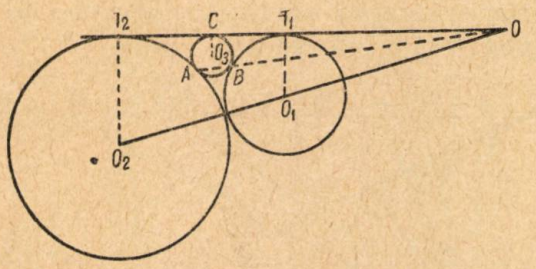
Deci patrulaterele $A_1B_1MC_1$ şi $A_1MB_2C_2$ sunt inscriptibile.

Problema 407

Dându-se două cercuri de raze R *şi* r, *tangente exterioare, să se calculeze raza cercului tangent la cercurile date şi la tangenta comună acestor cercuri.*

* * *

Soluţie. Fie O_1, O_2 centrele celor două cercuri, T_1, T_2 punctele de contact ale tangentei, C punctul de contact al cercului, a cărui rază o calculăm, cu tangenta T_2T_1, A, B, punctele de contact a cercurilor O_2, O_1 cu cercul mic, T punctul de tangentă al cercurilor O_2 şi O_1. Fie x raza cercului mic de centru O_3.



Punctele A şi B fiind centrele de similitudine inversă a cercurilor O_2 şi O_3 şi O_1 şi O^3, sunt în linie dreaptă cu centrul de similitudine directă O al cercurilor O_2 şi O_1. Coardele AT şi BT fiind anti-omoloage putem scrie:

$$\overline{OT}\cdot\overline{OT}=\overline{OB}\cdot\overline{OA}=\overline{OC}^2$$

de unde rezultă $\overline{OT}=\overline{OC}$.

Să calculăm pe OT. In triunghiurile OO_1T_1 şi OO_2T_2 avem:

$$\frac{OO_1}{OO_1+R+r}=\frac{r}{R},$$

de unde:

$$OO_1=\frac{r(R+r)}{R-r};$$

iar

$$OT=OO_1+r=\frac{2Rr}{R-r}.$$

In triunghiul OO_1T_1 avem:

$$\overline{OT_1}^2=\overline{OO_1}^2-\overline{O_1T_1}^2,$$

sau

$$OT_1=\frac{2r\sqrt{Rr}}{R-r}$$

Prin urmare

$$CT_1=OT-OT_1=\frac{2(Rr-r\sqrt{Rr})}{R-r}.$$

Insă tangenta CT_1 este medie geometrică între diametrele cercurilor O_1 şi O_3 (Geometrie, manual unic cl. IX, pag. 279, exerciţiul 327)

$$2\sqrt{rx}=\frac{2(Rr-r\sqrt{Rr})}{R-r}$$

$$rx=\left(\frac{r\sqrt{R}(\sqrt{R}-\sqrt{r})}{(\sqrt{R}-\sqrt{r})(\sqrt{R}+\sqrt{r})}\right)^2;$$

deci

$$x=\frac{Rr}{(\sqrt{R}+\sqrt{r})^2}$$

Când $R=r$ atunci $x=\frac{R}{4}$.

Problema 411

Să se arate că în orice triunghi ascuţitunghi există dubla inegalitate:

$$3>4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}>\frac{3}{2}$$

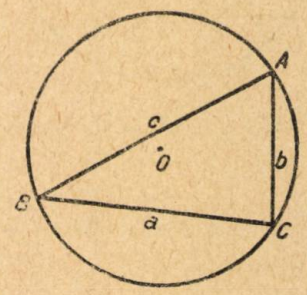
2°. *Să se arate apoi că dacă într'un triunghiu există relaţia:*

$$\sin A+\sin B+\sin C=1$$

triunghiul este optusunghi.

L. Mănescu

Soluţie. In orice triunghiu ascuţitunghi centrul cercului circumscris este situat în interiorul triunghiului (1).



Ţinând seama că

$$4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=\frac{p}{R}$$

inegalitatea de demonstrat devine

$$3R>p>\frac{3}{2}R.$$

Prima inegalitate rezultă prin adunarea inegalităţilor $c<2R$; $b<2R$; $a<2R$.

A doua inegalitate, $2p<3R$, se deduce ţinând seamă de propoziţiunea (1) şi de teorema: «O linie poligonală convexă este mai mică decât orice

linie poligonală, care are aceleași extremități dar care o înconjoară pe prima ». Putem deci scrie:

$$c + b > 2R;\ a + c > 2R;\ a + b > 2R$$

Prin adunare obținem:

$a + b + b + c + c + a > 6R$ sau $4p > 6R$; $2p > 3R$

2°. Deoarece

$$\sin A + \sin B + \sin C = \frac{p}{R}$$

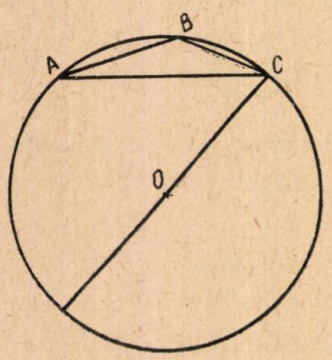
relația din renunț este echivalentă cu

$$p = R \text{ sau } 2p = 2R.$$

Relația $p = R$ ne arată că triunghiul nu poate fi ascuțitunghi ținând seamă de dubla inegalitate dela (1°).

Să arătăm că relația este verificată numai de elementele unui triunghi-optusunghi.

Fie triunghiul optusunghi ABC. Prin vârful C ducem un diametru cercului circumscris. Deoarece $AC < AB + AC$, pentru ca relația $2p = 2R$ pentru ca relația $2p = 2R$ să fie verificată trebue să avem $AC < R$, deci $\sphericalangle AOC < 60°$ și $\sphericalangle ABC > 150°$.



Condiția $\sphericalangle ABC > 150°$ o putem obține și altfel. Avem

$$p = \frac{1}{2}(a + b + c);\quad R = \frac{1}{2}\frac{b}{\sin B}$$

$$a + b + c = \frac{b}{\sin B}$$

$$\frac{1}{\sin B} = \frac{a + c}{b} + 1$$

Cum $a + c > b$

$$\frac{1}{\sin B} > 2,$$

rezultă

$$\sin B < \frac{1}{2},$$

deci

$$B > 150°.$$

Problema 412

Fie Δ și Δ_1 după semidrepte ce pornesc din același punct B. *Dintr'un punct* A *situat în planul lor se duc la* Δ *oblicele* AA_1, AA_2, AA_n *ce întâlnesc pe* Δ_1 *în punctele* B_1, B,... B_n.

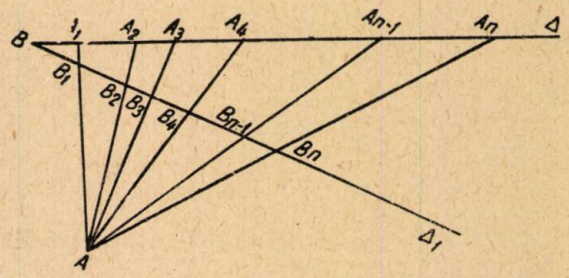
Să se arate că dacă:

$$\frac{A_2A_1}{A_1B} = \frac{A_3A_2}{A_2B} = \frac{A_4A_3}{A_3B} = \ldots = \frac{A_nA_{n-1}}{A_{n-1}B} = p$$

și $\frac{AB_1}{A_1B_1} = a$, *atunci rapoartele* $\frac{AB_1}{B_1A_1}, \ldots, \frac{AB_n}{B_nA_n}$ *sunt în progresie geometrică*

Onofraș Eugen, student Iași

Soluție. Aplicând teorema lui *Menelaus* în triunghiul AA_1A_2, avem:



$$\frac{A_1B}{A_2B}\cdot\frac{B_2A_2}{AB_2}\cdot\frac{AB_1}{B_1A_1} = 1 \text{ sau } \frac{AB_2}{B_2A_2} = \frac{AB_1}{B_1A_1}\cdot\frac{A_1B}{A_2B};$$

însă

$$\frac{A_1B}{A_2B} = \frac{A_1B}{AB_1 + A_2A_1} = \frac{1}{1+p},$$

deci

$$\frac{AB_2}{B_2A_2} = a\left(\frac{1}{1+p}\right).$$

In triunghiul AA_2A_3 avem:

$$\frac{A_2B}{A_3B}\cdot\frac{B_3A_3}{AB_3}\cdot\frac{AB_2}{B_2A_2} = 1, \text{ sau } \frac{AB_3}{B_3A_3} = \frac{AB_2}{B_2A_2}\cdot\frac{A_2B}{A_3B};$$

însă

$$\frac{A_2B}{A_3B} = \frac{A_2B}{A_2B + A_3A_2} = \frac{1}{1+p}$$

deci

$$\frac{AB_3}{B_3A_3} = a\left(\frac{1}{1+p}\right)^2.$$

In fine avem:

$$\frac{AB_{n-1}}{B_{n-1}A_{n-1}} = a\left(\frac{1}{1+p}\right)^{n-2} \text{ și } \frac{AB_n}{B_nA_n} = a\left(\frac{1}{1+p}\right)^{n-1}$$

Rezultă că rapoartele

$$\frac{AB_1}{B_1A_1}, \frac{AB_2}{B_2A_2}, \frac{AB_3}{B_3A_3}, \ldots, \frac{AB_n}{B_nA_n}$$

formează progresia geometrică:

$$\therefore a,\ a\left(\frac{1}{1+p}\right), a\left(\frac{1}{1+p}\right)^2, \ldots, a\left(\frac{1}{1+p}\right)^{n-1}.$$

Exerciţii

Demonstraţi

$\left(\frac{125}{64}\right)^{10} < 1000$

EXERCIŢII ŞI PROBLEME PROPUSE

Probleme

A, B = puncte fixe;
Locul geometric M?

$\frac{1}{AM} - \frac{1}{BM} = \text{const.}$

643. Un vagon de tramvai având o forţă de tracţiune de 350 kg, se mişcă rectiliniu şi uniform pe un traseu orizontal şi străbate o distanţă de 2 km, cu o viteză de 36 km/oră.

Care este intensitatea curentului folosit, dacă tensiunea la borne este 500 volţi?

Spiridon Manura

644. Pe un acelaşi plan inclinat, depe aceeaşi linie orizontală li se dă drumul în acelaşi timp la două cutii sferice identice. Una din cutii este plină cu un lichid, cealaltă cu o pastă solidă de aceeaşi greutate specifică cu lichidul. Care din aceste cutii ajunge cea dintâi jos la baza planului înclinat? Se va presupune că cutiile se rostogolesc, iar lichidul din prima cutie se poate mişca fără frecare pe pereţii acestei cutii.

Alexandru Stoenescu

645. Două coarde de aceeaşi lungime, însă neegal întinse, una de fier şi alta de cupru sunt la unison. Coarda de cupru fiind de 3 ori mai întinsă decât cea de fier şi raportul celor două metale fiind 1,15 se cere:

1. Să se calculeze raportul diametrelor lor.

2. Raportul între tensiunile celor două coarde astfel ca numărul de vibraţii al coardei de fier să fie $\frac{3}{2}$ din numărul de vibraţii al coardei de cupru.

Cucula W. Dacos

646. In ziua de 7 Noembrie 1952, declinaţia şi ecuaţia medie a Soarelui sunt

$$\delta_x = -16^0\,20' \text{ şi } e_m = +16^m\,17^0$$

Pentru care puncte depe Pământ, Soarele răsare la timpul mediu al locului

$$t_m = 7^h\,28^m\,03^s.$$

C. V. Costăchescu

647. Doi conductori electrici sunt aşezaţi paralel la o distanţă de 0,6 m pe o porţiune de 50 metri.

Prin conductori trec curenţi de acelaşi sens şi de intensităţi respectiv de 2000 A şi 3000 Amperi.

Se cere forţa ce se desvoltă între conductori?

Gavrilă Burlea
elev, Făgăraş

648. Să se calculeze intensitatea curentului ce străbate un solenoid lung de 30 cm şi cu un număr de 40 spire, dacă atunci când se introduce în solenoid o bucată de fier moale ($\mu = 2500$), se obţine o inducţie de 5000 gauşi. Cu cât se măreşte inducţia dacă intensitatea curentului creşte cu 1,8 amperi?

Oprea Constantin
Bucureşti

649. Fie ABCD secţiunea axială făcută de un plan într'un cilindru circular drept de rază R şi înălţime h. Prin consideraţii de volume să se exprime aria secţiunii făcute în cilindru, de un plan care să treacă prin diagonala BC a dreptunghiului ABCD şi să fie perpendicular pe planul primei secţiuni ABCD.

C. Ionescu-Ţiu

650. Pe fiecare latură a triunghiului ABC şi prelungirea celorlalte două, se construesc patrulaterele ABC'C'', BCA'A'' şi CAB'B'' având

$$\overline{AC''} = \overline{BC'} = \overline{AB};\ \overline{BA''} = \overline{CA'} = \overline{BC} \text{ şi } \overline{CB''} = \overline{AB'} = \overline{AC}.$$

Diagonalele lor se taie în punctele L, M, N,. Să se demonstreze că:

1°. Triunghiurile LMN şi ABC sunt egale.

2° Perpendicularele din L, M şi N duse respectiv pe laturile BC, AC şi AB sunt concurente.

3°. Dacă notăm cu S, S_2, S_3 şi S_1 ariile triunghiului şi patrulaterelor date, există relaţia:

$$\frac{S_1 + S_2 + S_3}{S} = \frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}{abc}$$

4° In cazul când triunghiul este dreptunghic,

$$S_1 = S_2 + S_3$$

Gh. Bazacov
Tr.-Severin

651. Să se verifice identitatea

$$\sin C \sin(A + B - C) - \sin A \sin B = \sin(B - C) \sin(C - A).$$

N. N. Mihăileanu

652. Două cercuri se intersectează în punctele A şi B. Fie $T_1 T_2$ şi $T_1' T_2'$ tangentele lor comune.

Să se demonstreze că cercurile circumscrise triunghiurilor $AT_1 T_2$, $AT_1' T_2'$ sunt tangente. Acelaşi lucru pentru cercurile circumscrise triunghiurilor $BT_1 T_2$ şi $BT_1' T_2'$.

Cezar Coşniţă

653. Să se arate că pentru n întreg și pozitiv există relațiile:

$$\cos\frac{\pi}{2n+1}+\cos\frac{3\pi}{2n+1}+\cos\frac{5\pi}{2n+1}+\ldots+$$
$$+\cos\frac{2n-1}{2n+1}\pi=\frac{1}{2};$$

$$\cos\frac{2\pi}{2n+1}+\cos\frac{4\pi}{2n+1}+\cos\frac{6\pi}{2n+1}+\ldots+$$
$$+\cos\frac{2n}{2n+1}\pi=-\frac{1}{2}$$

Ion Zarda
Câmpina

654. Intr'un cerc se duce diametrul AB și raza OC perpendiculară pe acest diametru. Se ia pe cerc punctul M cuprins între A și C. Dreapta BM întâlnește pe OC în L și pe AC în K iar raza OM taie pe AC în punctul I.

Să se determine poziția punctului M pe cerc, astfel ca patrulaterul OIKL să fie inscriptibil și să se calculeze raza cercului circumscris patrulaterului.

I. Sager

655. Fie H ortocentrul triunghiului ABC. O paralelă la baza BC taie laturile AB, AC în Q și P iar înălțimile AH, BH, CH în S, N, M. Să se verifice că

$$SP\times SN=SQ\times SM$$

Petre Stanciu

656. Să se determine un număr de patru cifre care, transcris în sistemele de baze 12 și 14 se scrie $xyoz$ și $zytx$.

Marius Iosifescu
elev, Pitești

657. Să se construiască un triunghiu ABC, cunoscând lungimea medianei și bisectoarei aceluiași vârf și poziția centrului cercului înscris, pe bisectoarea dată.

Emil Secoșan

658. Fie un triunghi echilateral ABC și M mijlocul laturii BC. Se proiectează B și C în N și P pe o dreaptă oarecare ce trece prin A. Să se arate că triunghiul MNP este echilateral.

Gh. I. Bercea
elev, Oravița

659. Să se arate că dacă într'un triunghi ABC avem relația

$$\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C=3$$

atunci avem și

$$2+\cos^2A=\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C$$

Emeric Deutsch

660. Notând:

$$u_1=1,\ u_2=3,\ u_3=4,\ldots\ u_n=u_{n-1}+u_{n-2}$$

să se demonstreze că avem:

$$U_n=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Ce devine u_n, când:

$$u_1=a,\ u_2=b,\ldots,\text{ etc.}$$

Gh. Zapan

661. Dacă

$$a+b+c=\alpha+\beta+\gamma+6^\circ$$

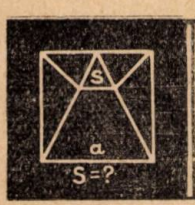
atunci

$$\cos^2(a-\alpha+3^\circ)+\cos^2(b-\beta+9^\circ)+$$
$$+\cos^2(c-\gamma+27^\circ)=\frac{3}{2}+2\sin(78^\circ+\alpha+$$
$$+\beta-a-b)\sin(54^\circ+\beta+\gamma-b-c)\sin(60^\circ+\gamma+$$
$$+\alpha-c-a).$$

Ioan Gligor

662. Să se construiască centrul de greutate al unui triunghi dat prin vârfurile sale, numai cu compasul.

Muedin Sureia
elev, Constanța



EXERCIȚII PROPUSE PENTRU ÎNVĂȚĂMÂNTUL ELEMENTAR

E. 203. Pentru construirea turbinelor hidraulice, generatoarelor de curent, porților dela stăvilare, ecluze și alte instalații dela stațiunile hidroelectrice dela Kuibîșev și Stalingrad este nevoie de 140 000 tone oțel. Să se calculeze volumul metalului necesar pentru aceste construcții și numărul de vagoane a câte 20 000 kg. necesare pentru transport, densitatea oțelului fiind 7,8.

* * *

E. 204. Screperul atașat la tractorul S-80 folosit la marile construcții pentru transportul pământului are cutia cu o capacitate de 6 m². Să se afle greutatea pământului pe care el o poate transporta o singură dată, dacă greutatea specifică a pământului este 1,4.

* * *

E. 205. Pe două bobine de aceeași mărime sunt înfășurate cabluri respectiv de 640 metri și 1 000

metri lungime. Să se afle raportul diametrelor celor două cabluri.

C. I. Ț.

E. 206. O barcă cu motor mergând pe un lac face 15 km/oră. pe un râu face 30 minute în susul apei, iar în josul apei, aceeași distanță, o face în 20 minute. Care este viteza râului.

* * *

E. 207. Două cercuri sunt secante în A și B. Se duc diametrele AA_1 și AA_2 celor două cercuri. Să se arate că punctele A_1B, A_2 sunt în linie dreaptă.

* * *

E. 208. Intr'un triunghi ABC dreptunghic în A se duce înălțimea AD. Fie M și N proiecția lui D pe AC și AB. Să se arate că:

$$\overline{AM} \cdot \overline{MC} + \overline{AN} \cdot \overline{NB} = \overline{BD} \cdot \overline{DC}.$$

Florea C. Constantin
elev, Câmpina

E. 209. Un tractor mergând cu o viteză de 4,8 km pe oră a străbătut o anumită distanță în 3 ore și 10 minute. Cât timp va trebui tractorului pentru a străbate aceeași distanță, dacă viteza lui se va mări la 5,7 km pe oră.

* * *

E. 210. Cât spirt de 32° trebue adăugat la $\frac{3}{4}$ litri spirt de 80° pentru a obține spirt de 45°.

* * *

E. 211. Un aliaj de aur și cupru are greutatea de 440 grame și greutatea specifică de 18. Să se afle cât aur și cât cupru formează aliajul?

Dumitru I. Stoicescu
elev, Buzău

E. 212. Să se arate că suma ariilor cuprinse între cercul circumscris unui patrat și cercurile ce au ca diametru laturile patratului, este aceeași cu aria patratului.

B. Covrig
elev, Clnj

$x = 1 + \frac{1}{x}$

PAGINA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

S'au evidențiat în luna Iulie 1952, următorii rezolvitori de probleme:

Licea Ion (clasa IX, Galați), *Iosifescu V. Marius* (clasa IX, Pitești), *Tătaru D. Emil* (Clasa VIII, Aiud), *Anton Vasile* (clasa X, L. b. 5 București), *Popescu Alex. Dan* (clasa IX Reșița) *Savin Dan* (Anul II Școala tehnică Câmpulung Muscel), *Udrescu Valeriu* (clasa X Pitești), *Cazanacli Nicolae* (clasa X Craiova), *Truică Nicolae* (clasa XI, Tr. Severin), *Brozici Mircea* (clasa VII Șc. 1 Ploești), *Scutelnicu Constantin* (clasa X Dorohoi), *Poenaru Dorin* (clasa XI Oradea), *Nicolae Petre* (Lugoj), *Miclăuș Vasile* (Roșiorii de Vede).

* * *

In cursul lunii Iulie 1952 *s'au primit cel puțin cinci soluții bune la probleme propuse în Revista Matematică și Fizică în anii* 1951—1952 *dela următorii rezolvitori*:

AIUD (Cluj). Clasa VIII-a. Tătaru D. Emil (320, 321, 324, 329, 345, 348, 351, 363, 364, 367, 369, 375, 376, 377, 379, 383, 386, 392, 403, 404, 407, 429, 432, 434, 437, 443, 444, 445, 449, 457, 458, 459, 463).

ARAD. Clasa IX-a Căpraru Gheorghe (307, 587, E: 51, 70, 147, 156).

BAIA MARE. Cadar Ioan (340, 528, 532, 533, 537).

BACĂU. Clasa X-a. Mardare Petre (497, 499, 502, 506, 514, 550, 553, 578), Școala medie tehnică de construcții civile și industriale. Calman Leon (269 569, 578, E: 51, 55, 60, 156, 160, 165).

BUCUREȘTI. Liceul 1 băieți. Clasa X-a. Manea V. Marin (576, 569, 574, 578, 583,). Liceul 2 băieți. Clasa VII-a Bonoiu G. Vasile (E: 83, 99, 135, 156, 171). Școala 4 băieți Clasa VII-a. Schileru I. Dinu E: 147, 148, 149, 155, 160, 175, 176, 180, 182). Liceul 5 băieți, clasa X-a: Anton Vasile (251, 322, 332, 335, 337, 343, 351, 377, 388, 392, 396, 401, 419, 420, 422, 427, 439, 442, 445, 455, 460, 461, 477, 481, 482, 487, 497, 508, 510, 515, 525, 533, 540, 541, 556. 567, 578, 579, 581), Liceul I. L. Caragiale. Clasa XI-a. Oprea I. Constantin (358, 446, 454, 496, 504, 505, E: 148, 149, 157, P), Rudeanu Sergiu (508, 541, 550, 554, 561, 563, 572, 578, 581, 582, 583).

CÂMPULUNG-MUSCEL. Clasa XI-a. Nichifor Gheorghe (429, 430, 432, 433, 437, 441, 443, 444, 445, 453, 461, 483, 490, 501, 505, 525, 547, 550, 553, 561, 578, 582, 583), Școala medie tehnică de cărbuni. Anul II A. Savin Dan (312, 313, 315, 318, 321, 323, 324, 325, 327, 328, 329, 331, 332, 333, 335, 502, 505, 506, 507, 517, 569, 571, 573, 574, 575, 578, E: 155, 157, 161).

CARACAL. Clasa XI B. Băică Paul (512, 513, 518, 536, 561).

CARANSEBEȘ. Școala medie silvică. Loziciu I. Ilie (514, 516, 517, 520, 522, 550, 560, 578, 581, E: 157, 159, 171, 172, 173).

CONSTANȚA. Școala medie hidrotehnică. Lambă Stelian (512, 517, 518, 536, 537, E: 157).

CRAIOVA. Clasa X-a. Cazanacli Nicolae (341, 432, 419, 429, 433, 437, 457, 483, 505, 509, 520, 528, 550, 553, 554.

561, 562, 563, 567, 571, 572, 578, 581, 584). Clasa XI-a. Popescu I. Mihail (536, 550, 559, 560, 573, 578), Popescu P. Pavel (245, 264, 269, 271, 283, 307, 401, 462, 480, 518, 536, 537, 578, Sârbu I. Ovidiu (335, 340, 439, 449, 459, 463, 475, 467, 501, 508, 537, 568, 569, 574, E: 155, 156).

DOROHOI. Clasa X-a. Scutelnicu Constantin (375, 377, 379, 388, 398, 410, 413, 456, 458, 481, 522, 533, 541, 550, 552, 554,576, 581, E: 99, 109, 113, 114, 121, 125, 130, 142, 146, 147, 165, P). Clasa XI-a. Munteanu Marcel (264, 269, 270, 348, 358, 365, 371, 388, 392, 410, 429, 432, 459, 484, 514, 536, 537, 541, 561, 578, 583, P).

GALAŢI. Clasa IX-a. Licea Ioan (242, 245, 268, 279, 270, 271, 274, 278, 283, 286, 297, 303, 313, 315, 322, 323, 326, 328, 329, 333, 349, 343, 346, 348, 353, 358, 363, 364, 365, 367, 368, 369, 370, 371, 375, 379, 383, 386, 389, 392, 395, 399, 401, 404, 408, 410, 413, 415, 416, 422, 423, 426, 427, 428, 429, 432, 436, 437, 439, 441, 442, 443, 445, 446, 448, 449, 452, 453, 454, 455, 456, 457, 458, 459, 460, 461, 462, 463, 465, 466, 467, 468, 480 484, 488, 501, 503, 505, 507, 508, 510).

GIURGIU. Clasa X-a. Fota M. Stan (514, 520, 568, 578, 584).

FĂLFANI COSTEŞTI (Piteşti). Clasa VII. Tudorache C. Mihai (E: 87, 88, 91, 92, 93, 109, 114, 115, 116, 120, 121 124, 125, 150, 156, 157. 165, 171).

IAŞI. Liceul 1 fete. Clasa VIII A. Rădulescu Magda (518, E: 155, 156, 160, 161, 162), Clasa IX Ciobanu Maria (E: 93, 175, 176, 177, 179).

LUGOJ. Nehaiciuc T. Mihai (528, 533, 534, 536, 541, 543), Nicola Petru (324, 333, 337, 348, 364, 401, 427, 474, 476, 484, 493, 501, 503, 505, 506, 512, 516, 517, 520, 525, 528. 533, 536, 552, 568).

ORADEA. Clasa VII-a. Guiaşu Silviu (E: 68, 70, 75, 79 91, 109, 119, 124, 125, 149, 160). Clasa XI-a. Poenaru Dorin (285, 301, 303, 324, 328, 331, 410, 433, 434, 435, 476, 487, 497, 499, 503, 510, 512, 513, 514, 515, 516, 517, 523, 525, 543, 544, 574, 578).

ORAŞUL STALIN. Clasa XI-a. Silişteanu Mihail (365, 370, 372, 530, 550, 554, 553, 560. 561, 562, 563, 567, 571, 574, 578, 583, P). Institutul de mecanică Anul I. Loy Harro (434, 438, 439, 455, 466, 468, 481, 482, 495, 501, 506, 514, 515, 517, 518, 519, 525, 536, 539, 540).

ORAVIŢA. Cârdu Mircea (404, 426, 442, 533, 545, 547, 548, 550, 551, 559, 568. 574, P).

PETROŞANI. Clasa X-a. Drăghicescu Constatin (363, 364, 367, 375, 377, 379, 388, 407, 413, 454, 462, 468, 518, 536, 537, E: 109, 112, 113, 120, 121, 122, P).

PITEŞTI. Clasa IX-a A. Iosifescu V. Marius (272, 281, 285, 302, 360, 421, 545, 546, 547, 548, 549, 551, 553, 554, 555, 556, 557, 558, 561, 562, 563, 565, 567, 568, 569, 571, 572, 573, 574, 575, 576, 576, 577, 578, 579, 580, 581, 582, 583, 584, P), Mihalache Al. Cornel (E: 87, 142, 143, 144, 148, 149, 153, 165), Steriopol Ion (290, 307, 308, 325, 367, 404, 537, 541, E: 160, 167). Clasa X-a, Udrescu Şt. Valeriu (251, 287, 340, 471, 474, 475, 476, 477, 479, 480, 481, 482, 483, 484, 485, 487, 488, 489, 490, 491, 492, 493, 494, 495, 496, 497, 499, 500, P), Ungureanu Liviu (E: 50, 51, 53, 68, 69, 70, 72, 73, 74, 109, 113, 121, 122, 123, 124, 125, 137, 142, 147, 149, 156, 157, 160, 165, 171).

PLOEŞTI. Şcoala 1 băieţi. Clasa VII-a. Brozici Mircea (E: 50, 51, 60, 68 75, 82, 86, 92, 93, 97, 105, 107, 109, 113, 115, 119, 153, 155), Liceul băieţi. Clasa IX-a. Mihai Iulian (278, 352, 389, 432, 437, 444, 446, 474, 501, 567, 572, 578), Clasa X-a. Făgăraş Constantin (346, 398, 401, 429, 439, 440, 441, 453, 468, 485, 499, 509), Puşcaşu A. Alexandru (294, 508, 518, 532, 533, 536, 537, 541, 559, P).

RĂDĂUŢI. Clasa XI-a A. Lazăr Dumitru (283, 296, 321, 362, 369, 377, 379, 429, 437, 443, 505, 536, 545, 568, 583).

RÂMNICUL-SĂRAT. Clasa VIII-a. Voiculescu Cezar (505, 506, 508, 509, 517, 518, E: 76, 156, 157, 160, 161, 165, 170).

REŞIŢA. Clasa IX-a: Popescu Alex. Dan (268, 283, 297, 303, 312, 320, 322, 326, 329, 349, 352, 354, 372, 386, 387, 302, 425, 428, 432, 440, 444, 515, 522, 530, 569, 571, 572, 578, 581).

ROMAN. Clasa XI-a. Buga Ion (290, 297, 303, 307, 401, 408, 480, 481, 482, 529, 534, 536, 541, 543, 550, 568, 574, 578, P), Vulpe Ioan (282, 287, 303, 312, 334, 360, 404, 433, 456, 457, 480, 488).

ROŞIORII DE VEDE. Miclăuş Vasile (270, 274, 303, 326, 349, 368, 371, 374, 388, 398, 403, 411, 415, 432, 436, 440, 441, 443, 448, 456, 457, 459, 461, 463, 466, 480, 481, 483, 484, 485, 488, P).

SINAIA. Clasa IX-a. Frunză Dudu (478, 479, 506, 518, 525, E: 156, 160, 164).

SUCEAVA. Clasa X-a: Kostiner I. (456, 466, 550, 578, 603, 604).

TÂRGOVIŞTE. Clasa IX-a. Ionescu I. Ion (364, 386, 404, 540, E: 104, 116, 124, 131, 155, 156, 165), Clasa X-a. Oprea A. Constantin (427, 429, 432, 436, 448, 458, 466, 487, 488, 499, 501, 505, E: 70, 72, 99, 109, 137, 138, 147, 149).

TÂRGUL-JIU. Clasa VIII-a. Caţighera Virgil (485), 578, E: 127, 130, 142), Răcă Gheorghe (439, 445, 461, 468, 512, 561).

TÂRGUL-MUREŞ. Şcoala medie tehnică de comerţ. Anul I. Merceologie. Fetti Felicia (E: 57, 58, 62, 70, 76, 86, 109).

TECUCI. Clasa X-a. Ciucă Alexandru (369, 371, 386, 388, 440, 465, 466, 488, 514, 517, 578).

TIMIŞOARA. Liceul 2 băieţi. Clasa XI-a: Pascu Pavel (501, 505, 506, 507, 512, 517, 518, 520, 522, 525).

TURDA. Clasa X-a. Pascu E. Eugen (236, 263, 264, 454, 468, 512, 513, 517, 518, 543).

TURNU-SEVERIN. Clasa I-a: Zaharescu Marius (324, 341, 342, 371, 388, 398, 433, P), Zorilescu M. Dan (530, 536, 537, 538, 540, 554, 561, 571, 578, 583, E: 138, 155, 157, 160). Clasa XI-a. Niciovici C. Liviu (534, 543, 557, 568, 569, 574, 575), Racoveanu Em. Const. (427, 456, 461, 466, 488, 505, 506, 512, 513, 514, 517, 522, 535, 536, 540, 541, 550, 590, 603). Truică Nicolae (456, 464, 466, 506, 507, 508, 510, 512, 513, 514, 518, 519, 520, 523, 528, 536, 537, 541, 550, 553, 554, 559, 560, 561, 562, 563, 565, 579, 574, 578, 581, 583, 584, P).

VASLUI. Clasa XI-a. Cărare Paul (371, 392, 417, 448, 457, 514, 518, 522, 537, 541, 550, 578, E: 115, 122, 125, 164).

REVISTA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

ORGAN AL SOCIETĂŢII DE ŞTIINŢE MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R.

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

APARE SUB ÎNGRIJIREA UNUI SECRETARIAT DE REDACŢIE

REDACŢIA: STR. DIONISIE LUPU, 40. Parter. — BUCUREŞTI
RAIONUL STALIN

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică şi fizică a şcolilor, precum şi orice material informativ care ar interesa redacţia noastră

se vor trimite pe adresa de mai sus

ABONAMENTE:

Tarif general ... ... *Lei 60*

Tarif redus pentru elevi, studenţi şi profesori ... ... *Lei 10*

Abonamentele se fac numai prin:

Centrul de Difuzare a Presei

Pentru Bucureşti: Str. Const. Mille Nr. 14 — Telef. 5.28.90

Pentru Provincie: Centrul de Difuzare a Presei din Capitalele Regiunilor sau Raioanelor — Banca de Stat în Contul C.D.P. Nr. 038.068

CĂRȚI APARUTE IN

M.I.M.I.C.

Curs de Matematică

Vol. I 400 pag. — 6,81 lei
Vol. II 340 pag. — 6,81 lei

ALEXANDROV:

Probleme de construcții geometrice
(traducere din limba rusă)

212 pag. — 7,65 lei

MINISTERUL COMERȚULUI INTERIOR

Matematici economice

261 pag. — 11,70 lei

MINISTERUL COMERȚULUI INTERIOR

Manualul de calculații economice

170 pag. — 8,50 lei

MINISTERUL INVĂȚĂMÂNTULUI PUBLIC

Curs de matematici

400 pag. — 7,80 lei

Desenul tehnic

Vol. I 212 pag. — 8,50 lei
Vol. II 356 pag. — 10,63 lei

M.I.M.I.C.

Desenul tehnic

Vol. I 132 pag. 4,25 lei
Vol. II 152 pag. 3,40 lei
Vol. III 112 pag. 3,80 lei

EDITURA TEHNICĂ

ÎNTREPRINDEREA POLIGRAFICĂ Nr. 4. — C. 2199.

Lei 1.—

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE ȘI FIZICE DIN R.P.R.

KAT

BIBLIOTECA I.D.T.

REVISTA MATEMATICĂ și FIZICĂ

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

★

Trăiască în veci prietenia româno-sovietică!
Trăiască marele stegar al frontului păcii, cel mai bun prieten al poporului nostru
Iosif Vissarionovici STALIN!

★ ★

OCTOMBRIE

1952 10

EDITURA TEHNICĂ

REVISTA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

SUMARUL:

		Pag.
1.	*Luna Prieteniei Româno-Sovietice*	233
2.	*Şiruri recurente de O. Sacter*	235
3.	*Fotoelasticitatea de Angela Negulescu*	238
4.	*Construirea unui ampermetru de N. Rădulescu*	245
5.	*Chestiuni de examen*	246
6.	*Probleme rezolvate (384, 386, 406, 413, 415, 416, 448, 471, 473, 483, 485, 488, 489, 494, 495, 498, 499, 507)*	247
7.	*Exerciţii şi probleme propuse (663—682)*	253
8.	*Exerciţii propuse pentru învăţământul elementar* ...	255
9.	*Noutăţi din ştiinţa şi tehnica sovietică*	256
10.	*Pagina rezolvitorilor de probleme*	259

ANUL III 10 OCT. 1952

4821
BIBLIOTECA L. D. T.

REVISTA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ
PUBLICAŢIE PENTRU TINERET A SOCIETĂŢII DE MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ DIN R. P. R.
Anul III, Nr. 10 Octombrie 1952

Könyvtár TULAJDONA
ELLENŐRIZVE

LUNA PRIETENIEI ROMÂNO-SOVIETICE

In Patria noastră se desfăşoară cu multă însufleţire «Luna Prieteniei Româno-Sovietice». Oamenii muncii dela noi, alături de oamenii muncii din întreaga lume, se pregătesc să sărbătorească aniversarea celei mai luminoase zile din istoria omenirii — ziua de 7 Noembrie. E un prilej şi pentru tineretul nostru de a trece în revistă marile drepturi şi libertăţi precum şi posibilităţile lui de a-şi construi o viaţă fericită pentru el, datorită luptei clasei muncitoare în frunte cu avantgarda ei, Partidul, şi cu sprijinul frăţesc al Uniunii Sovietice. E un prilej de a analiza felul cum a folosit el însuşi minunatele învăţături ale bogatei experienţe sovietice şi de a găsi noi căi prin care această experienţă să fie folosită mai larg pentru ridicarea nivelului său ideologic şi profesional.

Poporul nostru nutreşte o dragoste fierbinte pentru Uniunea Sovietică. Iubim ţara care construeşte comunismul, pentrucă ea a deschis o epocă nouă în istoria omenirii, a dat o lovitură de trăznet lumii întemeiată pe exploatarea şi asuprirea omului de către om, a înfăptuit pentru întâia oară acea orânduire dreaptă pe care au visat-o generaţii după generaţii — orânduirea socialistă. Iubim Uniunea Sovietică, pentrucă ea ne-a arătat nu numai că lumea exploatării nu este veşnică, ci ne-a învăţat şi cum pot exploataţii şi asupriţii să lichideze cu această «veşnicie» capitalistă, cum pot să-şi construiască fericirea pe pământ. Uniunea Sovietică, îndeplinindu-şi rolul istoric de bază a revoluţiei proletare mondiale, a eliberat şi ţara noastră din închisoarea imperialistă, ne-a deschis larg porţile către construirea prin luptă a orânduirii socialiste şi în fruntea frontului organizat al partizanilor păcii, contribue la îndepărtarea pericolului războiului pustiitor ale cărui fire sunt trase de către imperialiştii anglo-americani.

La 24 Septembrie a acestui an, poporul nostru a primit o nouă Constituţie. Este Constituţia construirii unei vieţi fericite, este Constituţia construirii socialismului în Patria noastră. Pentru a ajunge până la acest mare eveniment de importanţă istorică, a fost necesar să se creeze condiţiile promulgării legii noastre fundamentale. Aceste condiţii au fost create cu ajutorul de nepreţuit şi multilateral al Marii Uniuni Sovietice, condusă de genialul învăţător al omenirii muncitoare tovarăşul Iosif Vissarionovici Stalin.

Noile condiţii din ţara noastră ne permit astăzi să consolidăm şi mai mult regimul nostru de democraţie populară. Alegerile dela 30 Noembrie a acestui an vor ridica în locurile de răspundere de deputaţi ai Marii Adunări Naţionale pe cei mai buni fii ai Patriei noastre. Ei vor reprezenta cu cinste interesele poporului. Ei vor contribui prin luptă la înfăptuirea măreţelor sarcini ale planului nostru cincinal.

In lupta pentru transformarea revoluţionară a şcolii noastre, Partidul Muncitoresc Român, călăuzindu-se de genialele învăţături ale lui Lenin şi Stalin cu privire la înfăptuirea revoluţiei culturale şi folosind experienţa istorică a Uniunii Sovietice, îndrumează şi sprijină puternic desvoltarea şcolii noi, care să le formeze elevilor o concepţie ştiinţifică justă despre natură şi societate, care să-şi pună întreaga activitate în slujba ridicării nivelului cultural al poporului, în slujba construirii socialismului.

Prin grija Partidului şi a Guvernului, tineretul din şcolile noastre s'a putut bucura de binefacerile experienţei preţioase a şcolii sovietice. Această vastă experienţă a putut pătrunde în şcoli pe diferite căi.

La îndemâna elevilor stau manualele redactate pe baza manualelor şi metodicelor sovietice. Cărţile de matematică şi cele de fizică editate în acest an, pentru şcolile din Republica noastră, au folosit în cea mai mare măsură experienţa manualelor sovietice redactate în spiritul materialismului dialectic şi al legării teoriei de practică.

La îndemâna tineretului din şcoli stau cărţi de matematică, fizică şi tehnică editate de către Editura Tehnică. «Construcţii geometrice» de Alexandrov, «Geometria lui Lobacevschi şi elementele de bază ale geometriei» de Cutuzov, «Calcule aproximative» de Bezicovici, «Nomografie» de

M. V. Pentcovschi, « Optica » de Landsberg, « Nucleul atomic » de Corsunschi, etc., care sunt lucrări ale oamenilor sovietici, de care se pot bucura tinerii din școlile noastre.

După exemplul sovietic și din inițiativa Partidului Muncitoresc Român s'au înființat în țara noastră, societăți științifice, printre ele și Societatea de Științe Matematice și Fizice din R.P.R. care luptă pentruca matematica și fizica, ajutoare prețioase pentru desvoltarea tehnicii, să pătrundă în massele largi ale oamenilor muncii, și în special în rândurile tineretului. In acest scop, Societatea de Științe Matematice și Fizice pune la dispoziția cadrelor didactice, studenților și elevilor cele două publicații ale sale; « Gazeta Matematică și Fizică » și « Revista Matematică și Fizică », care folosind ajutorul dat în publicațiile sovietice: « Matematica v școle » și Fizika v școle » pune la dispoziția cititorilor din Republica noastră materiale privind metodica de predare ca și diferite articole de sinteză și probleme.

In țara noastră au luat ființă pe lângă școli și pe oraș, cercuri de matematică și fizică, după exemplul cercurilor din școlile sovietice. Aceste cercuri au grupat în jurul lor elemente tinere dornice să adâncească studiul matematicilor și a fizicii, contribuind astfel la formarea cadrelor noastre viitoare tehnice și științifice.

In școlile medii tehnice, în institute și facultăți se leagă din ce în ce mai mult știința de practică. Se pregătesc astfel cadrele care vor contribui cu avânt și competență la îndeplinirea înainte de termen chiar, a planurilor de construirea vieții noastre fericite.

Mărețul exemplu de patriotism fierbinte al comsomoliștilor alături de exemplul luminos al comuniștilor și uteciștilor români, care s'au jertfit pentru a ne asigura nouă posibilitatea construirii unei vieți fericite, contribue la educarea tineretului nostru în spiritul dragostei nemărginite pentru patria noastră liberă. Munca plină de avânt din uzine și școli a tineretului ne stă mărturie a patriotismului său înflăcărat.

Mare și de neprețuit este ajutorul sovietic din toate celelalte sectoare ale vieții noastre publice. In toate domeniile de activitate, oamenii muncii scot la iveală rezultatele imense ale acestui ajutor. Mai presus de toate însă este ajutorul pe care-l dă Uniunea Sovietică în lupta sa hotărîtă pentru pace.

In fruntea mișcării mondiale a partizanilor păcii, Uniunea Sovietică demască fără cruțare uneltirile mârșave ale imperialiștilor atâțători la un nou război. Pe cât crește dragostea pentru Uniunea Sovietică și Conducătorul ei iubit, tovarășul Stalin, pe atât crește și ura fierbinte împotriva imperialiștilor instigatori la război.

Cu nestăvilită bucurie primesc oamenii muncii din întreaga lume succesele imense ale oamenilor sovietici în domeniul construirii comunismului. Recentul congres al XIX-lea al Partidului Comunist al Uniunii Sovietice are o uriașă însemnătate nu numai pentru mișcarea comunistă mondială ci și pentru întregul lagăr al păcii și democrației, deoarece creșterea forței Statului sovietic și înaintarea lui spre comunism întăresc considerabil forțele mondiale ale păcii.

Proiectul directivelor Congresului al XIX-lea al P.C. (b) al U.R.S.S., arată că; « Actualul plan cincinal (al 5-lea) demonstrează din nou în fața întregii lumi marea forță vitală a socialismului, avantajele fundamentale ale sistemului economic, socialist față de sistemul capitalist. Acest plan cincinal este un plan de construcție economică și culturală pașnică. El va contribui la consolidarea și lărgirea continuă a colaborării economice dintre Uniunea Sovietică și țările de democrație populară și la desvoltarea relațiilor economice cu toate țările care doresc să desvolte comerțul pe bază de egalitate . . .

Referindu-se la acest paragraf din proiectul directivelor, tovarășul Gheorghe Gheorghiu-Dej, în raportul său asupra proiectului de Constituție a R.P.R. spune:

« Aceste *cuvinte arată din nou cu deosebită putere, imensa importanță pe care o prezintă pentru țara noastră, alianța și prietenia cu Uniunea Sovietică.*

Dornic de pace și plin de hotărîre de a o apăra, Poporul Român a salutat înscrierea în Constituție a politicii externe a statului român democrat-popular de apărare a păcii, de prietenie și alianță cu Uniunea Sovietică și cu țările de democrație populară, a politicii de pace și prietenie cu toate popoarele iubitoare de pace ».

« Luna Prieteniei Româno-Sovietice » să fie pentru noi un nou prilej pentru a cunoaște și mai adânc mărețele realizări ale constructorilor comunismului, pentru a întări și mai mult prietenia dintre poporul nostru și popoarele sovietice, pentru a ajuta astfel la înflorirea noii noastre culturi, naționale în formă și socialistă în conținut.

Să facem din această sărbătoare o nouă dovadă de tăria frontului păcii și a democrației, de zidurile căruia valurile furioase ale imperialismului, să se spargă neputincioase.

ŞIRURI RECURENTE

O. Sacter

In matematici se întâlnesc adeseori succesiuni de numere cu numele de şiruri. De pildă succesiunile:

(1) $1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \ldots, n$

(2) $a, \quad a+r, \quad a+2r, \quad a+3r \ldots . a+(n-1)r$

(3) $a, \quad aq, \quad aq^2, \quad aq^3 \ldots aq^{n-1}$

(4) $1^2, \quad 2^2, \quad 3^2, \quad 4^2 \ldots n^2$

(5) $1, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 5, \ldots$

şi multe altele, sunt şiruri. Se observă lesne legea de formare la fiecare din succesiunile date drept pildă. In şirul al doilea, un termen se obţine din cel precedent căruia i se adună numărul constant r; în al treilea, un termen este egal cu cel precedent multiplicat prin q, iar în al 5-lea prin adunarea a doi termeni succesivi se obţine următorul. In toate aceste succesiuni există o lege de formare.

Şirul numeric este o succesiune de numere în care un termen oarecare se obţine printr'o lege anumită. Dacă se notează termenul de rang n prin u_n, legea de formare este dată de către o expresie dependentă de n prin care se exprimă u_n sau prin alte mijloce.

In şirurile (1), (2), (3) şi (4) avem respectiv

$$u_n = n; \quad u_n = a+(n-1)r; \quad u_n = aq^{n-1} \text{ şi } u_n = n^2,$$

iar în şirul (5) un termen se obţine din suma a doi termeni precedenţi.

La o examinare sumară a acestor succesiuni printre care se află progresia aritmetică (2), cea geometrică (3), şirul lui Fibonacci (5), şirul numerelor naturale (1) şi succesiunea patratelor numerelor naturale (4), nu se observă o caracteristică comună tuturor.

Adâncind studiul lor cu atenţie, descoperim totuşi un lucru foarte interesant, între termenii acestor şiruri există relaţii numite de recurenţă.

Să lămurim această afirmaţie.

Luăm de pildă şirul (2). Aci $u_n = a+(n-1)r$

$$u_{n+1} = a+nr \quad \text{deci} \quad u_{n+1} - u_n = r,$$

iar

$$u_{n+2} - u_{n+1} = r$$

prin urmare:

$$u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n$$

sau

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$$

Cu alte cuvinte, un termen oarecare se exprimă prin suma algebrică a produselor a doi termeni consecutivi precedenţi, fiecare respectiv, prin numerele 2 şi -1.

In progresia geometrică (3) unde $u_n = aq^{n-1}$ avem:

$$u_{n+1} = aq^n \quad \text{deci:} \quad u_{n+1} = qu_n .$$

Prin urmare un termen oarecare se obţine multiplicând pe cel precedent cu numărul fix q care este raţia progresiei.

In şirul patratelor (4) avem $u_n = n^2$ deci; $u_{n+1} = (n+1)^2$; rezultă: $u_{n+1} - u_n = 2n+1$, la fel avem:

$$u_{n+2} - u_{n+1} = 2n+3;$$

prin urmare:

$$u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 2;$$

şi analog:

$$u_{n+3} - 2u_{n+2} + u_{n+1} = 2$$

rezultă

$$u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n ;$$

ceea ce înseamnă că un termen oarecare al şirului se obţine făcând suma algebrică a produselor a trei termeni consecutivi şi care-l preced pe cel dat, fiecare respectiv, prin numerele 3; -3 şi 1.

Şirul lui Fibonacci (5) are o caracteristică asemănătoare. In acest şir prin însăşi definiţia lui avem:

$$u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$$

Un termen oarecare al şirului Fibonacci este egal cu suma algebrică a doi termeni consecutivi precedenţi multiplicaţi prin numerele 1 şi 1.

Şiruri de acest fel se numesc *recurente.*

In general dacă avem pentru şirul:

$$u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}, u_{n+2} \ldots u_{n+k} \ldots$$

relaţia

$$u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + a_2 u_{n+k-2} + \ldots + a_k u_n \qquad (6)$$

el este recurent, iar relaţia (6) se numeşte *ecuaţia de recurenţă*, care în cazul de faţă este de ordinul k pentrucă în acest şir trebue să luăm suma produselor a k termeni consecutivi fiecare prin coeficienţi fixi corespunzători: $a_1, a_2, \ldots a_k$, pentru a obţine termenul următor.

In exemplele tratate mai sus ecuaţia de recurenţă pentru şirul (3) este de ordinul 1, pentru şirurile (1), (2) şi (5) de ordinul 2, iar pentru şirul (4) ordinul ecuaţiei de recurenţă este 3.

Teoremă. *Şirul coeficienţilor câtului a două polinoame ordonate crescător, este recurent.*

Fie

$$P(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_m x^m$$

şi

$$Q(x) = B + B_1 x + B_2 x^2 + \ldots + B_k x^k \quad (B_0 \neq 0)$$

Dacă $P(x)$ nu se divide exact la $Q(x)$, împărţirea poate fi continuată nelimitat.

Fie:

$$u_1 + u_2 x + \ldots + u_k x^{k-1} + \ldots + u_n x^{n-1} + u_{n+1} x^n \ldots$$

câtul. Să demonstrăm că şirul

$$u_1, u_2, u_3 \ldots u_n \ldots$$

este recurent. Ne fixăm un număr întreg arbitrar n, care să satisfacă condiţia $n \geqslant m - k + 1$ şi ne oprim în procesul împărţirii la termenul câtului care conţine pe x^{n+k}. La rest se va obţine un polinom $R(x)$ care îl conţine pe x la o putere mai mare decât $n + k$. Scriind relaţia dintre deîmpărţit, împărţitor, cât şi rest, obţinem identitatea:

$$A_0 + A_1 x + \ldots + A_m x^m \equiv (B_0 + B_1 x + \ldots + B_k x^k)(u_1 + u_2 x + \ldots + u_{n+k+1} x^{n+k}) + R(x).$$

Exprimăm coeficienţii lui x^{n+k} din ambii membrii ai identităţii şi îi egalăm între ei. Având $n + k \geqslant m + 1$, coeficientul lui x^{n+k} din membrul stâng este zero. Tot zero trebuie să fie şi coeficientul lui x^{n+k} din membrul drept.

Dat fiind că $R(x)$ conţine pe x la puteri mai mari decât $n+k$, coeficientul lui x^{n+k} din membrul drept este:

$$u_{n+k+1} B_0 + u_{n+k} B_1 + \ldots + u_{n+1} B_k .$$

Pentrucă această expresie trebuie să fie nulă rezultă:

$$u_{n+k+1} = -\frac{B_1}{B_0} u_{n+k} - \frac{B_2}{B_0} u_{n+k+1} \ldots - \frac{B_k}{B_0} u_{n+1}$$

$(n \geqslant m - k + 1)$ care este o ecuaţie recurentă de ordinul k.

Teoremă. *Un şir recurent arbitrar de ordinul k*

$$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$$

care satisface ecuaţia:

$$u_{n+k} = a_1 u_{n+k+1} + \ldots + a_k u_n \; (n \geqslant m \geqslant 1)$$

coincide cu şirul coeficienţilor câtului obţinut prin împărţirea unui polinom oarecare $P(x)$ *la polinomul:*

$$Q(x) = 1 - a_1 x - a_2 x^2 - \ldots - a_k x^k .$$

Fie n un număr întreg arbitrar astfel ca $n > k + m - 2$. Să înmulţim $Q(x)$ prin

$$u + u_2 x + u_3 x^2 + \ldots + u_{n+k} x^n ,$$

vom obţine:

$$(1 - a_1 x - a_2 x^2 - \ldots - a_k x^k)(u_1 + u_2 x + \ldots + u_{k+m-1} x^{k+m-2} + \ldots + u_{n+1} x^n) = [u_1 + (u_2 - a_1 u_1) x + \ldots + (u_{k+m-1} - a_1 u_{k+m-2} - \ldots - a_k u_{m-1}) x^{k+m-2}] + [(u_{k+m} - a_1 u_{k+m-1} - \ldots - a_k u_m) x^{k+m-1} + \ldots + (u_{n+1} - a_1 u_n - \ldots - a_k u_{n-k+1}) x^n] - [(a_1 u_{n+1} + \ldots + a_k u_{n-k+2}) x^{n+1} + \ldots + a_k u_{n+1} x^{n+k}].$$

In prima paranteză mare se găseşte un polinom $P(x)$ al cărui grad este cel mult $k + m - 2$ şi ai cărui coeficienţi nu depind de n. In a doua paranteză mare polinomul are toţi coeficienţii nuli în virtutea relaţiei date:

$$u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + \ldots + a_k u_n \quad (n \geqslant m \geqslant 1),$$

iar în a treia paranteză mare, polinomul conţine coeficienţi dependenţi de n şi cu puteri cel mult egale cu $n + 1$, pe acest polinom îl notăm $R(x)$.

Produsul de mai sus se poate scrie astfel:

$$(1 - a_1 x - a_2 x^2 - \ldots - a_k x^k)(u_1 + u_2 x + \ldots + u_{n+1} x^n) = P(x) - R_n(x).$$

Deci se vede că $u_1 + u_2 x + \ldots + u_{n+1} x^n$ reprezintă câtul, iar $R_n(x)$ restul împărţirii polinomului $P(x)$ prin

$$Q(x) = 1 - a_1 x - a_2 x^2 \ldots - a_k x^k .$$

Aplicaţie. Fie şirul lui Fibonacci:

$$u_1 = 1, \quad u_2 = 1, \quad u_3 = 2, \quad u_4 = 3 \ldots$$

unde

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \qquad (n \geqslant 1)$$

aci avem $k = 2$; $a_1 = 1$; $a_2 = 1$ şi luăm $m = 1$, deci: $Q(x) = 1 - x - x^2$, iar $P(x)$ are gradul cel mult $m + k - 2 = 1$, expresia lui este:

$$P(x) = u_1 + (u_2 - a_1 u_1) x = 1 + (1 - 1 \cdot 1) x = 1$$

Aşadar numerele lui Fibonacci coincid cu şirul coeficienţilor câtului împărţirii lui 1 la $1 - x - x^2$.

* * *

Termenii unui şir recurent se pot exprima printr'o funcţie de rangul acelui termen. Ne mărginim să dovedim aceasta pentru şirul în care avem:

$$u_{n+2} = p u_{n+1} + q u_n .$$

Dacă z_1 şi z_2 sunt rădăcinile distincte ale ecuaţiei $z^2 = pz + q$ şi dacă

$$\alpha z_1 + \beta z_2 = u_1$$

şi

$$\alpha z_1^2 + \beta z_2^2 = u_2$$

atunci

$$u_n = \alpha z_1^n + \beta z_2^n \qquad (1)$$

Demonstrăm această formulă prin inducție. Presupunem formula adevărată pentru $n = k$ și $n = k + 1$; să arătăm că este valabilă și pentru $n = k + 2$.

Intr'adevăr, presupunând

$$u_k = \alpha z_1^k + \beta z_2^k \quad \text{și} \quad u_{k+1} = \alpha z_1^{k+1} + \beta z_2^{k+1}$$

deducem din formula: $u_{k+2} = pu_{k+1} + qu_k$ că:

$$u_{k+2} = p\,(\alpha z_1^{k+1} + \beta z_2^{k+1}) + q\,(\alpha z_1^k + \beta z_2^k)$$

sau

$$u_{k+2} = \alpha z_1^k (pz_1 + q) + \beta z_2^k (pz_2 + q).$$

Dar z_1 și z_2 fiind rădăcinile ecuației $z^2 = pz + q$ avem

$$pz_1 + q = z_1^2 \quad \text{și} \quad pz_2 + q = z_2^2$$

deci

$$u_{k+2} = \alpha z_1^k \cdot z_1^2 + \beta z_2^k \cdot z_2^2 = \alpha z_1^{k+2} + \beta z_2^{k+2}$$

ceeace dovedește că formula este adevărată și pentru $n = k + 2$.

Formula (1) fiind adevărată pentru $n = 1$ și $n = 2$ pentrucă α și β au fost aleși în așa fel încât să avem relațiile $u_1 = \alpha z_1 + \beta z_2$ și $u_2 = \alpha z_1^2 + \beta z_2^2$ rezultă că formula e adevărată și pentru $n = 2$ ș.a.m.d.

Dacă ne referim la șirul lui Fibonacci unde $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, atunci z_1 și z_2 sunt rădăcinile ecuației $z^2 - z - 1 = 0$

$$z_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{și} \quad z_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2},$$

iar α și β se obține rezolvând sistemul:

$$\alpha z_1 + \beta z_2 = 1$$
$$\alpha z_1^2 + \beta z_2^2 = 1$$

deci

$$\alpha = \frac{z_2^2 - z_2}{z_1 z_2 (z_2 - z_1)} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

și

$$\beta = \frac{z_1 - z_1^2}{z_1 z_2 (z_2 - z_1)} = \frac{-1}{\sqrt{5}}.$$

Prin urmare

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{5} \right)^n \right].$$

Desvoltând parantezele după formula binomului și făcând toate simplificările obținem:

$$u_n = \frac{1}{2^{n-1}} \left[C_n^1 + 5C_n^3 + 5^2 C_n^5 + 5^3 C_n^7 + \ldots \right]$$

Această relație ne dovedește legătura care există între termenii șirului Fibonacci și șirul coeficienților binominali.

* * *

Ne propunem să studiem în deaproape șirul recurent în care

$$u_1 = 1, \quad u_2 = 1 \quad \text{și} \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

Acest șir este denumit al lui « Fibonacci » după numele unui matematician care a trăit în secolul al 13-lea. Șirul se întâlnește prima dată în cartea « *Liber Abacci* » apărută în 1228. Autorul acestei cărți este Leonardo din Pisa, poreclit « Fibonacci ».

Numerele lui Fibonacci constitue prin însăși definiția lor o succesiune recurentă, ele au proprietăți generale care au fost semnalate mai înainte. Aceste numere au însă și o serie de proprietăți caracteristice pe care le prezentăm în rândurile ce urmează.

1. *Suma primelor* n *numere este* $u_{n+2} - 1$.

Avem conform definiției:

$$u_1 = u_3 - u_2$$
$$u_2 = u_4 - u_3$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$u_n = u_{n+2} - u_{n+1}$$

Adunând membru cu membru aceste egalități, obținem:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n = u_{n+2} - u_2 = u_{n+2} - 1$$

deoarece $u_2 = 1$.

2. *Suma primelor* n *pătrate ale numerelor lui Fibonacci este* $u_n \cdot u_{n+1}$.

Se observă că:

$$u_k u_{k+1} - u_{k+1} u_k = u_k (u_{k+1} - u_{k+1}) = u_k^2$$

de aci rezultă:

$$u_1^2 = u_1 u_2$$
$$u_2^2 = u_2 u_3 - u_1 u_2$$
$$u_3^2 = u_3 u_4 - u_2 u_3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$u_n^2 = u_n u_{n+1} - u_{n-1} u_n$$

Din adunarea termenilor din stânga și a celor din dreapta rezultă:

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \ldots + u_n^2 = u_n \cdot u_{n+1}$$

3. *Oricare ar fi* n *și* m *avem*:

$$u_{n+m} = u_{n-1} u_m + u_n u_{m+1}.$$

Pentru domenstrație vom folosi metoda inducției complete (vezi R.M.F. anul I Nr. 2).

Pentru $m = 1$ formula devine:

$$u_{n+1} = u_{n-1} u_1 + u_n u_2 = u_{n-1} + u_n$$

ceeace este evident.

Pentru $m = 2$ avem:

$$u_{n+2} = u_{n-1}\, u_2 + u_n\, u_3 = u_{n-1} + 2u_n$$

Insă

$$u_{n-1} + 2u_n = u_{n-1} + u_n + u_n = u_{n+1} + u_n = u_{n+2}$$

ceea ce dovedește că formula este adevărată și pentru $m = 2$. Presupunem formula valabilă pentru $m = k$ și pentru $m = k + 1$

$$u_{n+k} = u_{n-1}\, u_k + u_n\, u_{k+1} \qquad (a)$$

și

$$u_{n+k+1} = u_{n-1}\, u_{k+1} + u_n\, u_{k+2} \qquad (b)$$

să demonstrăm că formula e valabilă și pentru $m = k + 2$.

Adunând egalitățile (a) și (b) obținem

$$u_{n+k} + u_{n+k+1} = u_{n-1}(u_k + u_{k+1}) + \\ + u_n\,(u_{k+1} + u_{k+2})$$

sau:

$$u_{n+k+2} = u_{n-1}\, u_{k+2} + u_n\, u_{k+3}$$

ceeace dovedește justețea formulei și pentru $m = k + 2$; ea fiind adevărată pentru $m = 1$ și $m = 2$ va fi deci și pentru $m = 3$ și așa mai departe.

Consecințe. Dacă în formula demonstrată

$$u_{n+m} = u_{n-1}\, u_m + u_n\, u_{m+1}$$

înlocuim pe m prin n obținem

$$u_{2n} = u_n\,(u_{n-1} + u_{n+1})$$

și având în vedere că

$$u_n = u_{n+1} - u_{n-1}$$

rezultă:

$$u_{2n} = u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2.$$

Asemănător se poate dovedi

$$u_{3n} = u_{n+1}^3 + u_n^3 - u_{n-1}^3.$$

4. *Intre numerele din șirul lui Fibonacci există relația:*

$$u_{n+1}^2 = u_n\, u_{n+2} + (-1)^n.$$

Pentru demonstrarea formulei ne servim tot de metoda inducției.

Se verifică formula pentru $n = 1$ și $n = 2$ și presupunem formula adevărată pentru $n = k$, adică avem:

$$u_{k+1}^2 = u_k\, u_{k+2} + (-1)^k$$

să arătăm că ea este adevărată și pentru $n = k + 1$.

Adăugând la ambii membrii ai egalității precedente expresia: $u_{k+1}\, u_{k+2}$ obținem:

$$u_{k+1}^2 + u_{k+1}\, u_{k+2} = u_k\, u_{k+2} + u_{k+1}\, u_{k+2} + (-1)^k$$

sau

$$u_{k+k}\,(u_{k+1} + u_{k+2}) = u_{k+2}\,(u_k + u_{k+1}) + (-1)^k$$

de unde rezultă

$$u_{k+1}\, u_{k+3} = u_{k+2}^2 + (-1)^k$$

sau

$$u_{k+2}^2 = u_{k+1}\, u_{k+3} + (-1)^{k+1}$$

ceea ce trebue dovedit.

Formula fiind valabilă pentru $n = 2$ este adevărată și pentru $n = 3$ și așa mai departe.

Șirul lui Fibonacci admite încă multe alte proprietăți interesante, alte șiruri recurente au de asemeni proprietățile lor particulare pe care de sigur că unii cititori le vor releva, urmând unele din căile folosite în acest articol. Pentru acei ce vor să adâncească problemele le recomandăm broșurile sovietice: «Șiruri recurente» de A. I. Marcușevici și «Numerele lui Fibonacci» de N. N. Vorobiov.

FOTOELASTICITATEA: O APLICAȚIE TEHNICĂ A POLARIZAȚIEI LUMINII

Angela Negulescu

Materialele din care sunt făcute diferitele construcții (mașini, poduri clădiri, vagoane de cale ferată, etc.) sunt supuse la eforturi foarte variate ca mărime și ca direcție, ceea ce face ca în interiorul lor să se nască tensiuni și deformări elastice.

Cunoașterea repartizării acestor tensiuni este absolut necesară pentru a ști ce formă și ce dimensiuni trebue să capete materialul spre a rezista mai bine. Tensiunile ce se produc depind atât de mărimea și de direcția eforturilor la care sunt supuse materialele, cât și de natura, forma și dimensiunile materialului.

Formulele date de *Rezistența materialelor* și de *Teoria elasticității* nu sunt totdeauna suficiente și nici absolut exacte, pentru a le aplica la adevărata stare de tensiuni din interiorul pieselor de construcții. Munca este mult ușurată folosind *metoda fotoelasticității.*

Aceasta este o metodă optică de cercetare, care folosește ca principiu de bază *anisotropia artificială*, ce se naște în corpurile transparente, ca urmare a deformării lor mecanice. Analizate în lumină polarizată, corpurile deformate capătă colo-

rațiuni, după diferite linii, care arată direcțiile în care se exercită tensiunile interioare.

Metoda aceasta nouă de lucru se aplică cu mult succes în Uniunea Sovietică, țara cu știința și tehnica cea mai înaintată, unde Institutele de cercetări științifice și tehnice, cum și marile uzine și întreprinderi sunt prevăzute cu asemenea laboratoare de fotoelasticimetrie.

Pentru a înțelege principiile și tehnica metodei fotoelastice, trebue să vedem în ce constă fenomenul optic pe care se bazează ea, *anisotropia artificială*, precum și ce este *lumina polarizată.*

Ce este lumina polarizată?

Lumina constă din unde de natură electromagnetică, Fenomenele de interferență și difracție dovedesc caracterul *ondulatoriu* al luminii. Fenomenele de polarizație și interferență a razelor polarizate duc la concluzia că *undele luminoase sunt transversale.* Descoperind rotirea planului de polarizație într'un câmp magnetic, Faraday a constatat că fenomenele optice sunt strâns legate de cele magnetice. Maxwell a demonstrat apoi că variațiile unui câmp electromagnetic se propagă sub forma de unde transversale, cu viteza luminii, de unde a tras concluzia că: *lumina este o undă transversală de natură electromagnetică.*

Fenomenul de polarizație, descoperit în 1808, arată că o undă luminoasă poate prezenta o asimetrie *de proprietăți* în jurul direcției ei de propagare, în anumite condiții. Lumina naturală este un ansamblu de unde, care au simultan toate direcțiile de vibrație posibile, ceea ce înseamnă că proprietățile luminii sunt simetrice în jurul direcției de propagare, vibrațiile făcându-se în toate azimuturile (fig. 1 a). Punctul central arată o rază perpendiculară pe planul hârtiei, iar săgețile arată direcțiile de vibrare.

Lumina polarizată constă din unde luminoase care *au o singură direcție de vibrație, perfect ordonată*, vibrația făcându-se într'un singur plan (fig. 1 b). Dacă direcția de vibrație se menține în același plan, care conține și direcția de propagare, atunci unda este *polarizată linear.* Dacă extremitatea vectorului care vibrează descrie un cerc sau o elipsă, lumina este *polarizată circular sau eliptic.*

Fenomenele optice prin care se obține lumină polarizată sunt: reflecția, refracția și dubla refracție (birefringența).

Polarizația prin reflecție a fost descoperită de Malus, observând, printr'o lamă de calcit, lumină

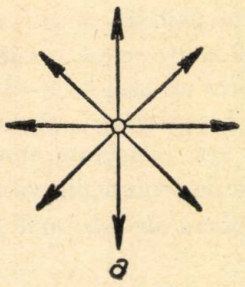


Fig. 1 a Fig. 1 b

reflectată de un geam. Rotind cristalul în jurul razei reflectate, a observat o variație a intensității de lumină, ceea ce înseamnă o asimetrie a *proprietăților* în jurul razei, adică polarizație (fig. 2 a).

Folosind două oglinzi, una care polarizează lumina, *polarizor*, și a doua care analizează raza reflectată, *analizor*, constatăm că intensitatea luminii e maximă atunci când planele de incidență ale celor două oglinzi sunt paralele între ele, iar intensitatea luminii e minimă atunci când aceste plane sunt perpendiculare (fig. 2 b, c).

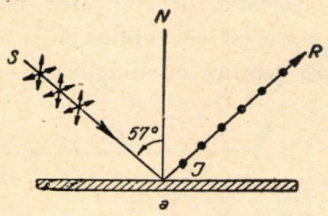


Fig. 2 a

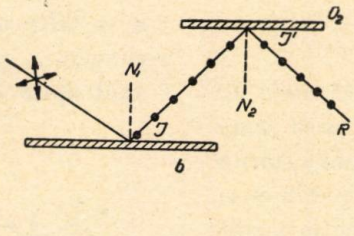


Fig. 2 b

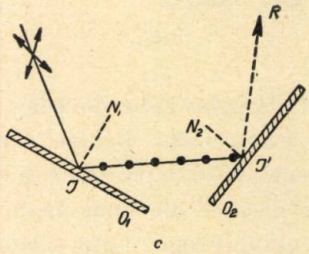


Fig. 2 c

Dar raza I'R nu este complet stinsă, minimul de intensitate luminoasă nu este complet nul, ceea ce înseamnă că raza reflectată nu este complet polarizată, ci e un amestec de lumină naturală și polarizată.

Variind unghiul de incidență *i*, se constată că lumina reflectată de suprafața unui corp transparent este total polarizată numai atunci când *raza reflectată și raza refractată sunt perpendiculare una pe alta.* In acest caz se deduce că : $\operatorname{tg} i = n$, unde n este indicele de refracție al mediului transparent. Această incidență se numește brewsteriană. Pentru sticlă incidența brewsteriană este de 57°.

Așa dar prin reflecție lumina naturală se polarizează, vibrațiile vectorului electric făcându-se *perpendicular pe planul de incidență* (fig. 2 a) .

Polarizația prin refracție. Analizând lumina refractată vedem că și aceasta este parțial polarizată. Fracțiunea de lumină ce se polarizează prin refracție depinde de unghiul de incidență, dar și de indicele de refracție al substanței. Dacă incidența corespunde legii de mai sus, polarizația este maximă, dar nu totală. Gradul de polarizație crește dacă razele sunt supuse la mai multe refracții succesive. Dacă se trece lumina printr'un bloc de 8—10 plăci (un top) sub incidență brewsteriană, atunci atât lumina reflectată cât și cea refractată sunt *total polarizate.* In cazul refracției, vibrațiile vectorului electric se fac chiar *în planul de incidență* (fig. 3).

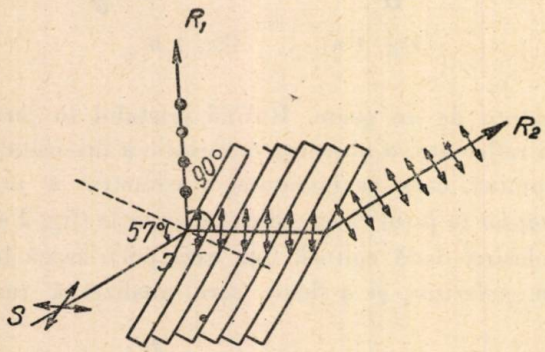


Fig. 3

Fenomenul de polarizație dovedește că *unda luminoasă este transversală.* Pentru explicarea fenomenului, Fresnel (1815) a presupus că lumina constă din vibrațiile elastice ale unui mediu numit eter, care umple tot universul. Este o concepție mecanicistă, deoarece fizica în acea vreme era bazată pe materialismul mecanicist. După teoria lui Fresnel, eterul ar fi trebuit să aibă proprietățile unui corp solid, ceea ce era în contradicție cu lipsa de frecare a corpurilor care se mișcă prin eter. Contradicția a fost rezolvată de teoria electromagnetică a luminii, care a arătat că *lumina este o undă de natură electromagnetică,* fiind variația simultană și foarte rapidă a unor câmpuri electrice și magnetice, perpendiculare între ele. In acest fel eterul devine o ipoteză nefolositoare și e părăsită. Intensitățile câmpurilor electrice și magnetice se reprezintă prin doi vectori E și H care sunt perpendiculari pe direcția de propagare a undei. Lumina naturală este lumina în care vectorul E, deci și H, are o singură direcție de variație (fig. 4).

Planul V care conține vectorul electric al luminii polarizate se numește *plan de vibrație,* iar planul P care conține vectorul magnetic se numește *plan de polarizație.* Pentru simplificare ne referim întotdeauna numai la unul din vectori, și anume la cel electric, deoarece el este cel care are acțiune luminoasă și este numit vector luminos; vectorul magnetic are numai un rol secundar.

Polarizația prin birefringență. Sunt unele corpuri prin care o rază de lumină care trece iese dublată; aceste corpuri se numesc birefringente. Birefringența a fost observată la spatul de Islanda, o

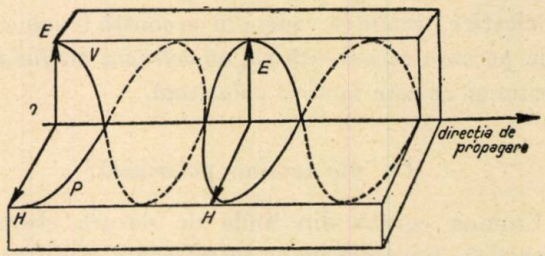


Fig. 4

varietate de carbonat de calciu, cristalizat în romboedri, care se găsește în natură. Când un fascicol incident cade normal pe fața cristalului, fascicolul emergent se bifurcă; unul merge în prelungire, formând *raza ordinară,* iar celălalt este deviat, formând *raza extraordinară.* Din cauză că aceste raze sunt deviate diferit înseamnă că ele au indici de refracție diferiți (n_0 și n_e). Există însă o direcție de-a-lungul căreia razele incidente se propagă fără a se bifurca: această direcție este numită prin convenție *ax op ic* al cristalului (fig. 5). La spat axul optic este paralel cu diagonala care unește

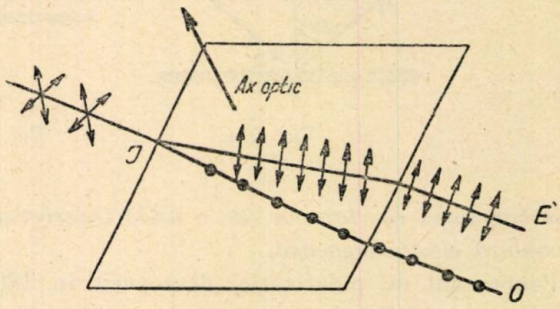


Fig. 5

unghiurile obtuze ale romboedrului; orice plan care trece prin axul optic se numește *secțiune principală a cristalului.*

O rază care cade normal pe suprafața cristalului se dublează. Analizând raza ordinară și cea extraordinară, se constată că amândouă sunt total polarizate și anume în planuri perpendiculare. Cea ordinară, în planul secțiunii principale, iar cea extraordinară, perpendicular pe acest plan.

Birefringența este datorită faptului că cele două unde polarizate, au viteze diferite de propagare.

Fenomenul de birefringență face ca mediile cristaline să se deosebească fundamental de cele ase-

menea sticlei sau apei. Din punct de vedere optic, corpurile se împart în *isotrope*, care au aceleași proprietăți optice în toate direcțiile, și *anisotrope* în care proprietățile optice variază cu direcția de propagare. Corpurile isotrope sunt monorefringente. Dintre corpurile isotrope fac parte corpurile amorfe și cele cristalizate în sistemul cubic. Corpurile anisotrope sunt birefringente; cristalele din sistemul pătratic, hexagonal, romboedric, care sunt uniaxe (au un singur ax optic adică o singură direcție după care lumina se propagă cu aceiași viteză) și de asemeni cristalele din sistemele ortorombic, monoclinic și triclinic, cari sunt biaxe, adică au două axe optice, două direcții după care lumina se propagă cu aceiași viteză.

Ca exemple de cristale uniaxe sunt: spatul de Islanda (sist. romboedric) și cuarțul (sist. hexagonal). Deosebirea între ele este următoarea: la spat viteza de propagare a razei extraordinare este mai mare decât a razei ordinare, iar la cuarț este invers.

Primul cristal se numește *negativ*, iar al doilea *pozitiv*. Viteza razei ordinare este totdeauna constantă, iar a razei extraordinare variază cu direcția (deci n_0 e constantă, pe când n_e variază). Reprezentând grafic aceste viteze și unind capetele vectorilor corespunzători, pentru raza ordinară obținem o sferă, iar pentru raza extraordinară un elipsoid tangent la sferă în două puncte. Aceste puncte se află pe direcția axului optic.

Dacă se taie un cristal de spat natural în două părți, după planul paralel cu diagonala DD′ (fig. 6)

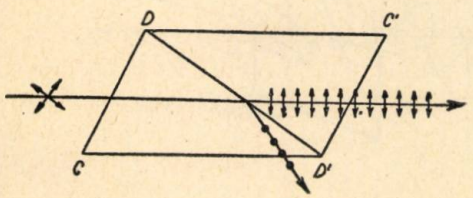


Fig. 6

și se lipesc din nou cele două părți cu balsam de Canada, iar fețele CD și C′D′ se șlefuesc la o anumită înclinare, se obține un dispozitiv de polarizare numit *nicol*. Raza ordinară se reflectă total pe stratul de balsam și e absorbită de fața înegrită a prismei. Raza extraordinară iese din cristal paralel cu raza incidentă. Prisma polarizează complet lumina.

Polarizare prin dicroism. Un alt mijloc de a polariza lumina îl formează *plăcile dicroice*. Dicroismul este o birefringență, combinată cu absorbția uneia din cele două raze. Această proprietate o are turmalina (fig. 7). Fascicolul emergent este lipsit de unele lungimi de undă, care au fost absorbite de cristal, și de aceea cristalul apare colorat. Acest fenomen prin care una din cele 2 raze polarizate perpendicular una pe alta (ordinara și extraordinara) este absorbită, face ca, privind cristalul în lumină naturală, să apară diferit colorat, după direcția în care privim. Fenomenul se numește *dicroism* sau *pleocroism*. Raza emergentă neabsorbită este polarizată total.

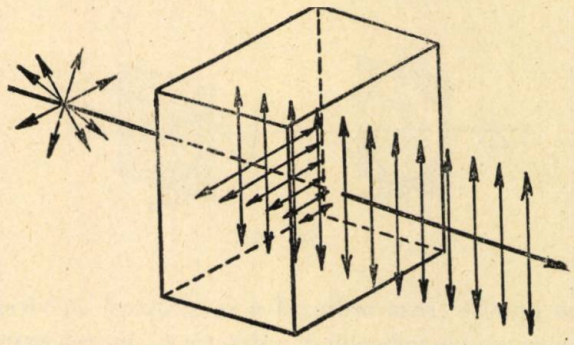


Fig. 7

Acest fenomen îl prezintă și o placă *polaroid*. Polaroidul este o lamă subțire dintr'un cristal artificial puternic dicroic, numit herapatit (sulfat de iodochinină). Chiar în grosime de 1 mm herapatitul absoarbe complet una din cele 2 raze polarizate.

Pentru a avea o suprafață cât mai mare, polaroizii nu se fac dintr'un singur cristal, ci dintr'o placă, formată dintr'o masă plastică, pe care, în timpul solidificării, s'au înglobat cristale mici de herapatit, orientate toate cu axul optic în aceeași direcțiune. Lumina care trece printr'un nicol sau printr'un polaroid are vibrațiile într'un singur plan, deci este polarizată. Lumina naturală este un amestec de lumină polarizată în toate azimuturile posibile. In adevăr, să presupunem că lumina emisă de un atom este linear polarizată; atunci miliardele de atomi emit lumină polarizată în toate direcțiile. Lumina naturală este datorită vribrației simultane a tuturor acestor atomi, deaceea lumina naturală este polarizată în toate azimuturile. Trecând lumina naturală printr'un filtru polarizant se poate izola lumina polarizată într'un singur plan.

Pentru a constata dacă un fascicol de lumină este polarizat, se așează în calea lui după ce a ieșit dintr'un polarizator (oglindă, top, nicol, polaroid) un al doilea filtru polarizant, *analizorul*. Dacă planele de polarizare a celor 2 dispozitivi sunt paralele, lumina trece, dacă sunt perpendiculare, lumina nu trece (fig. 8). La o rotire de 360° în jurul razei, se produc două întunecări și două maxime de lumină: aceasta arată o asimetrie în jurul razei.

Ce este fotoelasticitatea?

Intre doi doi polaroizi încrucișați punem o lamă de sticlă ordinară: câmpul rămâne tot întunecat, adică sticla este isotropă. Să repetăm experiența, însă cu o lamă cristalină. In acest caz, câmpul dat de polaroizi se luminează, deoarece substanța cristalină este anisotropă. Trecând prin lamă lumina polarizată linear de către polarizor, se desface în două raze (birefringență) polarizate perpendicular

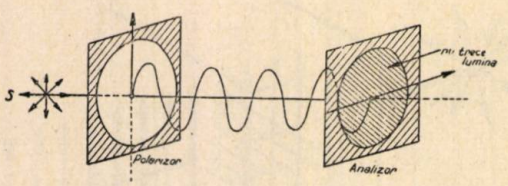


Fig. 8

una pe alta: raza ordinară u se propagă cu viteza ce corespunde indicelui de refracție n_0, iar cea extraordinară v, indicelui de refracție n_e. Străbătând lama de grosime d, lucrurile se petrec ca și cum fiecare din ele ar fi parcurs în vid drumuri neegale, adică cele două raze ies din lamă cu o diferență de drum: $\Delta = (n_e - n_0)\ d$. Cu alte cuvinte, ies din lamă cu o diferență de fază: $\varphi = \frac{2\pi\Delta}{\lambda}$, unde Δ este diferența de drum. Am văzut însă mai sus că: $\Delta = (n_e - n_0)\ d$, așa că diferența de fază între cele două raze ce ies din lama cristalină va fi: $\varphi = \frac{2\pi\ (n_e - n_0)}{\lambda}\ d$, proporțională cu grosimea lamei d. Intrând în analizor fiecare din aceste două raze dau câte o componentă u' și v', polarizate așa ca vibrațiile lor să se facă în planul de vibrare ale analizorului. Aceste componente fiind coerente (deoarece provin din același fascicol inițial) vor interfera, iar ochiul care privește prin analizor va vedea câmpul luminat, precum și colorațiuni de interferență.

Cunoscând toate acestea, să reluăm prima experiență: punem lama de sticlă între cei doi polaroizi încrucișați, dar de data aceasta să supunem lama de sticlă la o solicitare exterioară, o întindere sau o compresinue. Câmpul întunecat al polaroizilor se luminează, ceea ce înseamnă că tensiunile ce s'au născut în lama isotropă au provocat anisotropia ei optică. Acesta este fenomenul *fotoelastic*, baza fizică a metodei fotoelasticimetrice.

Cercetând fenomenul mai de aproape s'a constatat că lumina polarizată care pătrunde în lama transparentă supusă la tensiuni, se desface în două componente, polarizate în direcțiile tensiunilor principale din punctul de incidență. Aceste două componente ies din lamă cu o diferență de drum, care este în fiecare punct al lamei, proporțională cu diferența tensiunilor principale: $\Delta = C\ (P - Q)\ d$, unde P și Q sunt tensiunile principale în punctul considerat, d este grosimea lamei,

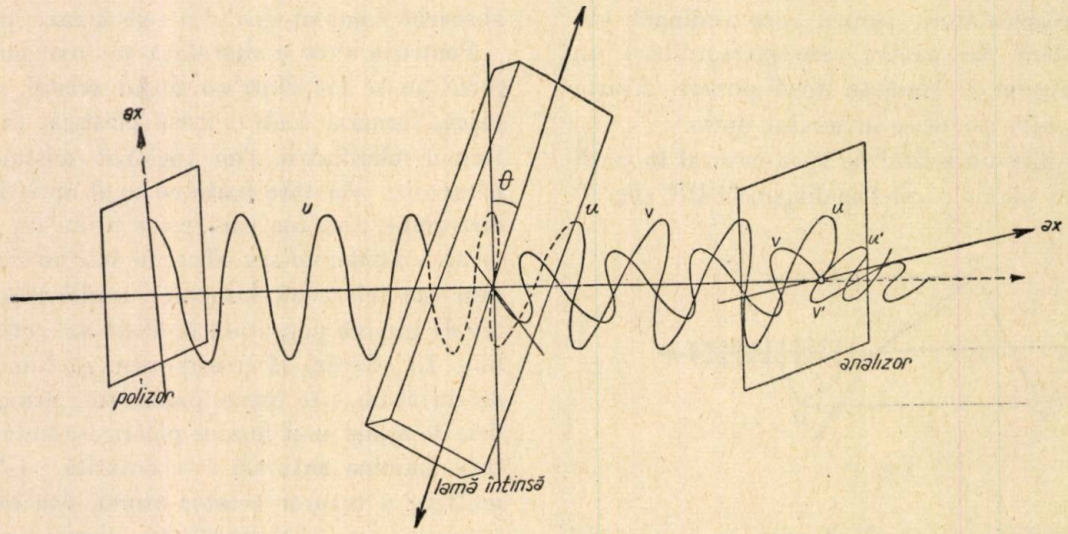


Fig. 9

lama cristalină două vibrații perpendiculare între ele, u și v, polarizate și coerente, având o diferență

iar C este un coeficient optic de tensiune, care se măsoară în brewsteri (1 brewster $= 10^{-12}$ cm/dine).

Dacă se ia C în brewsteri, P și Q, în bari (1 bar $= 1$ kgf/cm^2) și d în mm., atunci Δ se află în Å (1 Å $= 10^{-8}$ cm). Diferența de drum poate avea diferite valori, care variază cu P — Q, adică cu eforturile la care e supusă lama. Deci la anumite solicitări vor corespunde anumite forme ale franjelor de interferență, după care se poate deduce mărimea tensiunilor din material.

Fotoelasticimetria

Experienţa arată că atunci când un corp (piesă de maşină, etc.) este supus unor solicitări externe (forţe care lucrează din afară asupra corpului) se nasc în interiorul materialului din care este făcut, anumite deformări, şi forţe elastice, care variază dela punct la punct, ca mărime şi ca direcţie. Corpul este supus astfel la tensiuni şi compresiuni, la răsuciri, încovoieri, etc. In orice punct există un efort maxim şi unul minim, numite *eforturi principale.* Unul este o tensiune, celălalt, o compresiune. Unind între ele toate punctele care au aceiaşi tensiune principală (maximă sau minimă) obţinem o linie care se numeşte *isostatică.* Prin fiecare punct al corpului deformat trece o izostatică a tensiunii maxime şi o izostatică a tensiunii minime, perpendiculare una pe alta. Repartiţia izostaticelor arată repartiţia eforturilor mecanice la care este supusă piesa, iar cunoaşterea lor este indispensabilă inginerului proiectant pentru a şti cum să dimensioneze piesa, aşa ca materialul să fie economisit, dând totuşi rezistenţa necesară construcţiei. Eforturile interne se calculează cu ajutorul formulelor date de teoria elasticităţii şi rezistenţa materialelor. Dar aceste formule, juste în prima aproximaţie, se complică foarte mult şi devin insuficiente în multe cazuri. De exemplu, o placă de oţel cu găuri şi întinsă uniform (fig. 10) nu poate fi rezol-

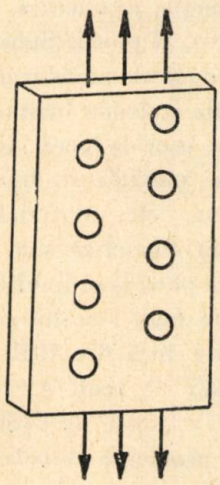


Fig. 10

vată complet prin calcul, deoarece grosimea piesei este variabilă în orice punct. Calculele ar fi extrem de complicate şi obositoare. Metoda fotoelasticimetrică rezolvă relativ uşor această problemă, făcând un model redus al plăcii, dintr'un material transparent şi izotrop ca: sticlă, plexiglas, bachelită, celuloid, etc. Acest model este supus unor solicitări asemenea celor la care este supusă piesa reală. Distribuţia tensiunilor interne este aceiaşi şi o aflăm prin fenomenele de polarizaţie cromatică, descrise mai sus.

Dacă modelul este pus între polaroizii încrucişaţi (la extincţie) şi se priveşte prin analizor, fondul modelului apare luminat şi brăzdat de linii întunecate. Liniile întunecate se numesc *izocline* şi corespund punctelor în care tensiunea principală face un unghiu constant cu o axă de reper anume aleasă. Deoarece izostaticele sunt curbe ortogonale cu izoclinele, urmează că putem cunoaşte tensiunile

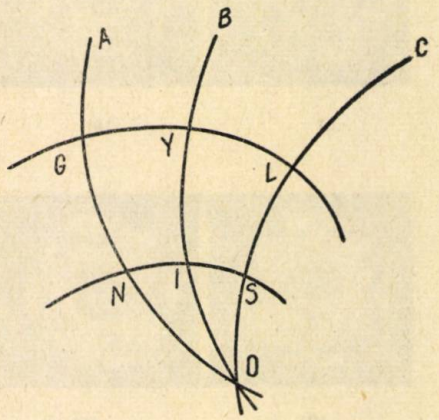


Fig. 11

principale din model, deci şi din piesa reală. Dacă AO, BO şi CO sunt izoclinele ce trec prin O (fig. 11), curbele ortogonale (desenate la scară plecând dela izocline ca bază) GYL şi NIS sunt tocmai izostaticele, deci liniile de efort maxim din piesa de cercetat.

Urmărind izoclinele, putem să ne dăm seama de direcţia tensiunilor principale din material punct cu punct. Dacă forţele exterioare cresc gradat, forma izoclinelor nu variază, ci numai grosimea lor. Dacă polaroizii încrucişaţi se rotesc solidar, forma izoclinelor variază, astfel că la o rotire de 90° se obţine o familie de izocline (desenate, de exemplu, din 10° în 10°). Desenând familiile de izocline pe o hârtie, putem trasa prin metode grafice, două familii de curbe ortogonale, izostaticele, care corespund una la tensiunile principale, alta la compresiunile principale. Pe baza acestor curbe se poate dimensiona piesa de construit în raport cu eforturile la care va fi supusă. Reproducem din Analele C.F.R. (prof. Iosipescu) fotografia izoclinelor produse într'un inel de plexiglas, sub acţiunea unei compresiuni diametrale, pentru unghiuri de rotire a polaroizilor din 10° în 10° (fig. 12).

In figura 13 sunt trasate familiile de izocline astfel obţinute, pe jumătatea din stânga a desenului; pe jumătatea din dreapta a desenului, s'au trasat cele două familii de izotatice: de tensiune

(liniile pline) și de compresiune (liniile punctate). In punctele A, B, C, D, E, F, G, H, tensiunile sunt nule.

Pe baza curbelor izostatice se pot aduce modificări modelului așa fel încât tensiunile interioare să fie cât mai uniforme și deci piesa studiată să aibă forma cea mai rațională și mai economică.

In lumina polarizată liniar isoclinele și isocromaticele se suprapun, deci observarea lor se face mai greu. De aceea fotoelasticimetria folosește mai mult lumina polarizată circular, care se obține prin interpunerea între cei doi polaroizi și piesa model a unei lame cristaline, care introduce o diferență de drum de un *sfert de undă*. Isoclinele sunt

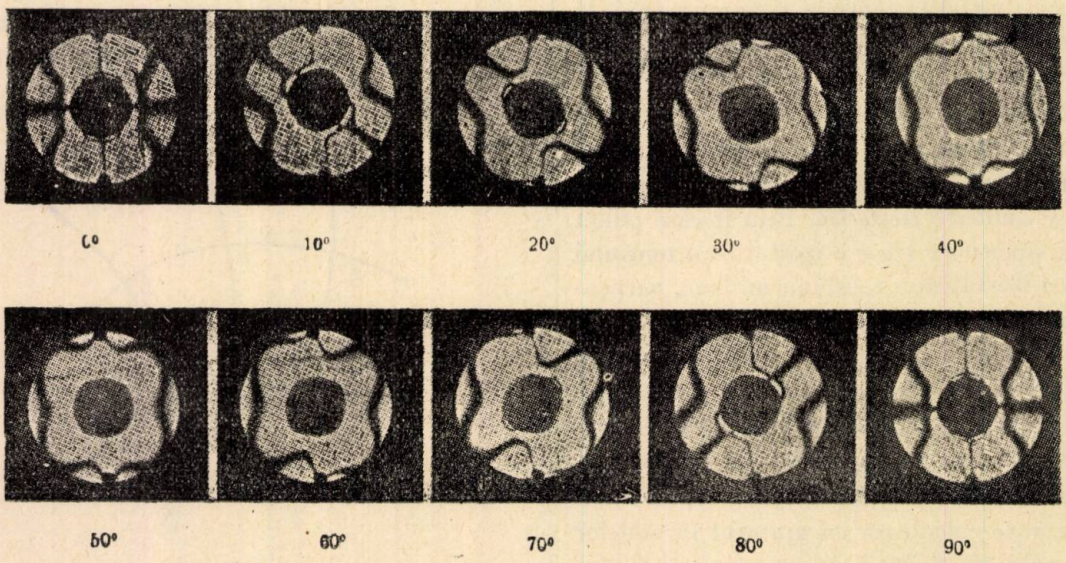


Fig. 12

Când se lucrează în lumina albă, curbele caracteristice stării de tensiune sunt colorate și se

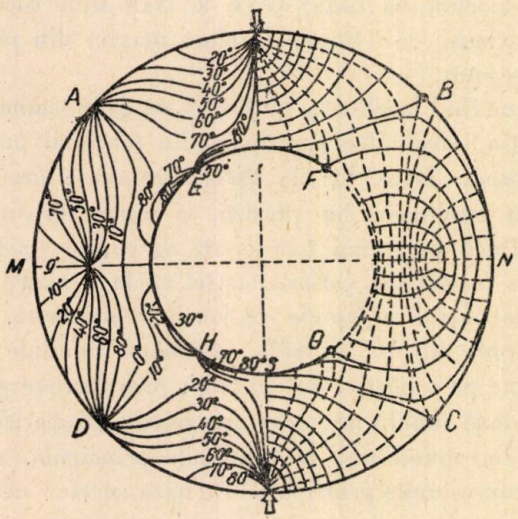


Fig. 13

numesc curbe *isocromatice*. Isocromaticele variază ca formă și ca număr după mărimea eforturilor: ele sunt multe și dese când solicitarea este mare.

astfel complet eliminate și rămân numai izocromaticele, care sunt fotografiate.

In lumina monocromatică isocromaticele apar ca niște linii de extincție, întunecate, vizibile pe fondul luminos, colorat, al piesei. Substanțele din care se fac modelele reduse ale pieselor de cercetat fotoelastic trebue să fie izotrope înainte de experiență, să fie transparente, ușor de lucrat, elastice și ieftine. Astfel sunt sticla, plexiglasul, bachelita, xilonita, celuloidul, gelatina, etc. Materialele fotoelastice folosite în Uniunea Sovietică sunt foarte sensibile și dau isocromatice până la ordinul 30. Metoda fotoelasticimetrică este mult folosită și studii în acest sens au fost făcute încă din 1912 de către V. L. Kirpicev și în 1927 de prof. A. K. Zaițev.

La noi în țară Institutul de Fizică al Academiei R.P.R. studiază problema fotoelasticității. Institutul Politehnic din București posedă un fotoelasticimetru de mari dimensiuni, unde se fac cercetări de rezistență materialelor. Aplicațiile fotoelasticității în tehnică, la construirea arcelor, a bolților, tunelurilor, barajelor, aduc mari economii, arătând că și în acest domeniu, exemplul științei sovietice servește ca model științei și tehnicii din Republica noastră Populară.

SĂ CONSTRUIM CU MIJLOACE PROPRII MODELE ŞI APARATE DE FIZICĂ

CONSTRUIREA UNUI AMPERMETRU ELECTROMAGNETIC

N. Rădulescu
Profesor la Liceul Nr. 1 băieţi, Bucureşti

Intr'un număr trecut al revistei am văzut cum se construeşte uşor un redresor electrolitic, care ne poate servi ca generator de curent electric continuu. Acum arătăm că se poate construi un instrument de măsură a curentului electric, adică un ampermetru. Dăm două variante ale aceluiaş aparat.

a) *Ampermetru electromagnetic cu ac orizontal.*

Pe un mosor de lemn (din cele pe care se pune aţa de cusut) sau pe un dop de plută mare, se înfăşoară un fir de cupru de diametru cuprins între 1/4 — 1/2 mm. Se pun 20—30 spire, iar dealungul înălţimii dopului de plută se face un canal vertical, în care să poată pătrunde un cilindru de fier moale

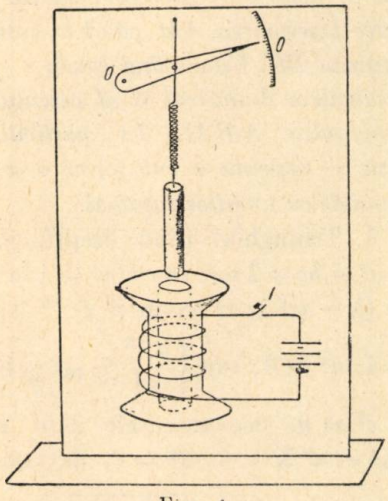


Fig. 1

($\theta = 1/2 - 1$ cm). Dacă folosim mosorul de lemn, căutăm un cilindru de fier (un cui mai gros) care să poată pătrunde liber în canalul mosorului.

Legăm acest cilindru de fier cu un resort făcut dintr'un fir subţire de cupru; pentru a-l spirala, îl înfăşurăm pe o andrea, apoi îl scoatem.

Fixăm pe resort, aşa cum se vede în fig 1, un indicator şi montăm totul pe un stativ vertical. In 0 indicatorul se poate roti în jurul unui ax.

Stabilind circuitul electric, mosorul devine un electromagnet, iar cilindrul de fier este cu atâta mai mult atras în interiorul mosorului, cu cât intensitatea curentului electric este mai mare.

Putem face gradarea aparatului, folosind un ampermetru industrial, legat în serie.

b) *Ampermetru electromagnetic cu ac vertical.*

Facem o cutie cilindrică de carton şi îi întărim suprafaţa laterală rulând pe ea o bandă de hârtie pe care o lipim bine cu pelicanol.

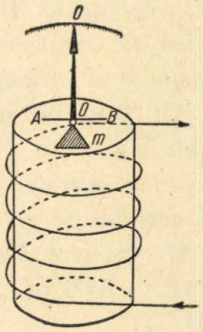


Fig. 2

La partea superioară, cutia se perforează, introducând un ax 0. Axul 0 trece prin centrul de greutate al unei bare de fier moale AB după cum se vede în fig 2. Pe bara AB şi solidar cu ea se fixează un indicator vertical, ce se poate roti în faţa unui cadran. Pe cilindrul de carton înfăşurăm de mai multe ori un fir de cupru, cu un diametru mai mare. La trecerea curentului electric continuu dela redresor prin bobină, bara AB se roteşte căutând a se aşează paralel şi să coincidă cu înălţimea cilindrului. După intensitatea curentului, acul va devia în raport cu ea. Pentru ca acul indicator să se menţină vertical când nu trece curentul prin bobină el se termină cu o contragreutate *m*.

CHESTIUNI DE EXAMEN

Date la admiterea în Institutul de Construcţii, Bucureşti în August 1952.

I. *Se consideră două cercuri O_1 şi O_2 şi secanta comună AB. Notând cu M şi N punctele diametral opuse lui A, pe cercul O_1 şi O_2 respectiv, să se demonstreze că punctele M, B şi N sunt în linie dreaptă.*

Soluţia. O_1 şi O_2 fiind mijloacele lui AM şi AN, cele două drepte O_1O_2 şi MN sunt paralele.

Cum O_1O_2 este perpendiculară pe AB, la fel şi

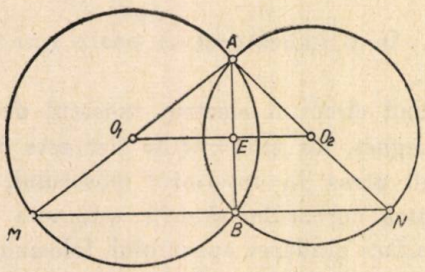


Fig. 1

MN, deci punctele M,B,N sunt în linie dreaptă (colineare).

Dacă, în plus, se notează cu B′ punctul unde coarda comună AB întâlneşte pe MN, vom avea

$$AE = EB';$$

astfel punctul B′ coincide cu B.

II. *Dintr'un balon B, staţionar la înălţimea de 1000 m., se vede vârful V al unui deal sub un unghiu de depresiune de 45° (unghiul format de direcţia BV cu orizontul lui V).*

Balonul coboară apoi, vertical, 300 m., până în C, de unde vârful dealului se vede sub unghiul de depresiune de 22°30′. Se cere înălţimea dealului.

Soluţie. Avem AB = 1000 m., BC = 300 m.

Triunghiul BVD dă:

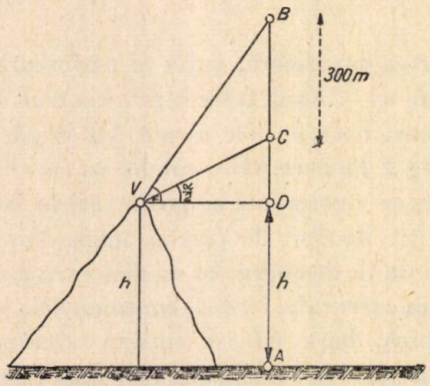


Fig. 2

(1) $VD = BD \operatorname{cotg}\alpha = (1000 - h)\operatorname{cotg}\alpha;$

Triunghiul CVD dă:

(2) $VD = CD \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} = (700 - h)\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}.$

Comparând (1) cu (2), obţinem:

(3) $(1000 - h)\operatorname{cotg}\alpha = (700 - h)\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}.$

Pe de altă parte,

$$\alpha = 45°;\ \operatorname{cotg}\alpha = 1,$$

$$\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} = \operatorname{cotg}\alpha \pm \sqrt{\operatorname{cotg}^2\alpha + 1} = 1 \pm \sqrt{2};$$

în cazul nostru,

$$\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} = 1 + \sqrt{2}.$$

Relaţia (3) devine:

$1000 - h = (700 - h)(1 + \sqrt{2})$, de unde

$$h = 700 - \frac{300}{\sqrt{2}} \cong 487 \text{ m.}$$

III. *Să se calculeze catetele* b *şi* c *ale unui triunghiu dreptunghic BAC, cunoscând:*

1. *Ipotenuza a şi suprafaţa m^2. Intre ce limite poate varia m^2, pentru ca problema să fie posibilă?*

2. *Ipotenuza a şi perimetrul 2p. Intre ce limite poate varia* p, *pentru ca problema să fie posibilă?*

3. *Se duce bisectoarea AM până la intersecţia ei M cu ipotenuza BC. Cunoscând cateta c şi unghiul B să se calculeze diametrul* d *al cercului circumscris triunghiului A B M. In particular, când* $B = 30°$, *să se exprime* d *sub forma* $d = kc$, *unde* k *este un număr cu numitor raţional.*

Soluţia. 1. Triunghiul fiind dreptunghic avem $b^2 + c^2 = a^2$ şi $bc = 2\ m^2$, sau $b^2c^2 = 4\ m^4$. Ţinând seama că $(b - c)^2 \geqslant 0$ avem $b^2 + c^2 \geqslant 2\ bc$, deci $b^2 + c^2 \geqslant 4\ m^2 > 0$; sau $\left(\frac{a}{2}\right)^2 \geqslant m^2 > 0$. Notând $b^2 = x$ şi $c^2 = y$, necunoscutele sunt rădăcinile ecuaţiei $X^2 - a^2 X + 4\ m^4 = 0$, de unde

$$X_{1,2} = \frac{a^2 \pm \sqrt{a^4 - 16\ m^4}}{2}$$

2) Avem $b^2 + c^2 = a^2$; $a + b + c = 2p$ sau $b + c = 2p - a$.

Ridicând la patrat obţinem:

$b^2 + c^2 + 2\ bc = (2\ p - a)^2$, deci;

$2\ bc = (2\ p - a)^2 - a^2 = 4\ p^2 - 4\ ap = 4p\ (p - a)$

Notăm $b = x$ şi $c = y$, care sunt soluţii ale ecuaţiei

$$X^2 - (2\ p - a)\ X + 2\ p\ (p - a) = 0.$$

De unde

$$x_{1,2} = \frac{2p - a \pm \sqrt{a^2 - 4p^2 + 4ap}}{2}$$

Pentru a avea rădăcini reale și pozitive trebue ca

$$2p - a > \sqrt{a^2 - 4p^2 + 4ap},$$

$$\text{și } a^2 - 4p^2 + 4ap > 0$$

Ridicăm la patrat prima inegalitate și avem

$4p^2 - 4ap + a^2 > a^2 - 4p^2 + 4ap > 0$, de unde $p^2 > ap$, adică $p > a$; iar din $a^2 - 4p^2 + 4ap > 0$, sau

$4p^2 - 4ap - a^2 < 0$, p fiind pozitiv deducem

$$p_{1,2} = \frac{2a \pm 2a\sqrt{2}}{4}, \text{ deci } p \leqslant \frac{a(1+\sqrt{2})}{2} \quad (1)$$

Observare. In cazul când triunghiul este și isoscel are aria maximă, a fiind constant. In acest caz $b=c=a\frac{\sqrt{2}}{2}$; iar $a+b+c=2p$, devine $2p=a(1+\sqrt{2})$; în acest caz perimetrul fiind maxim, rezultă condiția (1) de mai sus.

3. Bisectoarea unghiului A face 45° cu cele 2 catete, deci unghiul AMB $= 180 - (B + 45°)$. Cateta c mai poate fi exprimată

$$c = d \sin [180 - (B + 45^0)] = d \sin (B + 45^0).$$

In cazul particular $B = 30^0$; $d = \frac{c}{\sin 75}$;

$$\sin 75^0 = \sin (30^0 + 45^0) = \sin 30^0 \cos 45^0 + \sin 45^0 \cos 30^0 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1 + \sqrt{3}). \text{ Deci}$$

$$d = \frac{4c}{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})} = \frac{4c\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{2(3-1)} = \sqrt{2}(\sqrt{3}-1)c.$$

$i^i = x$ | **PROBLEME REZOLVATE** | $x = e^{-\frac{\pi}{2}}$

Problema 384

Să se arate că dacă, A,B,C sunt unghiurile unui triunghi oarecare, există triunghiuri ale căror laturi să fie exprimate prin $\cos \frac{1}{2}A$, $\cos \frac{1}{2}B$, $\cos \frac{1}{2}C$. *Dacă triunghiul oarecare ABC este ascuțitunghi,* $\sin 2A$, $\sin 2B$, $\sin 2C$ *pot exprima laturile unui alt triunghi.*

C. Ionescu-Țiu

Soluția I. 1°. Problema se reduce la demonstrarea relației:

$$\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} > \cos \frac{C}{2}$$

Inlocuind $\cos \frac{A}{2}$, $\cos \frac{B}{2}$, $\cos \frac{C}{2}$ în funcție de laturile triunghiului ABC, relația de demonstrat devine:

$$\sqrt{a(p-a)} + \sqrt{b(p-b)} > \sqrt{c(p-c)}$$

Ridicând la patrat, înlocuind $2p = a + b + c$ și făcând toate reducerile posibile obținem:

$$(c + b - a)(c + a - b) + 2\sqrt{ab(b + c - a)(c + a - b)} > 0$$

inegalitate evidentă din cauza inegalităților $c + b > a$, $c + a > b$

2°. Trebue să demonstrăm că

(1) $\sin 2A + \sin 2B > \sin 2C$

Inlocuind $\sin 2A + \sin 2B = 2 \sin C \cos (A - B)$ și $\sin 2C = 2 \sin C \cos C$ inegalitatea de demonstrat devine:

$$\cos (A - B) > \cos C$$

(1′) $A - B < C$, sau

(2) $A < B + C$

Din relațiile (1′) și (2) rezultă că triunghiul ABC trebue să fie ascuțitunghi, căci transformând analog relațiile analoage relației (1) obținem:

$$B < A + C; \quad C < A + B,$$

$$A < 90°; \quad B < 90°; \quad C < 90°$$

Soluția II. Pentru prima inegalitate

$\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} > \cos \frac{C}{2}$, înlocuim $\cos \frac{C}{2}$ cu $\sin \frac{A+B}{2}$ întrucât $\frac{C}{2} = 90° - \frac{A+B}{2}$.

Deci, inegalitatea devine

$$\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} > \sin \left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2} \right),$$

sau

$$\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} > \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} + \sin \frac{B}{2} \cos \frac{A}{2}$$

inegalitate evidentă, deoarece

$$\sin \frac{A}{2} < 1 \text{ și } \sin \frac{B}{2} < 1,$$

deci

$$\cos\frac{A}{2} > \sin\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{A}{2} \text{ și } \cos\frac{B}{2} > \sin\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}.$$

Problema 386

Diferența patratelor a două numere este egală cu dublul produsului lor, iar diferența numerelor este dublul câtului lor.

Se cer aceste două numere.

Iliescu Dinu

Soluție. Fie x și y cele două numere. Conform enunțului avem:

$$x^2 - y^2 = 2xy$$
$$y(x - y) = 2x$$

Scăzând ecuațiile avem:

$$x(y - x) = 2x(1 - y)$$
$$x(3y - x - 2) = 0$$

Din ultima ecuație obținem:

$$x = 0 \text{ și corespunde } y = 0$$

și

$$x = 3y - 2$$

Inlocuind această valoare a lui x în a doua ecuație a sistemului obținem ecuația în y:

$$y^2 - 4y + 2 = 0;$$

de unde

$$y = 2 \pm \sqrt{2} \quad \text{și} \quad x = 4 \pm 3\sqrt{2}$$

Numerele x și y sunt:

x	0	$4 + 3\sqrt{2}$	$4 - 3\sqrt{2}$
y	0	$2 + \sqrt{2}$	$2 - \sqrt{2}$

Problema 406

Un polinom împărțit cu x — a *dă câtul* $x^2 - 3x + 4$, *iar împărțit prin* x — b *dă câtul* $x^2 - 4x + 2$. *Să se găsească polinomul și numerele* a *și* b *știind că termenul independent de* x *este egal cu unitatea.*

I. N. Constantinescu

Soluție. Avem relația:

$$(x - a)(x^2 - 3x + 4) + r_1 =$$
$$= (x - b)(x^2 - 4x + 2) + r_2,$$

sau

$$x^3 - 3x^2 + 4x - ax^2 + 3ax - 4a + r_1 =$$
$$= x^3 - 4x^2 + 2x - bx^2 + 4bx - 2b + r_2;$$
$$x^3 - x^2(a + 3) + x(3a + 4) - 4a + r_1 =$$
$$= x^3 - x^2(b + 4) + x(4b + 2) - 2b + r_2;$$

Prin identificarea coeficienților lui x, avem:

$$a + 3 = 4 + b; \text{ și } 3a + 4 = 4b + 2;$$

de unde $a = 6, b = 5$.

Termenul independent de x fiind egal cu unitatea, avem:

$$-4a + r_1 = -2b + r_2 = 1.$$

Rezultă $r_1 = 25$ și $r_2 = 15$.

Facem înlocuirile și obținem polinomul:

$$P(x) = x^3 - 9x^2 + 22x + 1$$

Problema 413

Se dă un cerc și un triunghi ABC *înscris în cerc. In mijlocul* D *al laturei* AB *se ridică o perpendiculară care taie pe* AC *în* E. *Se cere locul geometric al punctului* E, *când latura* BC *rămâne fixă și vârful* A *descrie cercul circumscris.*

Ionescu Gh. Dobre
elev, Craiova

Soluție. Unim E cu B. DE fiind mediatoarea lui AB avem AE = EB sau $\sphericalangle$ EBA = A.

Unghiul CEB fiind exterior triunghiului AEB este egal cu suma unghiurilor A și EBA, deci

$$\sphericalangle \text{CEB} = \sphericalangle \text{EBA} + \text{A} = 2\text{A}$$

Unghiul A fiind constant iar B și C fixe locul lui E este arcul capabil de unghiul 2A descris pe BC, coardă.

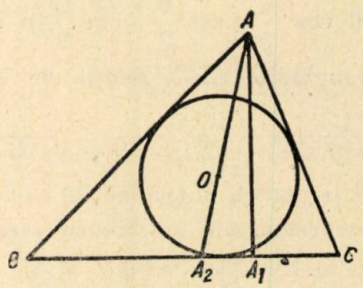
Când A este obtus, $\sphericalangle$ CEB = 2A — 180°, deci locul lui E este arcul capabil de unghiul 2A — 180°.

Problema 415

Să se construiască un triunghi ABC *cunoscându-se bisectoarea interioară ce pleacă din* A_1, *raza cercului înscris* r *și* (C — B) *sau* $\left(B + \frac{A}{2}\right)$.

Necula Stelian,
elev Târgoviște

Soluție. Fie A_1, A_2 respectiv picioarele înăl-



țimei și bisectoarei vârfului A. In triunghiul AA_2C avem:

$$\sphericalangle AA_2C = B + \frac{A}{2}$$

unghiul AA_2C fiind exterior triunghiului AA_2B.

Prin urmare triunghiul dreptunghic AA_1A_2 se poate construi, cunoscându-se $AA_2 = l_a$ și unghiul AA_2A_1. O paralelă la A_1A_2 dusă la distanța r de aceasta va intersecta AA_2 în O centrul cercului înscris triunghiului ABC. Ducând tangente din A cercului O, acestea vor întâlni direcția A_1A_2 în B și C.

Când cunoaștem (C—B) problema se soluționează absolut la fel:

$$B + \frac{A}{2} = B + \frac{180 - B - C}{2} = 90° - \frac{C - B}{2}$$

$$\frac{C - B}{2} = 90° - \left(\frac{A}{2} + B\right) = \sphericalangle A_1AA_2.$$

Problema 416

Trei numere a căror sumă este 1311 sunt termenii consecutivi ai unei progresii geometrice. Să se afle aceste numere, știind că ele mai reprezintă primul, al 24 lea și al 185-lea termen al unei progresii aritmetice.

Ursache Eugen
elev, Roman

Soluție. Fie q rația progresiei geometrice și r rația progresiei aritmetice. Conform problemei avem:

$$\begin{aligned} a + aq + aq^2 &= 1311 \\ aq &= a + 23r \\ aq^2 &= a + 184r \end{aligned} \qquad (1)$$

Ultimele două ecuații se scriu:

$$\begin{aligned} a(q^2 - 1) &= 184r \\ a(q - 1) &= 23r \end{aligned}$$

Împărțindu-le membru cu membru, deoarece $a \neq 0$, $r \neq 0$ și $q \neq 1$, obținem

$$q + 1 = 8 \quad , \quad \text{de unde } q = 7.$$

Înlocuind valoarea lui q în (1) obținem:

$$a = 23$$

Cele trei numere sunt, deci:

$$23;\ 161;\ 1127.$$

Problema 448

Să se arate că pentru orice valoare a lui n *expresia*

$E = 3.5^{2n-2} + 2^{3n+1}$ *este* divizibilă cu 17.

Dan Ionescu

Soluție. $E = 3.5^{2n} \cdot 5 + 2^{3n} \cdot 2 = 15.25^n + 2.8^n =$

$(17 - 2)\,25^n + 2.8^n = 17.25^n - 2.25^n + 2.8^n$

deci:

$$E = M\,17 - 2(25^n - 8^n);\ \text{dar;}$$

$25^n = (17 + 8)^n = M\,17 + 8^n$, de unde:

$$E = M\,17 - 2(M\,17 + 8^n - 8^n) = M\,17 - 2\,M\,17$$

$$E = M\,17$$

prin urmare expresia este divizibilă cu 17.

Problema 471

In triunghiul ABC $(b > c)$ *se dă:*

$$a = 78,\quad R = 65,\quad r = 28$$

unde R este raza cercului circumscris și r raza cercului înscris în triunghi. Să se calculeze b *și* c *fără a utiliza tabela de logaritmi.*

A. Radev

Soluție. Avem $\sin A = \frac{a}{2R} = \frac{78}{130} = 0{,}6;$

$$\cos^2 A = 1 - 0{,}6^2 = 0{,}64;\ \cos A = 0{,}8$$

sau

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 - 0{,}8}{1 + 0{,}8}} = \frac{1}{3}.$$

Din relația:

$$r = (p - a)\operatorname{tg}\frac{A}{2},\ \text{avem:}$$

$$b + c = a + 2r\operatorname{cotg}\frac{A}{2} = 78 + 2 \times 28 \times 3,\ \text{deci}$$

$$b + c = 246$$

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A = pr,\ \text{sau}$$

$$bc = \frac{(a + b + c)r}{\sin A} = \frac{324 \times 28}{0{,}6}$$

Deci

$$bc = 15.120$$

b și c sunt rădăcinile ecuației

$$y^2 - 246y + 15120 = 0$$

și deoarece $b > c$

$$b = 126 \text{ și } c = 120$$

Problema 473

Armăturile A și B ale unui condensator C cu capacitatea de 0,1 *microfarazi sunt legate de o baterie de elemente galvanice perfect izolate de pământ, cu f.e.m.* $E = 20$ *volți.*

Se înlătură bateria și se leagă armăturile A și B la armăturile A_1 *și* B_1 *ale unui condensator* C_1 *cu o*

capacitate de 9 ori mai mare decât a primului. Condensatorul C_1 este și el izolat de pământ.

Se cere:

1. *Sarcina primitivă Q_0 a condensatorului C;*
2. *Diferența de potențial U care există între armăturile condensatorului după ce s'a stabilit legătura între C și C_1;*
3. *Sarcinile respective ale celor 2 condensatori.*

O. Florescu

Soluție. 1. Avem:

$$Q_0 = CE = 0{,}1.10^{-6} \cdot 20 = 2.10^{-6} \text{ culombi}$$

2. Capacitatea totală este dată de

$$\frac{1}{C_t} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C_1};$$

$$C_t = \frac{C C_1}{C + C_1} = \frac{0{,}1 \times 10^{-6} \times 0{,}9 \times 10^{-6}}{0{,}1 \times 10^{-6} + 0{,}9.10^{-6}};$$

$$C_t = 0{,}09.10^{-6} \text{ Farazi}$$

$$U = \frac{Q_0}{C_t} \frac{2.10^{-6}}{0{,}09.10^{-6}} = 22{,}2 \text{ volți}$$

3. Avem $Q = CU = 2{,}22 \times 10^{-6}$ coulombi

$$Q_1 = C_1 U = 2.10^{-5} \text{ coulombi.}$$

Problema 483

Paralelele duse prin vârfurile A,B,C la laturile opuse ale unui triunghi, întâlnesc cercul circumscris triunghiului în punctele A', B', C'. Să se arate că mediatoarele triunghiului $A'B'C'$ trec prin vârfurile triunghiului ABC. Între laturile acestor triunghiuri există relația:

$$abc = (a' + b' + c')\, R^2$$

Gh. Bazacov,
profesor

Soluție. 1°. Trapezele A'ACB și BB'CA sunt isocele deoarece

$$\text{arc } A'B = \text{arc } AC \text{ și}$$
$$\text{arc } AB = \text{arc } B'C$$

ca arce cuprinse între coarde paralele. Rezultă

$$A'C = AB;$$
$$AB = B'C; \text{ și}$$
$$A'C = B'C.$$

Punctul C fiind egal depărtat de punctele A', B' se găsește pe mediatoarea lui A'B. La fel se demonstrează pentru celelalte vârfuri.

2°. In trapezul A'ACB avem

$$\overline{AA'} \times \overline{BC} + \overline{A'B} \times \overline{AC} = \overline{A'C} \times \overline{AB}$$

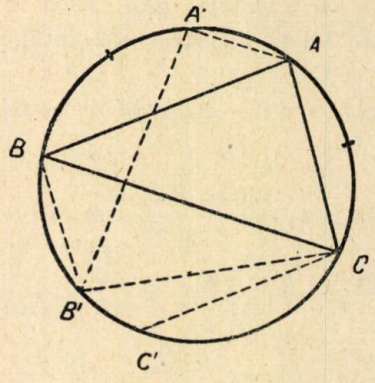
Insă $A'B = AC = b$; $A'C = AB = c$.

$$\overline{AA'} = \frac{c^2 - b^2}{a}$$

In patrulaterul A'ACB' avem;

$$\overline{AA'} \times \overline{B'C} + \overline{A'B'} \times \overline{AC} = \overline{A'C} \times \overline{AB'}$$

Insă $B'C = AB = c$; $A'C = c$; $AB' = BC = a$



Rezultă:

$$(1) \qquad A'B' = C' = \frac{c\,(a^2 + b^2) - c^3}{ab}$$

Analog,

$$(2) \qquad b' = \frac{b\,(a^2 + c^2) - b^3}{ac}$$

$$(3) \qquad a' = \frac{a\,(b^2 + c^2) - a^3}{bc}$$

Prin adunarea relațiilor (1), (2), (3) obținem:

$$(4)\ a' + b' + c' = \frac{2\,(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - (a^4 + b^4 + c^4)}{abc}$$

Insă: $2\,(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - (a^4 + b^4 + c^4) = 16\,S^2$

Ținând seama că: $S = \frac{abc}{4R}$ și înlocuind în (4), obținem:

$$(a' + b' + c')\, R^2 = abc.$$

Problema 485

Să se construiască un triunghi dreptunghic ABC, cunoscând perimetrul său și raza cercului înscris. Discuție.

Petre Ghișoiu

Soluție. In triunghiul dreptunghic avem relația:

$$r = \frac{b + c - a}{2} = p - a$$

de unde

$$a = p - r$$

Mai departe, putem proceda în mai multe feluri.

Metoda I. Luăm pe o dreaptă segmentul $BC = a$ și ducem o paralelă la această la distanța r. Pe BC coardă descriem arcul capabil de unghiul $90° + \frac{1}{2}A = 135°$, locul geometric al centrului I al cercului înscris în triunghiul ABC (Geometrie,

manual unic, cl VIII medie, pag. 95). Arcul taie paralela în două puncte I și I'. Ducând din B și C tangente la cercurile I și I' obținem două triunghiuri

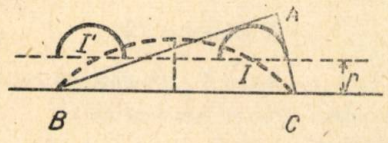


Fig. 1

ABC, A'BC (simetrice fără de mediatoarea lui BC) care răspund la problema (Fig. 1).

Metoda II. Din relațiile

$$2S = 2pr = ah_a$$

scoatem $h_a = \frac{2pr}{a}$, deci h_a poate fi construit.

Tăind semicercul descris pe a ca diametru cu o paralelă dusă la distanța h_a, obținem două triun-

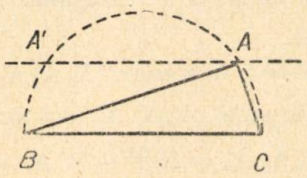


Fig. 2

ghiuri ABC, A'BC, care răspund la problema (fig. 2).

Metoda III. Descriem pe $BC = a$ semicercul de diametru a și un arc de cerc capabil de unghiul de 45°. Din C sau B ca centru descriem un cerc de rază $b + c = p + r$ care taie ultimul arc în D sau D'. Intersecțiile lui DC și D'B cu semicercul de diametru a dă cele două puncte A și A' (fig. 3).

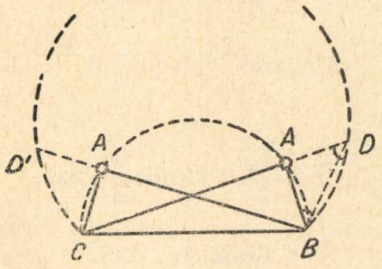


Fig. 3

Discuție. Pentru ca problema să fie posibilă, considerând de exemplu prima metodă, trebue ca paralela să taie arcul de cerc sau să fie tangentă arcului. Se observă că BC este latură a patratului în cercul din care face parte arcul, deoarece subîntinde un arc de $2(180° - 135°) = 90°$.

Deci distanța cea mai mare dela un punct al arcului la BC este

$$\frac{\sqrt{2}a}{2} - \frac{a}{2} \geqslant r;$$

$$(\sqrt{2} - 1)(p - r) \geqslant r;$$

$$p \geqslant \left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right) r = (\sqrt{2}+1)^2 r.$$

Aceeași condiție se obține și prin considerarea uneia din celelalte două metode.

Problema 488

Să se rezolve ecuația:

$$\cos(3x + 10°) + \sin(60° - x) + \\ + \cos 3(x + 10°) + \sin(80° - x)) = 0.$$

Diaconescu Petre, elev, Buc.

Soluție. Transformăm în produse sumele

$$\cos(3x + 10) + \cos(3x + 30) = \\ = 2\cos 10° \cos(3x + 20)$$

$$\sin(60° - x) + \sin(80 - x) = 2\cos 10° \sin(70 - x)$$

Ecuația devine

$$\cos(3x + 20) + \sin(70 - x) = 0$$

sau

$$\cos(3x + 20) = \sin(x - 70)$$

de unde

$$3x + 20° = 360\,\text{K} \pm (90° - x + 70°);$$

Deci

$$x_1 = 90°\,\text{K} + 35°$$

și

$$x_2 = 180°\text{K} - 90°$$

Problema 489

Să se arate că dacă sumele

$$a + b + c \text{ și } x + y + z$$

sunt divizibile cu numărul p, atunci și suma

$$a(xy - z^2) + b(yz - x^2) + c(zx - y^2)$$

este divizibilă cu p.

Gh. D. Simionescu

Soluție. Considerăm identitățile

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy - z^2) = (x + y + z)(x + y - z)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2(yz - x^2) = (x + y + z)(y + z - x)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2(xz - y^2) + (x + y + z)(x + z - y)$$

Inmulțindu-le respectiv cu a, b, c și adunându-le obținem:

$$2a(xy - z^2) + 2b(xy - x^2) + 2c(xz - y^2) = \\ = (x + y + z)(ax + ay - az + by + bz - bx + cx + \\ + cz - cy) - (a + b + c)[(x + y + z)^2 - \\ - 2(xy + yz + xz)] = (x + y + z)(ax + ay + az + \\ + by + bz - bx + cx + cz - cy - ax - bx - cx - \\ - ay - by - cy - cz - bz - az) + 2(a + b + c)(xy + \\ + yz + xz) = 2(a + b + c)(xy + yz + xz) - \\ - 2(x + y + z)(az + bx + cy)$$

de unde:

$$a(xy - z^2) + b(yz - x^2) + c(xz - y^2) = \\ = (a + b + c)(xy + yz + xz) - (x + y + z)(az + \\ + bx + cy)$$

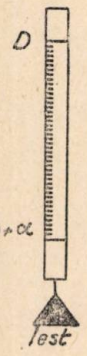
$a + b + c$ și $x + y + z$ fiind multipli de p suma dată se divide cu p.

Problema 494

Să se găsească un lest astfel dimensionat ca volum și greutate, ca un areometru gradat pentru densitățile dela D până la D + α ale lichidului, prin atașarea lestului în partea de jos (scufundată în lichid) să indice densitățile corespunzătoare între δ și δ + α (De ex.: un areometru gradat pentru densitățile dela 0,600 până la 0,700 să indice densitățile dela 0,900 la 1,000 astfel ca gradația 0,635 la areometrul cu lest să indice densitatea 0,935).

V. Alexievici

Soluție. Notăm V_1 = volumul areometrului până la diviziunea D; V_2 = volumul areometrului până la diviziunea D + α; P = greutatea lestului; V = volumul lestului; G = greutatea areometrului.



Un corp scufundat parțial într'un lichid pentru a fi în echilibru este necesar și suficient ca greutatea volumului de lichid deslocuit să fie egală cu întreaga greutate a corpului.

Introducând areometrul într'un lichid cu densitatea D conform celor spuse mai sus avem:

$$G = V_1 D \qquad (1)$$

La fel pentru lichidul cu densitatea D + α:

$$G = V_2 (D + \alpha) \qquad (2)$$

Atașând lestul areometrului se va scufunda în lichidul cu densitatea până la diviziunea D și este necesar să avem:

$$V_1 \delta + V\delta = G + P \qquad (3)$$

La fel pentru lichidul cu densitatea δ + α

$$V_2 (\delta + \alpha) + V (\delta + \alpha) = G + P \qquad (4)$$

Să eliminăm V_1 și V_2 din cele 4 ecuații.

Valoarea lui V_1 din (1) înlocuită în (3) și valoarea lui V_2 înlocuită în (4), (din ecuația (2)) ne dă:

$$\frac{G\delta}{D} + V\delta = P + G \qquad (5)$$

$$\frac{G(\delta + \alpha)}{D + \alpha} + V(\delta + \alpha) = P + G$$

Egalând ultimele două ecuații obținem:

$$V = \frac{\delta - D}{D(D + \alpha)} \times G \text{ cm}^3$$

(G exprimat în grame)

Inlocuind pe V în (5) obținem

$$P = \frac{(\delta - D)(\alpha + \delta - D)}{D(D + \alpha)} \times G \text{ gr.}$$

Mai putem scoate

$$d \text{ (lest)} = \frac{P}{V} = (\delta + \alpha + D) \text{ gr/cm}^3$$

In cazul numeric

$$V = \frac{5}{7} G \text{ cm}^3; \quad P = \frac{7}{8} G \text{ gr}; \quad d \text{ (lest)} = 1{,}6.$$

Problema 495

Fie $A_1 A_2 A_3 \ldots A_{n-1} A_n$ *un poligon regulat, având* n *laturi, a cărui arie se notează cu* S.

Se prelungesc laturile $A_1 A_2$, $A_2 A_3$, $A_3 A_4$, ... $A_{n-1} A_n$, $A_n A_1$ *cu segmentele* $A_2 A' = A_3 A'_2 = A_4 A'_3 = \ldots A_n A'_{n-} = A_1 A'_n = A_1 A_2$.

Se obține poligonul regulat $A'_1 A'_2 A'_3 \ldots A'_{n-1} A^*_n$ de arie S'. *Să se demonstreze relația:*

$$S' = \left(1 + 8 \sin^2 \frac{\pi}{n}\right) S$$

Gh. Dumitrescu

Soluție. Suprafața S' se compune din suprafața S și din suprafețele a *n* triunghiuri egale de felul lui $A_2 A'_1 A'_2$.

$$S' = S + n \text{ supr. } (A_2 A' A'_2).$$

Să calculăm supr. $A_2 A' A'_2$. Avem:

$$\sphericalangle A'_2 A_2 A'_1 = 180° - \sphericalangle A_1 A_2 A_3,$$

Deci

$$\sphericalangle A_1 A_2 A_3 = \frac{\Sigma \sphericalangle A_1}{n} = 180° - \frac{2\pi}{n};$$

$$\text{supr. } A'_2 A_2 A'_1 = \frac{1}{2} 2 A_1 A_2 . A_1 A_2 \sin \frac{2\pi}{n}$$

sau,

$$\text{supr. } A' A_2 A'_1 = \overline{A_1 A_2^2} \sin^2 \frac{2\pi}{n}$$

Insă

$$A A_2 \sin^2 \frac{2\pi}{n} = 8 S \sin^2 \frac{2\pi}{n},$$

deci

$$S' = \left(1 + 8 \sin^2 \frac{\pi}{n}\right) S.$$

Problema 498

Să se rezolve în numere întregi și pozitive ecuația:

$$y(x + z) = xz - y^2.$$

Ciontu Andrei
elev, București

Soluție. Ecuația se poate scrie

$$2xy + 2yz + 2y^2 = 2xz$$

și adăugând în ambii membri $x^2 z^2$, obținem

$$(x + y)^2 . (y.z)^2 = (x.z)^2$$

Rezultă de aci că $(x + y)$, $(y + z)$ și $(x + z)$ sunt numere pitagorice și prin urmare

1°) $x + z = m^2 + n^2$; $y + z = m^2 - n^2$;

$x + y = 2$ mm, de unde $x = n^2 + mn$; $y = mn - n^2$; $z = m^2 - mn$

sau

2°) $x + z = m^2 + n^2$; $y + z = 2mn$;

$x + y = m^2 - n^2$, de unde $x = m^2 - mn$;

$y = mn - n^2$; $z = n^2 + mn$

unde m și n sunt orice numere întregi, de același semn iar $m^2 > n^2$.

Problema 499

Să se rezolve ecuația:

$$2\cos(4 \arccos x) - 8\sin^2(\arccos x) + 7 = 0$$

Cojocaru S. Valentin

Soluție. Notăm $\arccos x = y$. Ținem seamă că:

$$\cos 4y = 2\cos^2 2y - 1$$

$$2\sin^2 y = 1 - \cos^2 y$$

Ecuația se scrie

$$4\cos^2 2y - 2 - 4 + 4\cos 2y - 7 = 0, \text{ sau}$$

$$4\cos^2 2y + 4\cos 2y + 1 = 0, \text{ deci}$$

$$(2\cos 2y + 1)^2 = 0,$$

de unde

$$\cos 2y = -\frac{1}{2}; \cos y = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos 2y}{2}} = \pm\frac{1}{2};$$

Avem:

$$2y = 2K\pi \pm \frac{2\pi}{3}, \text{ deci}$$

$$y = K\pi \pm \frac{1}{3}\pi.$$

Ținând seama de notația făcută avem

$$x = \cos y = \pm\frac{1}{2}$$

(după cum K este par sau impar).

Problema 507

Se dă un triunghi ABC *dreptunghic în* A. *Pe prelungirea înălțimii* AD *se ia punctul* M *astfel ca* AD = = DM. *fie* E *și* F *picioarele perpendicularelor duse din* D *respectiv pe* AB *și* AC. *Dreapta* DF *întâlnește* ME *în* G, *iar* DE *întâlnește* MF *în* H.

Dreapta GH *întâl este* AC *în* N, *iar* AB *în* P. *Să se arate că patrulaterul* NBPC *este inscriptibil și că* $2\overline{PN} = 5\overline{AD}$.

Soluție. Fie O intersecția (EF, AD). D este centrul de greutate al triunghiului MFE deoarece MO este

mediană iar $OD = \frac{1}{2}DA = \frac{1}{2}DM$.

Rezultă că și FG și EH sunt mediane, deci

$$GH \parallel EF$$

Putem deci scrie

$$\sphericalangle PNF = \sphericalangle EFA = \sphericalangle OAF = B.$$

Latura PC fiind văzută din N și B sub unghiuri egale patrulaterul NBPC este inscriptibil.

Mai avem

PG = EF = AN = AD; (PGFE și HNFE sunt paralelograme)

$$\text{și } GH = \frac{1}{2}EF = \frac{1}{2}AD. \text{ Deasemenea}$$

$$PN = PG + GH + HN = \frac{5}{2}\overline{AD}, \text{ deci } 2\overline{PN} = 5\overline{AD}$$

Erată. La problema 368 pag. 199 se va adăoga pentru $n = 1$, E = 0, pentru $n = e$, E = M 80.

La problema 369, pag. 199 pentru $a = c$ triunghiul este isoscel.

Exerciții

Demonstrați

$$\left(\frac{125}{64}\right)^{10} < 1000$$

EXERCIȚII ȘI PROBLEME PROPUSE

Probleme

A, B = puncte fixe;
Locul geometric M?

$$\frac{1}{AM} - \frac{1}{BM} = \text{const.}$$

663. O sferă cu raza de 6 dm și cu greutatea specifică $\frac{27}{32}$ plutește în apă. Să se găsească înălțimea părții ce iese din apă, a acestei sfere.

L. Lopovoc
(Proscurov)

664. In desvoltarea lui $(x + y)^n$ după formula binomului lui Newton, termenul al doilea este egal cu 240, termenul al treilea este egal cu 720 și termenul al patrulea este egal cu 1080. Să se găsească x, y, n.

M. Balk și I. Rauhvager

665. Toate fețele unui paralelipiped sunt niște romburi egale. Unul din unghiurile diedre ascuțite este egal cu 2φ, iar latura paralelipipedului este egală cu a. Să se afle volumul paralelipipedului.

E. Streleț chi
(Grodno)

666. O baie având o capacitate de 200 litri apă urmează să fie încălzită electric dela temperatura $t_1 = 8°C$ la temperatura $t_2 = 36°C$, prin legarea la o rețea având tensiunea U = 220 volți, în timp de 15 minute. Presupunând că randamentul băii

este de 90 %, să se determine intensitatea curentului electric și energia consumată.

Angela Negulescu
București

667. Să se afle raportul tensiunilor electromotoare E și E′ a două pile de rezistență R și R′ care se pun într'un circuit cu un galvanometru de rezistența X. Unind mai întâi cele două pile prin polii cu nume contrar galvanometrul arată deviația 45, apoi dacă se unesc polii de același nume deviația este 15.

Cucula W. Dacos

668. Să se afle rezistența și forța electromotrice introdusă într'un circuit indus format din 400 spire în serie, știind că un curent de 10 amperi străbate un solenoid, cu miezul de fier lung de 1 metru ce are 600 spire și că curentul se poate întrerupe într'un timp $t = 0{,}1$ secunde; secțiunea miezului de fier fiind de 20 cm², iar coeficientul de permeabilitate 40.

Constantin Oprea
București

669. In câte feluri se pot împacheta 100 kg zahăr în 100 pungi de câte 2 kg; 1,5 kg și 0,750 kg.

Ion N. Gligor

670. Să se rezolve ecuația

$$tg\, x = \frac{1 + \cos x}{\sqrt{3} - \sin x}$$

Gh. I. Bercea

671. Să se arate prin inducție completă că

$$3^{2n} > 2^{2n}(n+1)$$

* * *

672. Prin compunerea pe căi diferite a două forțe egale F, să se obțină egalitatea:

$$2\sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{2} + \sqrt{6}$$

Alex. Stoenescu

673. Intr'o piramidă regulată cu baza un patrat se face o secțiune cu un plan ce trece printr'o latură a bazei.

Planul de secțiune și planul unei fețe laterale fac respectiv cu planul bazei unghiurile α și φ. Să se arate că aria S a secțiunei determinată de acest plan se poate calcula cu formula:

$$S = B\,\frac{\sin^2\varphi\cos\alpha}{\sin^2(\varphi+\alpha)}$$

unde B este aria bazei.

Gh. Bazacov

674. Trei semidrepte OA,OB,OC fac unghiuri egale, două cât două. In aceste unghiuri sunt înscrise cercurile de raze r_1, r_2, r_3 și cu centrele O_1, O_2, O_3.

1. Să se calculeze suprafața triunghiului $O_1O_2O_3$.

2. Să se arate că unul din segmentele de pe semidrepte, limitat la punctele de contact, este egal cu suma celorlalte două segmente analoage.

3. Presupunând r_1 variabil și r_2, r_3 constante, să se afle locul geometric al centrului de greutate al triunghiului $O_1O_2O_3$.

Corneliu Georgescu

675. Să se arate că expresia:

$$E_1 = 16\underbrace{00\ldots00}_{n-2}48\underbrace{00\ldots00}_{n-2}36 \text{ este patrat perfect și}$$

$$E_2 = 8.\underbrace{00\ldots00}_{n-2}36\underbrace{00\ldots00}_{n-2}54.\underbrace{00\ldots00}_{n-2}37 \text{ este cub perfect.}$$

A. Dobrescu

676. Fie A′B′C′ simetricele unui punct M de pe cercul circumscris unui triunghiu ABC, în raport cu laturile BC,CA AB.

Să se arate că punctele A′, B′, C′ sunt colineare.

Punctul M descriind cercul, dreapta A′B′C′ trece prin ortocentrul triunghiului ABC.

N. Gheorghiu
student, Iași

677. Să se arate că dacă $xy + yz + zx = 1$, există inegalitatea $x + y + z \geqslant 9\,xyz$, unde x, y, z, sunt numere pozitive.

C. Ionescu-Țiu

678. Să se arate că pentru n pozitiv avem:

$$\frac{\sin x + \sin 3x + \ldots + \sin(2n-1)x}{\sin 3x + \sin 5x + \ldots + \sin(2n+1)x} = \frac{\sin nx}{\sin(n+2)x}$$

Zarda Ion
Câmpina

679. Se dau două drepte perpendiculare Ox, Oy și un punct fix F în planul lor. O dreaptă variabilă dusă prin F taie pe Ox în M și pe Oy în N. Paralelele duse prin M și N la Oy și Ox respectiv se taie în P. Perpendicularele în M și N pe dreapta MN taie pe Oy și Ox respectiv în N′ și M′; în sfârșit, paralele duse prin M′, N la Oy, Ox se taie în Q.

Să se arate că:

1°. Dreptele MN, PQ sunt perpendiculare;

2°. Dreapta dusă prin P, paralelă cu MN trece printr'un punct fix.

Cezar Coșniță

680. Se consideră triunghiul ABC în care $A = 30°$ și $c > b$. Pornind din B către A se ia lungimea $BM = x < c$. Pe prelungirea lui AC în același sens, se ia $CN = x$. Unindu-se M cu N s'a format triunghiul AMN. Se cere valoarea lui p ca sup. AMN să fie maximă.

Să se discute problema când $c < b$.

De asemeni să se discute cazul $x > c$ cu ipotezele $c > b$ și $c < b$.

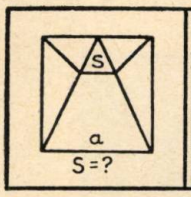
Florica Ionescu

681. In triunghiul ABC fie O centrul cercului circumscris, H ortocentrul, O′ centrul cercului BHC și ω centrul cercului lui Euler. Cunoscând poziția punctelor O, ω, O′ să se construiască triunghiul.

Maria Schuldesz

682. Să se construiască un triunghi dreptunghic ABC când se cunoaște semiperimetrul p și înălțimea dusă din unghiul drept, h. Discuție.

Silișteanu A. Mihail
elev, Orașul Stalin



EXERCIȚII PROPUSE PENTRU INVĂȚĂMÂNTUL ELEMENTAR

E. 213. Să se simplifice expresia

$$\frac{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b+c}}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b+c}} : \frac{\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a+c}}{\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{a+c}}$$

* * *

E. 214. Un tren având o întârziere de 16 minute, recâștigă acest timp pe o distanță de 80 km mărindu-și viteza cu 10 km/oră. Se cere viteza normală a trenului.

* * *

E. 215. Depărtarea dela Giurgiu la T. Severin pe Dunăre este 300 km. Un vapor parcurge această distanță dus și întors în timp de 27 ore în timp ce viteza Dunării, este de 2,5 km/oră. Să se afle viteza normală a vaporului, adică pe o apă stătătoare.

* * *

E. 216. Intr'un cerc cu centrul O se duce un diametru AB, apoi unghiul ABC de 30° și unghiul BCD de 45°. Punctele C și D fiind pe cerc să se calculeze mărimea unghiului AOD și a unghiului ODC.

C. I. Ț.

E. 217. Suma vârstelor a doi frați este 15 ani. Dacă la raportul vârstelor se adaogă inversul acestui raport se obține $\frac{5}{2}$.

Se cere vârsta fiecăruia.

* * *

E. 218. Un tată este cu 39 ani mai mare decât fiul său; iar peste 7 ani va avea de 4 ori vârsta fiului său.

Câți ani are fiecare.

* * *

E. 219. Să se afle care este anul ce urmează să fie patrat perfect și care a fost ultimul an cub perfect.

C. I. Ț.

E. 220. Se cere un număr de două cifre, la care cifra zecilor este de două ori cât cifra unităților, iar răsturnatul acestui număr este de 36 mai mic decât numărul cerut.

* * *

E. 221. Dacă a, b, c sunt respectiv ipotenuza și catetele unui triunghi dreptunghic, să se arate că:

$$\left(1-\frac{b}{a-c}\right)\left(1-\frac{c}{a-b}\right) = \left(1+\frac{b}{a+c}\right)\left(1+\frac{c}{a+b}\right).$$

Gh. I. Bercea
elev

E. 222. Să se arate că în triunghiul ABC, unde H este punctul de concurență al înălțimilor AA′, BB′, CC′, avem suprafața S dată de relația: $4S = \overline{BC}.\overline{AH} + \overline{AC}.\overline{BH} + \overline{AB}.\overline{CH}$.

Miron I. Oprea
student

NOUTĂȚI DIN ȘTIINȚA ȘI TEHNICA SOVIETICĂ

Metoda fluorescentă pentru descoperirea defectelor exterioare la piesele mașinilor și instrumentelor.

Tehnica actuală cere mult dela piesele mașinilor și instrumentelor, căci ea le pretinde nu numai ca materialul lor să aibă o mare durabilitate și soliditate, etc., dar și ca instrumentele și piesele să nu aibă diferite defecte interioare și exterioare.

Pentru descoperirea defectelor interioare se folosesc razele Roentgen, ultrasunetele (metoda prof. S. I. Socolov, laureat al premiului Stalin), razele gama ale substanțelor radioactive. Pentru stabilirea defectelor exterioare (fisurilor) se aplică metoda defectoscopiei cu pulbere magnetică. Oxizii de fier magnetici se așternpe suprafața piesei în locurile unde se răspândesc curenții magnetici, dând formele precise ale defectelor. Totuși metoda defectoscopiei cu pulbere magnetică nu satisface tehnica actuală, căci ea nu este aplicabilă decât la materiale feromagnetice. Fabricatele din materiale colorate, aliaje, paste plastice, instrumentele din aliaje tari nu pot fi verificate prin acest procedeu.

Nu demult a fost studiată și introdusă în industrie metoda defectoscopiei exterioare, aplicabilă pentru tot felul de materiale, chiar și pentru metalele colorate neferomagnetice, aliaje și paste plastice, în toate cazurile, când microfisurile sunt scoase la iveală la suprafața obiectelor. Metoda fluorescentă este următoarea:

Piesa care este supusă controlului se cufundă într'o baie cu o soluție care are proprietatea de a muia bine și are o mare fluorescență. In cazul controlării pieselor mari, ele sunt unse cu această soluție cu o pensulă. In acest caz lichidul pătrunde prin toate cavitățile celor mai mici fisuri, unde se fixează. Pentru a mări claritatea fluorescenței și mai ales pentru a descoperi cele mai mici fisuri, piesa este presărată cu o pulbere fină, ca talc, oxid de magneziu, cretă, silicat, etc. Pulberea absoarbe soluția fluorescentă din fisură și se îmbibă cu ea. Apoi piesa este examinată la lumina razelor ultraviolete, care excită soluția fluorescentă, absorbită de pulbere și dă o imagine clară și precisă a fisurilor pe fondul închis al piesei.

Fisurile adânci sunt luminate sub formă de fâșii late, iar microfisurile apar ca linii subțiri și luminoase după un oarecare timp, în funcție de adâncimea fisurilor. De pildă fisurile dela o adâncime de aproape un micron apar la 20—30 minute după presărarea cu pulbere. Pe cale experimentală este găsită legătura între adâncimea fisurii, lățimea

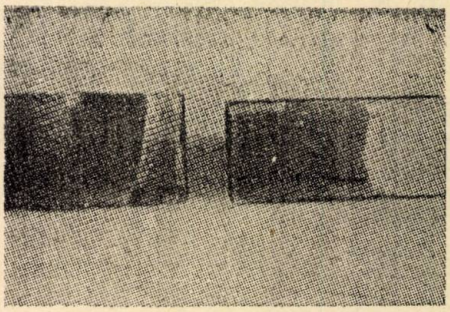


Fig. 1 a

fâșiei fluorescente și a timpului de apariție, ceea ce permite stabilirea adâncimii microfisurii.

In fig. Nr. 1 sunt arătate fotografiile pieselor cu fisuri exterioare scoase la iveală.

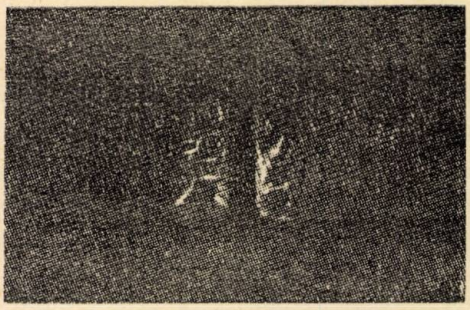


Fig. 1 b

Acest procedeu a fost studiat la Leningrad sub conducerea colaboratorului științific A. V. Cariachin.

Noul procedeu de izolare contra căldurii.

Pentru funcționarea diferitelor aparate la temperatură joasă și păstrarea în starea lichidă a hidrogenului, oxigenului, azotului, metanului și altor gaze lichefiate cu temperatură joasă de fierbere, este necesară izolarea lor contra căldurii exterioare. In prezent există două procedee pentru realizarea acestei izolări. Spațiul dintre vasul sau aparatul, care se află la o temperatură joasă, și învelișul său

exterior, este sau umplut cu materiale rele conducătoare de căldură (carbonat de magneziu, sgură, vată) sau se pompează aerul la o presiune de 10^{-5} mm de mercur pe cm². Primul procedeu este mai simplu și mai puțin costisitor și este mai des întrebuințat în tehnică, dar pretinde un strat izolator mai gros și este însoțit de o pierdere mare de căldură. Al doilea procedeu are pierderi mici de căldură chiar cu un strat izolator subțire, însă realizarea și menținerea unui vid înalt, în condițiile de producție, prezintă greutăți mari.

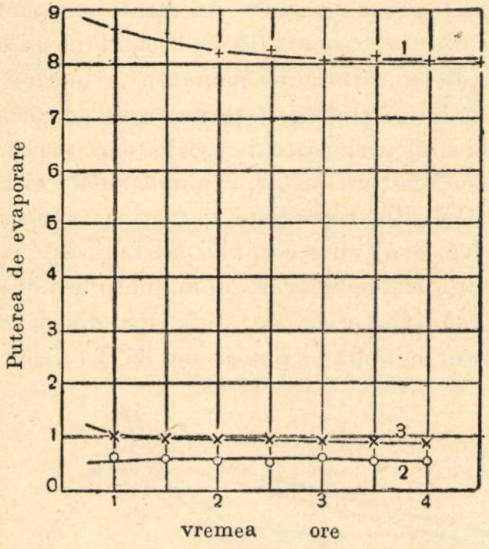


Fig. 2

In prezent este creat un nou procedeu de izolare contra căldurii, care întrunește avantajele ambelor procedee de mai sus, fără a avea desavantajele lor.

Al doilea procedeu (cu vid înalt) de izolare se bazează pe faptul că conductibilitatea calorică a gazului nu depinde de presiune atât timp cât lungimea parcursului liber al moleculelor este mult mai mică decât lățimea spațiului izolator, dar se micșorează simțitor la presiuni când parcursul liber devine egal cu această distanță. Dacă spațiul izolator se umple cu un material poros ușor cu o mică conductibilitate calorică, atunci lungimea parcursului liber al moleculelor, în momentul în care conductibilitatea va depinde de presiune, va fi mult mai mică, căci ea va fi determinată de dimensiunile porilor materialului și nu de distanța dintre pereți. In aceste condiții micșorarea pronunțată a conductibilității de căldură a spațiului izolator se face cu pierderi mult mai mici de descărcare (10^2 mm de mercur pe cm²) și se realizează și se menține mult mai ușor.

Pentru prima dată această metodă a fost aplicată de S. E. Bressler, M. I. Blatt și S.N. Riabinin. Totuși materialul întrebuințat (aerogel al acidului silicic), care are proprietăți izolatorii de căldură, este destul de scump și puțin răspândit. A. B. Fradcov a preconizat ca spațiul izolator să fie umplut cu o masă plastică poroasă larg răspândită, miriapor. Miriaporul este spuma pietrificată a rezidului aldehidei formice; el are proprietatea de a fi foarte poros, are un coeficient mic de conductibilitate calorică, este impermeabil și destul de poros.

In figura 2 se arată rezultatul experiențelor privitoare la proprietățile de conductibilitate calorică ale spațiului izolator umplut cu miriapor la diferite presiuni. Aceste proprietăți erau determinate de intensitatea evaporării aerului lichid din vasul înconjurat cu acest strat izolator. Curba 1 indică capacitatea de evaporare în cazul când miriaporul din spațiul izolator se află sub presiunea atmosferică (primul procedeu de izolare). Curba 2 este indicată pentru spațiul izolator, prin pompare până la 10^{-5} mm de mercur pe cm² (al doilea procedeu de izolare).

Curba 3 indică capacitatea de evaporare a aerului lichid dintr'un spațiu izolator, umplut cu miriapor și pompat până la 10^{-2} mm de mercur pe cm² (noul procedeu de izolare).

In fig. 2 se vede că combinarea dintre umplerea cu miriapor și pomparea spațiului izolator cu pompa aspiratoare industrială, face ca izolarea contra căldurii să înlocuiască în totul pe cea cu vid deplin.

Pentru controlarea practică a nouei metode s'a izolat aparatul pentru obținerea hidrogenului lichid, cu un strat de miriapor de o grosime de 20 — 25 mm pompat până la 0,08 mm mercur pe cm². Cercetările au confirmat toate avantajele arătate cu privire la noua metodă.

Observarea vizuală și fotografierea iradierii undelor de radio dirijate

Metoda înregistrării undelor electromagnetice centimetrice a fost descoperită pentru prima dată de fizicianul sovietic V. C. Arcadiev încă din 1934. In anul 1940 V. C. Arcadiev și D. I. Penner au studiat altă metodă care permite nu numai să se fotografieze, ci să se și « vadă » cu ochiul liber câmpurile electromagnetice ale undelor centimetrice. Această metodă se bazează pe fenomentul descoperit de acești savanți, a luminării pulberilor sau piliturilor metalice, obținută prin acțiunea undelor electromagnetice. In spațiul dintre firișoarele de pulbere așezate în câmpul electromagnetic, pătrund scântei microscopice. Numărul mare al acestor scântei dă impresia unei luminări totale. Intensitatea luminării variază în diferite puncte și este determinată de natura câmpului electromagnetic. Datorită acestui fapt, pregătind un ecran special din pulbere metalică sau pilitură măruntă, se poate

observa și fotografia câmpul electromagnetic. Un astfel de ecran este analog ecranelor de platinocianură de bariu, care se întrebuințează pentru observarea acțiunii razelor Roentgen. In parte,

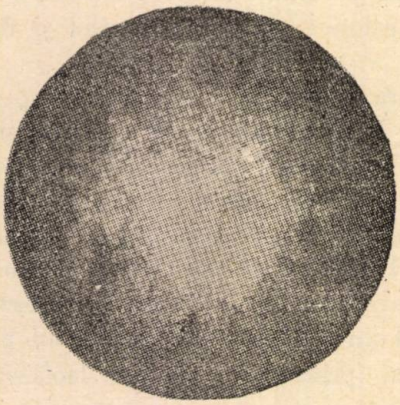


Fig. 3

el dă posibilitatea de a lumina diferite obiecte cu unde de radio.

Nu demult D. I. Penner a demonstrat că metoda descrisă mai sus poate fi folosită pentru observări vizuale și fotografierea iradierii undelor dirijate prin radio. S'au studiat două tipuri de conducte

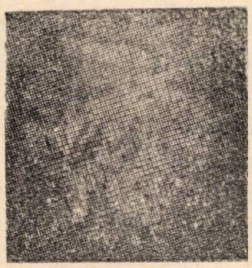


Fig. 4

de unde: tuburi de aramă conducătoare de unde și pivoții din material dielectric — cu secțiuni pătrate, dreptunghiulare și rotunde în care se excitau undele de mare amplitudine inițială, care încep să dispară. Iradierea era fotografiată la capătul conductei de unde, opus generatorului. Fotografiile obținute arată distribuția tensiunii câmpului electric al conductelor de unde în timpul excitației în ele a diferitelor tipuri de unde, deasemeni permit a se stabili caracterul polarizării undelor electromagnetice, care creează acest câmp.

Exemple de astfel de fotografii sunt date în figurile 3 și 4.

Studiile descrise mai sus prezintă fără îndoială un mare interes științific și practic pentru radiotehnica undelor ultrascurte.

Noul escavator cu putere supramărită

Uzina I. V. Stalin din Novocramatorsc a scos un nou model de escavator cu putere supramărită, având cupe de schimb cu o capacitate de 15 m³ pentru teren stâncos și de 25 m³ pentru terenuri afânate.

Cupa mașinei, spre deosebire de cea a escavatorilor pășitori, nu este suspendată liber pe cabluri de oțel, ci fixată la capătul unui braț lung (fig. 5). Escavatorul este destinat pentru lucrările de escavare. El poate prelucra un strat de pământ de 30 m grosime, care se află înaintea lui pe un strat de rocă (de ex. cărbuni de pământ). Aruncând pământul în lături el desgolește straturile de cărbuni, care apoi sunt prelucrate de escavatoare mai puțin puternice. Acest escavator, denumit lopată electrosenilă (EGL 15), reprezintă o mașină enormă și productivă. Inălțimea corpului EGL-15 este egală cu 14,5 m, raza de escavare 40 m, înălțimea descărcării pământului este de 24,5. Pe dinții cupei escavatorul desvoltă o putere de 35 T. Ciclul în-

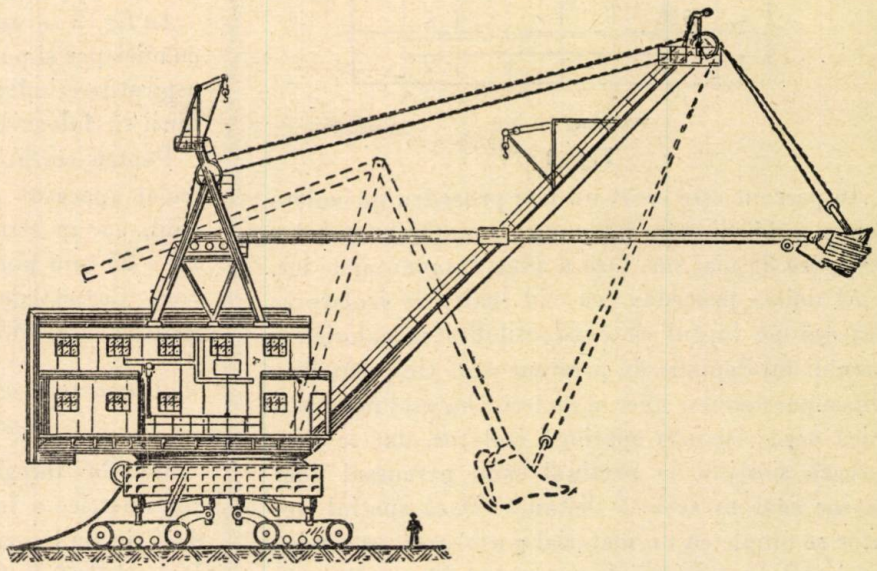


Fig. 5

treg de lucru al mașinei (umplerea cupei, întoarcerea brațului cu cupa, descărcarea ei și revenirea cupei la poziția de lucru) se petrece în 45 s. Pentru punerea în mișcare a mecanismelor, escavatorul este prevăzut cu 44 motoare electrice. Motorul principal (pentru aducere) are putere de 1700 kW, două motoare pentru ridicare au putere de 550 kW și două pentru întoarcere au câte 250 kW. Puterea totală a tuturor motoarelor escavatorului este de 6000 kW. In interval de 24 ore EGL-15 poate să escaveze și să deplaseze mai mult de două mii de vagoane de pământ, înlocuind munca a 10.000 lucrători.

Lopata electroşenilă are o construcţie destul de complicată, numărând 53.000 de diferite piese. Dispozitivul de deplasare al escavatorului este compus dintr'un cadru puternic susţinut de barele a patru cilindri hidraulici verticali cu un diametru de circa 1 m fiecare. Aceşti cilindri sunt fixaţi pe patru cărucioare-şenile. Construcţia specială (cu fotoelemente) asigură poziţia orizontală a cadrului escavatorului. In caz că unul din colţurile cadrului se lasă, fotoelementul face automat contactul cu pompa de ulei a cilindrului respectiv şi pistonul rid.când bara, restabileşte poziţia orizontală a cadrului. După aceasta, electromotorul pompei întrerupe automat contactul.

Escavatorul se deplasează cu o viteză de circa 0,4 km pe oră; având o greutate de 1050 T; şenila exercită o presiune asupra pământului de 2,33 KG/cm².

$x = 1 + \frac{1}{x}$

PAGINA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

In cursul lunii August 1952 s'au *evidenţiat* prin rezolvări de probleme din Revista Matematică şi Fizică, următorii:

Torjescu Florin (clasa IX-a Ploeşti), *Dudiţă I. Florea* (Oraşul Stalin), *Popescu I. Mihail* (Craiova), *Condrea Nelu* (clasa IX-a Bârlad), *Păun Gh. Gheorghe*, (clasa X-a Piteşti), *Swoboda Iadwiga* (Anul IV Centrul şcolar Medico-Farm. Buc.) *Codreanu Irinel* (Buzău), *Licea Ioan* (clasa IX-a, Galaţi), *Constantinescu D. Mircea* (clasa IX-a L. b. 1 Buc.), *Tătaru D. Emil* (clasa VIII-a, Aiud), *Bocu Monica* (clasa VII-a Oradea), *Udrescu Şt. Valeriu* (clasa X-a Piteşti), *Savin Dan* (Anul II Şcoala tehnică de cărbuni Câmpulung-Muscel), *Dobrescu A.* (Târgovişte), *Weszely Tiberiu* (Tg. Mureş), *Istrate Mircea* (Focşani), *Popescu Al. Dan* (clasa X-a Reşiţa), *Ţigănoiu Irina* (Timişoara), *Bichir Ilie* (clasa VII-a, Bârlad), *Tiţa D. Constantin* (Clasa XI-a Tg. Jiu).

* * *

S'au primit în cursul lunii August 1952, *cel puţin cinci probleme din Revista Matematică şi Fizică, bine rezolvate, probleme propuse (P) după cum se arată în paranteză, dela următorii rezolvitori:*

AIUD. Clasa VIII-a. Tătaru D. Emil (315, 325, 354, 372, 390, 407, 410, 413, 468, 484, 485, 505, 506, 507, 508, 509, 517, 518, 519, 520, 523, 528, 532, 533, 536, 537, 541, 554, P).

BACĂU. Clasa X-a Mardare Petru (528, 536, 541, 565, 571, 585, 603, 604), Clasa XI-a Cozma D. Mihai (368, 448, 505, 522, 533, 537, 540, 541, 542, 568, 574, 578, 590, 601, 603).

BÂRLAD. Clasa IX-a. Condrea Nelu (269, 278, 298, 307, 332, 370, 375, 379, 413, 428, 429, 432, 434, 439, 445, 510, 512, 513, 514, 517, 525, 536, 537, 574, 578, 583, 587, 588, 589, 591, 596, 600, 604).

BEZDEAD (PRAHOVA). Stoian I. Gheorghe (E: 132, 147, 148, 165, 171, 175, 176, 182).

BUCUREŞTI. Centrul şcolar Medico-Farmaceutic. Anul IV. Swoblda Iadwiga (264, 269, 270, 278, 290, 297, 301, 303, 305, 307, 322, 349, 351, 363, 364, 367, 371, 377, 379, 386, 392, 404, 407, 413, 416, 419, 429, 432, 441, 456, 457, 458, 466, 488, 499, 553, 563, 578, P). Şcoala Medie tehnică de Cooperaţie. Clasa VIII-a: Bălescu Gr. Valeriu (290, 443, E: 51, 82, 92, 109, 120, 121, 122, 138, 146, 147, 148, 149, 157, 160, P), Liceul 1 băieţi. Clasa IX-a. Constantinescu D. Mircea (322, 328, 347, 352, 363, 387, 389, 394, 398, 403, 411, 432, 443, 458, 485, 497, 502, 505, 514, 522, 523, 525, 533, 541, 543, 548, 550, 572, 574, 578, 581). Clasa IX-a. Georgescu B. Eremie (578, 581, 583, 591, 597, 603, 604, P). Liceul 4 fete. Clasa VII-a. Florescu Sanda (E: 121, 184, 186, 187, 192). Liceul 5 băieţi. Clasa VIII-a. Pădureanu Panait (E: 50, 52, 54, 58, 66, 77, 81, 121, 122, 130, 132, 138, 159, 160). Clasa XI-a. Niculescu Paul (480, 509, 554, 578, 600, E: 178). Absolvent Ligor C. Florin (528, 536, 537, 541, 550, 554, 559, 561, 563, 565, 567, 578, 581, 582, 583, 588, 591, 597, 603, 604). Liceul 9 băieţi. Clasa X-a. Istinie C. Crăciunel (269, 351, 374, 389, 392, 514). Fără indicaţie de şcoală. Cavaleru Alex. (503, 505, 509, 510, 512, 513, 515, 517, 525, 530, 540).

BOTOŞANI. Clasa IX-a. Catter Lică (515, 518, 523, 525, 536, E: 155, 156, 157).

BUZĂU. Badea N. Alexandru (269, 324, 341, 342, 364, P). Clasa X-a. Stoicescu T. Dumitru (269, 270, 297, 457, 466, 497, 514, 539, 546, 547, 550, 554, 571, P). Clasa XI-a. Codreanu Irinel (245, 271, 301, 326, 360, 379, 384, 388, 390, 405, 437, 503, 507, 528, 533, 536, 537, 541, 550, 552, 553, 560, 563, 567, 572, 578, 582, 583, 591, 592, 597, 601, 603, 604, P). Dihoru N. Valentin (371, 429, 440, 461, 467, 485, 487, 488, 512, 513, 514, 518, 520, 522, 578, 581, 589, 595, 600, P), Găloiu Vespasian (448, 456, 468, 530, 536, 550, 567, 578).

CÂMPULUNG (MUSCEL). Şcoala medie tehnică de cărbuni Anul II, Savin Dan (334, 339, 341, 351, 352, 353, 354, 356, 361, 364, 365, 367, 368, 371, 374, 375, 376, 385, 386, 387, 388, 389, 390, 391, 392, 393). Clasa XI-a liceu. Gavrilescu M. Dan (429, 443, 445, 453, 525, 536, 537 540, 541,

CARACAL. Clasa XI-a. Băică Paul (E: 155, 156, 157, 160, 161, 164), Olteanu I. Mihai (528, 533, 536, 537, 541, 547, 548, 550, 553, 554, 555, 561, 563, 565, 571, 578, 582, 583, 584, P).

CARANSEBEŞ. Şcoala medie tehnică silvică. Anul II C. Loziciu I. Ilie (432, 446, 448, 484, 505, 525, E: 119, 120, 124, 137, 138, 142, 145, 146, P).

CONSTANŢA. Clasa IX-a. Mitescu Constantin (377, 533, 543, 547, 583, E: 109) Şcoala medie tehnică de lucrări edilitare. Fotescu T. Nicolae (587, 590, E: 174, 177, 178, 181, P).

CRAIOVA. Clasa VIII-a. Cetăţeanu Cecilia (591, E: 161, 165, 173, 182, P), Clasa X-a. Cazanacli Nicolae (576, 582, 586, 588, 589, 591, 597, 601, 603, 604, 611). Galbenu

Gheorghe (315, 329, 432, 436, 437, 445, 456, 457, 466, 505, 509, 512, 514, 518, 520, 525, 536, 537, 541, 550, 578, 582, 583, 603' 604), Harbuz O. George (588, 591, 592, 596, 597, 603). Clasa XI-a B. Popescu I. Mihail (290, 300, 301, 303, 305, 306, 307, 320, 324, 325, 331, 341, 342, 345, 351 352, 364, 367, 369, 371, 372, 375, 379, 386, 388, 389, 390, 404, 406, 411, 416, 419, 429, 431, 432, 433, 437, 441, 445, 466, 585, 592, 597, 599, 600, 603, P).

DOROHOI. Scutelnicu C. (371, 392, 433, 463, 488, E: 157, 159, P).

FĂGĂRAȘ. Clasa VII-a. Gălbiceanu I, Ionel (568, 569, 574, E: 159, 161, 165, 167, 175). Clasa XI-a. Frățilă Constantin (257, 289, 290, 307, 386, 403, 517).

FOCȘANI. Petrovici Radu (270, 297, 324, 352, 369, 381, 389, 392, 401, 427, 441, 445, 456, 457, 467, 468). Clasa XI-a: Istrate I. Mircea (292, 296, 306, 312, 315, 321, 328, 336, 365, 375, 379, 380, 404, 420, 426, 428, 437, 440, 445, 457, 468, 505, 507, 512, 522, 550, 554, 567, 572, 581, P).

GALAȚI. Clasa XI-a. Licea Ioan (324, 332, 339, 344, 350, 356, 377, 380, 387, 390, 396, 402, 405, 407, 411, 420, 434, 440, 469, 474, 476, 481, 482, 483, 485, 489, 491, 493 495, 498, 499, 509, P).

GIURGIU. Clasa IX-a. Drăgan Șt. Marin (E: 107, 116, 120, 142, 166). Clasa X-a Petcu I. Dumitru (536, 543, 568, 587, 590, 591, E: 160, 164, 165, 171, 173, 175, 176, 178, 182). Velicu Șt. Mitu (536, 537, E: 156, 157, 160, 161, 164, 171, P). Școala medie tehnică agricolă. Anul II. Popescu C. Petre (525, E: 156, 157, 160, 161, 171).

IAȘI. Școala medie de textile. Anul III. Turcuman Maria (512, 525, 581, E: 79, 88, 92, 126, 158, 161, 165, 166, 173, 176).

MEDIAȘ. Clasa XI-a. Oswald Gemot (269, 303, 349, 426, 427, 439, 443, 449, 475, 480, 488, 499, 514, 534, 536, 537, 541, 543, 550, 570, 578, 581).

ORADEA. Clasa VII-a. Bocu Monica (E: 76, 77, 79, 81, 82, 83, 87, 88, 91, 93, 96, 97, 98, 99, 100, 102, 105, 107, 108, 109, 112, 113, 114, 115, 116, 120, 121, 124, 125), Guiașu Silviu (E: 51, 73, 87, 93, 96, 99, 114, 132, 137, 175, 182). Clasa VIII-a. Bocu Mircea (274, 532, 534, 536, 537, 541, 542, 543, 550, 555, 559, 561, 562, 567, 568, 572, 573, 578, 581, 582, 583,).

ORAȘUL STALIN. Clasa XI-a. Duță Gheorghe (290, 426, 429, 443, 455, 474, 476, 479, 481, 482, 484, 486, 495, 503, 505), Dudiță I Florea (339, 440, 463, 491, 495, 496, 499, 501, 502, 503, 505, 507, 508, 509, 512, 514, 516, 517, 518, 519, 520, 530, 534, 536, 537, 540, 541, 545, 550, 551, 552, 554, 555, 556, 558, 560, 561, 563, 567, 570, 578, 582, 583, P).

PIATRA-NEAMȚ. Clasa X-a. Țifui Vasile (290, 371, 388, 398, 404, 432, 440, 468, 499, 505, E: 51, 70, 83, 99, 120, 132, 148, 160, P).

PITEȘTI. Clasa IX-a. Stanciu N. Toma. (517, 541, E: 51, 55, 70, 108, 114, 120, 131, 147, 157, 159, 161). Clasa X-a. Păun Gh. Gheorghe (271, 278, 283, 301, 313, 325, 332, 333, 341, 342, 343, 350, 364, 370, 375, 386, 403, 407, 408, 410, 415, 427, 433, 436, 439, 441, 444, 445, 455, 459, 471, 481, 485, 488, 496, 499, 503, 505, 510, 512, 513, 514, 518, 520, 522, 525, P) Udrescu Șt. Valeriu (288, 332, 337, 402, 403, 406, 501, 502, 503, 504, 505, 506, 507, 508, 509, 510, 512, 513, 514, 515, 516, 517, 518, 619, 520, 521, 522, 523, 524, 525, P).

PLOEȘTI. Clasa IX-a. Torjescu Florin, (251, 282, 296, 297, 298, 301, 305, 310, 513, 321, 329, 340, 351, 362, 374, 377, 379, 380, 383, 385, 398, 403, 404, 405, 406, 407, 413, 415, 420, 427, 429, 430, 434, 435, 436, 437, 438, 439, 440, 441, 449, 454, 464, 473, 474, 476, 483, 487, 491, 495, 496, 497, 498, 499, 501, 502, 503, 504, 505, 506, 507, 508, 509, 510, 512, 513, 514, 516, 517, 518, 519, 520, 521, 525, 528, 533, 534, 536, 537, 540, 541, 550, 553, 561, 578, 583, 587, 590, 604, E: 51, 52, 59, 60, 70, 79, 132),

PREDEAL. Clasa IX-a. Pupăzan V. Nicolae (372, 373, 481, 505, 507, 508, 512, 517, 518, 520, 522, 536, 537, 541, 461, 565, 581, 582, 583, 591, 597, 601, 602, E: 157). Prică G. Constantin (324, 351, 364, 373, 481, 484, 501, 505, 507, 508, 512, 517, 518, 520, 522, 536, 537, 541, 565, 581, 582, 583).

RĂDĂUȚI. Clasa IX-a. Katy Beno (155, 156, 160, 174, 178, P).

REȘIȚA. Clasa X-a. Popescu Alex. Dan (323, 328, 351, 368, 375, 383, 398, 398, 401, 403, 404, 410, 415, 422, 448, 453, 458, 459, 460, 466, 468, 482, 484, 497, 574, P).

ROMAN. Clasa XI-a. Vulpe Ioan (328, 329, 343, 372, 431, 439, 440, 441, 499, 536, 550, 553, 578, P).

TÂRGOVIȘTE. Clasa VII-a. Oprea A. Aureliu (354, 429, 486, E: 69, 122, 159, 160, 161). Clasa IX-a. Sipoteanu Ar. Ioan (561, 585, 591, 598, E: 171, 174, 179), Clasa X-a. Oprea A. Constantin (456, 457, 471, 486, 503, 509, 512, 517, 520, 525, P), Clasa XI-a. Bălescu Gr. Eftimie (290, 297, 298, 305, 382, 385, 404, 437, 443, 445, 448, 499, 507, 562, 571, P). Dobrescu A. (426, 430, 432, 436, 437, 440, 449, 451, 452, 454, 456, 457, 458, 459, 460, 461, 463, 466, 468, 471, 475, 480, 483, 484, 488, 489, 498, 502, 503, 506, 507, 508, P).

TÂRGU-JIU. Clasa VIII-a. Clonda Ovidiu (307, 600, E: 165, 166, 171, 180), Cațighera Virgil (536, 537, 541, 581, E: 131, 168, 169). Clasa XI-a. Tița D. Constantin (423, 427, 432, 433, 434, 437, 439, 444, 448, 449, 452, 456, 464, 466, 468, 471, 477, 480, 481, 483, 487, 488, 508, 512, 517, 518, 519, 520, 523, 525, 528, P).

TÂRGU-MUREȘ. Clasa X-a. Weszely Tiberiu (344, 349, 365, 382, 386, 387, 412, 421, 427, 430, 432, 437, 439, 445, 452, 455, 456, 466, 468, 477, 482, 488, 490, 491, 495, 497, 506, 515, 517, 525).

TIMIȘOARA. Clasa XI-a. Pascu Pavel (537, 541, 550, 591, 599, 604), Țigănoiu Irina (443, 444, 466, 471, 472, 480, 488, 491, 495, 499, 502, 505, 506, 514, 520, 536, 541, 550, 560, 572, 576, 578, 579, 593, 604, P).

TURDA. Clasa XI-a. Cocoș F. Tănase (430, 534, 537, 543, 548, E: 155, 156, 158, 159, 160, 161).

TURNU-MĂGURELE. Clasa VII-a. Găină F. Marin (E: 87, 88, 91, 149, 153), Clasa X-a. Găină F. Stelian (341, 342, 349, 351, 363, 374, 388, 433, 440, 441, 445, 449, 459, 481, 525), Voiculescu P. Stelică (401, 422, 517, E: 80, 109, 113, 114, 121, 124, 125, 137, 138, 139, 145, 159, P).

VASLUI. Clasa VIII-a. Antonovici Corneliu (E: 50, 51, 62, 70, 119). Clasa XI-a. Cărare Paul (525, 586, 589, 600, 604, 608, 611, 621, E: 158, 175, 176, 177, 178, 179, 180, 181, 185, 190, P).

* * *

Redactarea problemelor. Pe aceiași foaie de formatul caietului obișnuit, se va rezolva câte o singură problemă. Soluția să fie însoțită de numărul și enunțul problemei. Se poate scrie în continuare și pe contrapagină; iar dacă soluția necesită figură, se va desena cu îngrijire și se va anexa. Nu se vor trimite soluțiile mai multor probleme pe aceiași foaie.

Rezolvitorul va scrie cu cerneală la fiecare soluție, numele, școala, clasa și localitatea. Soluțiile trimise să nu fie copiate unele după altele.

Se mai primesc soluții și la problemele propuse în anul 1951 și nerezolvate încă în paginile revistei, începând cu numărul 400 pentru mediu și numărul E. 100 pentru elementar.

Problemele ce se propun de către colaboratorii revistei să fie clar compuse și însoțite de soluții, să fie personale și nu luate din cărți sau reviste.

PREMIEREA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

In urma unei clasificări a rezolvitorilor de probleme, evidențiații mai distinși vor primi premii din partea Revistei Matematică și Fizică.

Pentru verificarea și alcătuirea tabelului cu clasificarea rezolvitorilor, aceștia sunt rugați să-și întocmească și să trimită redacției, în plicul cu probleme rezolvate, câte o fișă, în care să treacă numerele problemelor rezolvate, arătând pagina unde au fost anunțați în Revista Matematică și Fizică anul II numerele 11 și 12 și anul III numerele 1—10, adică toată activitatea dela Noemvrie 1951 la Octomvrie 1952.

REVISTA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

ORGAN AL SOCIETĂŢII DE ŞTIINŢE MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R.

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

APARE SUB ÎNGRIJIREA UNUI SECRETARIAT DE REDACŢIE

REDACŢIA: STR. DIONISIE LUPU, 40. Parter. — BUCUREŞTI
RAIONUL STALIN

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică şi fizică a şcolilor, precum şi orice material informativ care ar interesa redacţia noastră se vor trimite pe adresa de mai sus

ABONAMENTE:

Tarif general ... ... *Lei 60*

Tarif redus pentru elevi, studenţi şi profesori ... ... *Lei 10*

Abonamentele se fac numai prin:

Centrul de Difuzare a Presei

Pentru Bucureşti: Str. Const. Mille Nr. 14 — Telef. 5.28.90

Pentru Provincie: Centrul de Difuzare a Presei din Capitalele Regiunilor sau Raioanelor — Banca de Stat în Contul C.D.P. Nr. 038.068

DIN CATALOGUL

EDITURII TEHNICE

* * * *«Lexiconul tehnic român»*
Vol. III literele I. — M

1.115 pag. — 127,50 lei

* * * *«Tabele şi formule matematice»*

402 pag. — 8,50 lei

T. S. BEZICOVICI:

«Calcule aproximative»
(trad. din l. rusă)

440 pag. — 21,46 lei

A. N. TUBERBILLER:

«Probleme şi exerciţii de geometrie analitică»
(trad. din l. rusă)

312 pag. — 17,98 lei

M. I. CORSUNSCHI:

«Nucleul Atomic»
(trad. din l. rusă)

354 pag. — 17,94 lei

N. V. EFIMOV:

«Geometria superioară»
(trad. din l. rusă)

544 pag. — 30,60 lei

B. V. KUTUZOV:

«Geometria lui Lobacevscky»
(trad. din l. rusă)

152 pag. — 147 lei

ÎNTREPRINDEREA POLIGRAFICĂ Nr. 4. — C. 22.66.

Lei 1.—

E 1426

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE ȘI FIZICE DIN R.P.R.

ELENORIZVE 1958

BIBLIOTECA I. D. T.

REVISTA MATEMATICĂ și FIZICĂ

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

★

«Tineretului i-au fost deschise cele mai largi perspective de către regimul de democrație populară. El are putința deplină de a preface în realitate cele mai îndrăznețe visuri.

Statul de democrație populară poartă o grijă specială pentru educația și sănătatea tineretului nostru. El nu cruță niciun efort pentru a da tineretului putința să se bucure de viață, să-și asigure o temeinică pregătire profesională, să-și însușească toate cuceririle științei, să-și pună întreaga sa putere de muncă, tot avântul său tineresc, în slujba construirii socialismului, în slujba păcii, a întăririi patriei și făuririi fericirii ei».

(Din Manifestul Consiliului Central al Frontului Democrației Populare).

★ ★

NOEMBRIE 1952

1952 11

EDITURA TEHNICĂ

REVISTA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

SUMARUL:

Pag.

1. *Cuvântarea tovarăşului I. V. Stalin la Congresul al XIX-lea al Partidului Comunist al Uniunii Sovietice* 261
2. *Decuparea raţională a materialelor* 262
3. *Canalul Volga-Don după A. N. Ahutin* 267
4. *Construirea aparatelor de fizică cu mijloace proprii* (urmare) *de prof. N. Rădulescu* 272
5. *Chestiuni de examen* 274
6. *Probleme rezolvate (383, 496, 506, 510, 512, 515, 516, 519, 520, 522)* 276
7. *Exerciţii şi probleme propuse* 279
8. *Exerciţii propuse pentru învăţământul elementar* ... 281
9. *Deschiderea unor cercuri de matematică şi fizică ale elevilor fruntaşi*... 282
10. *Pagina rezolvitorilor de probleme* 283

11

ANUL III NOV. 1952

4819
BIBLIOTECA L. D. T.
KAT

REVISTA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ
PUBLICAŢIE PENTRU TINERET A SOCIETĂŢII DE MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ DIN R. P. R.
Anul III, Nr. 11 Noembrie 1952

Orszàgos Müszaki Könyvtár TULAJDONA
ELLENŐRIZVE 1963

CUVÂNTAREA TOVARĂŞULUI I. V. STALIN

LA CONGRESUL AL XIX-lea AL PARTIDULUI COMUNIST AL UNIUNII SOVIETICE

Tovarăşi!

Permiteţi-mi, în numele Congresului nostru, să exprim mulţumiri tuturor partidelor şi grupurilor frăţeşti ai căror reprezentanţi au onorat Congresul nostru cu prezenţa lor sau care au trimis Congresului mesaje de salut, — pentru saluturile prieteneşti, pentru urările de succese, pentru încredere. *(Aplauze furtunoase, prelungite, care se transformă în ovaţii).*

Pentru noi este deosebit de preţioasă această încredere, care înseamnă hotărîrea de a sprijini partidul nostru în lupta sa pentru un viitor luminos al popoarelor, în lupta sa împotriva războiului, în lupta sa pentru menţinerea păcii. *(Aplauze furtunoase, prelungite).*

Ar fi greşit să se creadă că partidul nostru, care a devenit o forţă puternică, nu mai are nevoie de sprijin. Aceasta nu este just. Partidul nostru şi ţara noastră întotdeauna au avut şi vor avea nevoie de încrederea, de simpatia şi de sprijinul popoarelor frăţeşti de peste hotare.

Specificul acestui sprijin este că orice sprijin dat năzuinţelor de pace ale partidului nostru de către orice partid frăţesc înseamnă totodată sprijinirea propriului popor în lupta pentru menţinerea păcii. Când muncitorii englezi, în 1918—1919, în perioada atacului armat al burgheziei engleze împotriva Uniunii Sovietice, au organizat lupta împotriva războiului sub lozinca « Jos mâinile de pe Rusia», aceasta a fost sprijinirea,—sprijinirea în primul rând a luptei propriului popor pentru pace, iar apoi şi sprijinirea Uniunii Sovietice. Când tovarăşul Thorez sau tovarăşul Togliatti declară că popoarele lor nu vor lupta împotriva popoarelor Uniunii Sovietice *(aplauze furtunoase)*, aceasta înseamnă sprijinirea, — sprijinirea în primul rând a muncitorilor şi ţăranilor din Franţa şi Italia, care luptă pentru pace, iar apoi şi sprijinirea năzuinţelor de pace ale Uniunii Sovietice. Acest specific al sprijinului reciproc se explică prin faptul că interesele partidului nostru nu numai că nu contrazic interesele popoarelor iubitoare de pace, ci, dimpotrivă, se contopesc cu aceste interese. *(Aplauze furtunoase).* In ceeace priveşte Uniunea Sovietică, interesele ei în general nu pot fi despărţite de cauza păcii în întreaga lume.

Se înţelege că partidul nostru nu poate să rămână dator partidelor frăţeşti şi că el însuşi, la rândul său, trebue să le sprijine atât pe ele, cât şi popoarele lor în lupta lor pentru eliberare, în lupta lor pentru menţinerea păcii. După cum se ştie, el chiar aşa procedează. *(Aplauze furtunoase).* După ce partidul nostru a luat puterea în 1917 şi după ce partidul a luat măsuri reale pentru lichidarea asupririi capitaliste şi moşiereşti, reprezentanţii partidelor frăţeşti, admirând curajul şi succesele partidului nostru i-au dat titlul de « brigadă de şoc » a mişcării revoluţionare şi muncitoreşti mondiale. Prin aceasta ei îşi exprimau speranţa că succesele « brigăzii de şoc » vor uşura situaţia popoarelor care lâncezesc sub jugul capitalismului. Cred că partidul nostru a îndreptăţit aceste speranţe, îndeosebi în perioada celui de al doilea război mondial, când, zdrobind tirania fascistă germană şi japoneză, Uniunea Sovietică a salvat popoarele Europei şi Asiei de primejdia robiei fasciste. *(Aplauze furtunoase).*

Firește că a fost foarte greu de a îndeplini acest rol de cinste atâta timp cât « brigada de şoc » a fost una singură, şi atâta timp cât ea a trebuit să îndeplinească acest rol de avangardă aproape singură. Dar asta a fost odată. Acum lucrurile stau cu totul altfel.

Acum, când din China şi Coreea până în Cehoslovacia şi Ungaria au apărut noi « brigăzi de şoc » —ţările de democraţie populară,—acum partidului nostru îi este mai uşor să lupte, iar munca a pornit şi ea mai cu spor. *(Aplauze furtunoase, prelungite).*

O atenţie deosebită merită acele partide comuniste, democratice sau muncitoreşti-ţărăneşti

care nu au venit încă la putere și care continuă să-și ducă munca sub călcâiul draconicelor legi burgheze. Lor le este desigur mai greu să-și ducă munca. Totuși, lor nu le este atât de greu să-și ducă munca cum ne-a fost nouă, comuniștilor ruși, în vremea țarismului, când și cea mai mică mișcare înainte era declarată cea mai gravă crimă. Totuși, comuniștii ruși au rezistat, nu s'au speriat de greutăți și au cucerit victoria. La fel va fi și cu aceste partide.

Dece acestor partide nu le va fi totuși atât de greu să-și ducă munca, în comparație cu comuniștii ruși din perioada țarismului?

Pentrucă, în primul rând, ele au în fața ochilor asemenea exemple de luptă și de succese ca cele existente în Uniunea Sovietică și în țările de democrație populară. Prin urmare, ele pot învăța din greșelile și succesele acestor țări și astfel să-și ușureze munca.

Pentrucă, în al doilea rând, însăși burghezia — principalul dușman al mișcării de eliberare — a devenit alta, s'a schimbat în mod serios, a devenit mai reacționară, a pierdut legăturile cu poporul și s'a slăbit pe sine însăși. Se înțelege că și acest fapt trebue să ușureze munca partidelor revoluționare și democratice. *(Aplauze furtunoase).*

Inainte, burghezia își permitea să facă paradă de liberalism, apăra libertățile burghezo democratice și își crea astfel popularitate în popor. Acum, din liberalism nu a rămas nici urmă. Nu mai există așa numita «libertate individuală», drepturile individului sunt recunoscute acum numai acelora care au capital, iar toți ceilalți cetățeni sunt considerați material uman brut, bun numai pentru exploatare. Principiul egalității în drepturi a oamenilor și națiunilor a fost călcat în picioare, fiind înlocuit cu principiul drepturilor depline ale minorității exploatatoare și al lipsei de drepturi a majorității exploatate a cetățenilor. Steagul libertăților burghezo-democratice a fost aruncat peste bord. Cred că acest steag va trebui să-l ridicați voi, reprezentanții partidelor comuniste și democratice, și să-l duceți înainte, dacă vreți să strângeți în jurul vostru majoritatea poporului. Altcineva nu are cine să-l ridice. *(Aplauze furtunoase).*

Inainte, burghezia era socotită drept capul națiunii, ea apăra drepturile și independența națiunii, punându-le «mai presus de orice». Acum, din «principiul național» nu a rămas nici urmă. Acum, burghezia vinde drepturile și independența națiunii pe dolari. Steagul independenței naționale și al suveranității naționale a fost aruncat peste bord. Nu încape îndoială că acest steag va trebui să-l ridicați voi, reprezentanții partidelor comuniste și democratice și să-l duceți înainte, dacă vreți să fiți patrioți ai țării voastre, dacă vreți să deveniți forța conducătoare a națiunii. Altcineva nu are cine să-l ridice. *(Aplauze furtunoase).*

Așa stau lucrurile în prezent.

Se înțelege că toate aceste împrejurări trebue să ușureze munca partidelor comuniste și democratice care nu au venit încă la putere.

Așa dar, există toate temeiurile să contăm pe succesele și victoria partidelor frățești în țările în care stăpânește capitalul. *(Aplauze furtunoase).*

Trăiască partidele noastre frățești! *(Aplauze prelungite).*

Să trăiască ani mulți conducătorii partidelor frățești! *(Aplauze prelungite).*

Trăiască pacea între popoare! *(Aplauze prelungite).*

Jos aţâţătorii la război! *(Toți se ridică în picioare. Aplauze furtunoase, care nu contenesc vreme îndelungată, transformându-se în ovații. Aclamații: «Trăiască tovarășul Stalin!», «Tovarășului Stalin — ura!», «Trăiască marele conducător al oamnenilor muncii din întreaga lume, tovarășul Stalin!», «Marelui Stalin — ura!», «Trăiască pacea între popoare!». Urale).*

DECUPAREA RAȚIONALĂ A MATERIALELOR

In «Dialectica naturii» F. Engels scria: «... *chiar dela început apariția și desvoltarea științelor sunt condiționate de producție*» [1]).

Oricât de primitivă era tehnica construcțiilor de arhitectură din antichitate, totuși ea punea destule probleme de matematică, printre care și problema transformării geometrice a figurilor.

In practică se ivesc adesea probleme în care se cere ca un anumit material să fie decupat în mod rațional, pentru a realiza cât mai puține deșeuri.

Un producător care croiește o bucată de piele scumpă, de țesătură sau o foaie de cupru, va căuta

[1]) F. Engels, Dialectica naturii. Ediția sovietică 1948, pag. 147.

desigur să găsească croiala cea mai convenabilă, fără să piardă nici un centimetru de material.

Mari matematicieni progresiști, care aveau preocuparea de a lega teoria de practică, și-au pus adesea problema obținerii maximului de randament prin decuparea unui material de o anumită formă, în alte porțiuni de forme determinate.

Matematicienii sovietici continuând tradiția corifeilor matematicii ruse, N. I. Lobacevschi, P. L. Cebâșev, N. E. Jucovschi, A. N. Crâlov și alții, leagă mult știința de practică și studiază adânc partea ei aplicată.

Academicianul din Petersburg, Pafnuti Livovici Cebâșev, marele cercetător a diferite probleme de matematică și tehnică, nu a neglijat nici el problemele de decupare a materialelor.

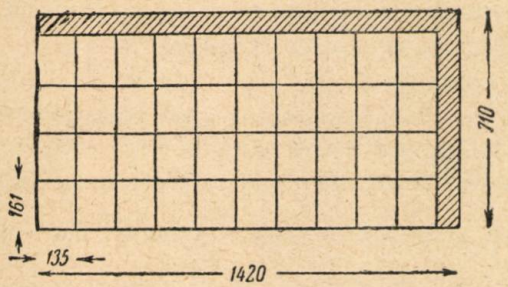
P. L. Cebâșev a expus în fața congresului dela Clermont-Ferrand (Franța), din anul 1878, rezultatele cercetărilor sale privitoare la problema învelirii unei suprafețe curbe cu decupări plane din țesături.

Terminând comunicarea sa cu titlul « Despre croiala îmbrăcămintei », P. L. Cebâșev spunea:

« *Pentru a controla rezultatul calculelor, am făcut o învelitoare pentru o sferă, tăind bucățile potrivite celor spuse mai sus. Două din bucățile formei arătate, fiind croite și cusute potrivit celor descrise, au dat un rezultat care nu lăsa cu nimic de dorit, după cum puteți constata și Dvs. Acest lucru demonstrează în ce măsură considerațiunile expuse se leagă cu practica* ».

Cu aceste cuvinte, marele savant a prezentat adunării o minge, îmbrăcată într'o învelitoare care se lipea cât se poate de bine pe ea.

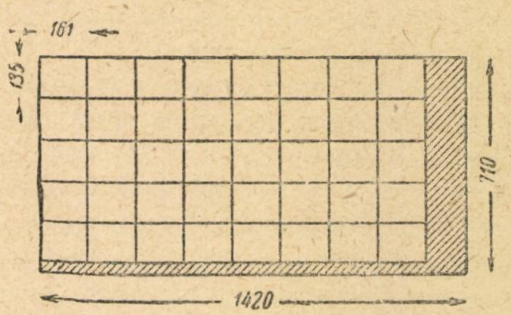
P. L. Cebâșev a arătat deasemeni și procedeul celei mai bune aplicări a bucăților de țesătură prin coaserea lor, anunțând că soluția problemei va fi cu totul alta dacă se va întrebuința piele.



Varianta 1 Fig. 1

Producția socialistă planificată se bazează pe noua tehnică înaintată și problema decupării materialelor capătă o desvoltare din ce în ce mai mare.

In multe ramuri de producție se întâlnesc cazuri de decupări a materialelor industriale (foi de tablă, placaje, mase plastice, etc). Decuparea după un plan bine chibzuit dinainte, va aduce mari economii de materiale, fapt care are o importanță deosebită la fabricarea produselor în serie. Astfel, de pildă, pentru fabricarea unor piese a unei mașini sovietice este necesar să se pregătească bucăți dreptunghiulare de dimensiunile 135 × 161 mm². Ele trebuesc decupate din foi întregi având dimensiunile: 710× ×1420 mm².



Varianta 2 Fig. 2

Cum se poate face însemnarea necesară pe fiecare foaie?

In figurile 1 și 2 sunt date două variante ale unei însemnări obișnuite și rudimentare, unde dreptunghiurile sunt așezate unul după altul fie dealungul, fie dealatul fiecărei foi.

După cum se vede, ambele variante dau în acest caz, un număr egal de bucăți, câte 40 din fiecare foaie. Dacă însă se va împărți suprafața foaiei 1420 × 710 mm² la suprafața unei bucăți 161 × 135 mm², atunci vom obține circa 46 de bucăți.

De aci reiese că în însemnarea arătată în figurile 1 și 2, se pierd 6 bucăți.

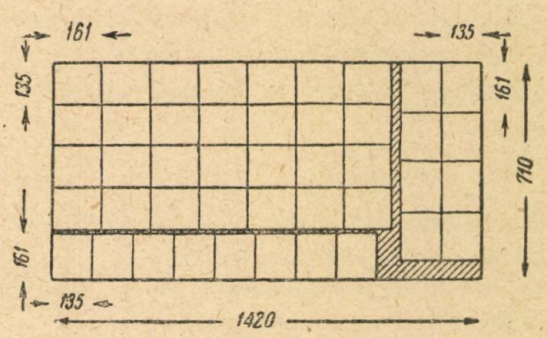


Fig. 3

Desigur că din punct de vedere tehnic este imposibil a se realiza toate cele 46 de bucăți. Dar, pe de altă parte, nici 40 de bucăți dintr'o foaie nu sunt o limită pentru numărul de bucăți care se pot obține din foaia dată.

Varianta unei decupări mai raționale (fig. 3) de 44 de bucăți dintr'o foaie, adică 10% economie de

metal în comparație cu variantele obișnuite ale decupării.

Un astfel de plan de decupare economică nu este găsit incidental, ci este rezultatul aplicării unor anumite calcule matematice, care nu demult au fost studiate de către matematicianul L. V. Cantorovici (Leningrad), laureat al premiului Stalin.

Vom expune aceste procedee de decupare și exemple de aplicare a lor.

Adeseori se cere un număr inegal de bucăți de diferite dimensiuni, care trebue decupate din bucăți egale de material, sau invers, din bucăți inegale trebue să scoatem bucăți egale.

In toate aceste cazuri precum și în altele analoage, în planificarea decupărilor după calculele matematice, studiată de prof. L. V. Cantorovici, în colaborare cu V. A. Zalgaller, se dă posibilitatea de a se stabili procedeul unei folosiri economice a materialelor. Pentru cele mai simple cazuri de decupare a materialelor din foi, când se ia în considerație numai lungimea bucăților (iar lățimea coincide cu lățimea fâșiilor care se decupează), L. V. Cantorovici și V. A. Zalgaller au preconizat un procedeu excepțional de simplu și convenabil pentru planificarea economică a decupării.

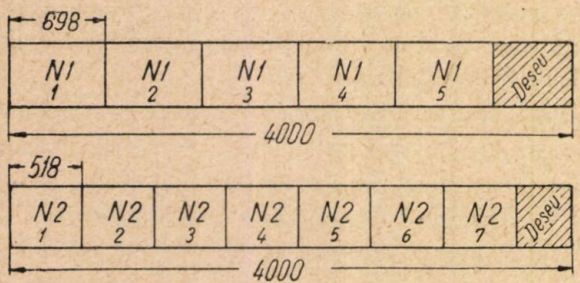


Fig. 4

Se propune, de pildă, să se decupeze din fâșii de 4000 mm, următoarele feluri de bucăți:

Lungimea bucăților în mm:		*Numărul bucăților:*
No. 1	698 mm	8
No. 2	518 mm	8

Să admitem că fiecare foaie se decupează în bucăți de aceeași mărime (fig. 4).

Atunci pentru fiecare bucată No. 1, care intră într'o fâșie de 5 ori, trebue

$$4000 : 5 = 800 \text{ mm};$$

pentru fiecare bucată N. 2, care intră în fiecare fâșie de 7 ori, trebue

$$4000 : 7 \approx 571{,}5 \text{ mm}.$$

Pentru toate e nevoie de:

$$800 \times 8 + 571{,}5 \times 8 = 10972 \text{ mm}.$$

Lungimea totală a decupajului propus este de:

$$698 \times 8 + 518 \times 8 = 9728 \text{ mm}$$

Deșeurile formează:

$$\frac{10972 - 9728}{10972} \cdot 100\% \approx 11{,}3\%$$

Să examinăm alte procedee de decupare a fâșiei de 4000 mm (fig. 5). Să decupăm din ea numai patru bucăți No. 1, atunci din restul fâșiei se pot decupa două bucăți No. 2, Dacă însă, decupăm din fâșie trei bucăți Nr. 1, atunci din restul ei vor ieși trei bucăți Nr. 2, etc.

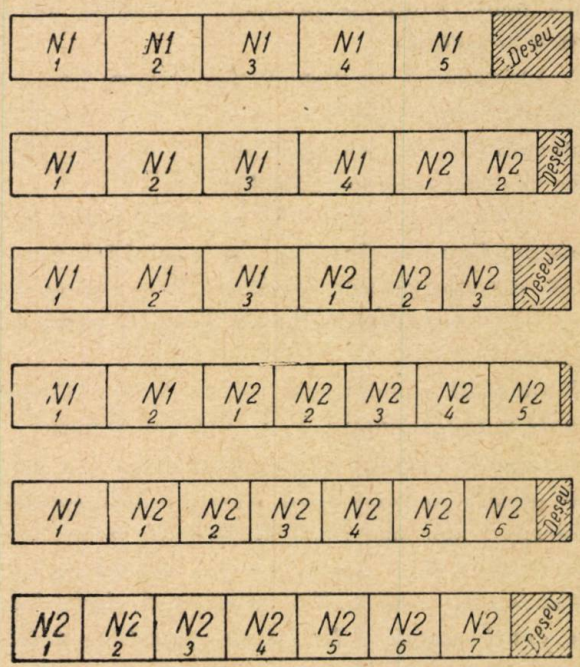


Fig. 5

Toate procedeele bune pentru decuparea unei fâșii, arătate în fig. 5, le arătăm într'un tablou.

Pe o hârtie cu pătrățele sau milimetrică să construim (fig. 6) două axe perpendiculare (axe de coordonate). Să însemnăm punctele a căror abscisă x este egală cu numărul bucăților No. 1 (698 mm), iar ordonata y este egală cu numărul bucăților No. 2 (518 mm) din aceeași decupare. Să însemnăm aceste puncte cu aceeași literă cu care am denumit decuparea respectivă.

Să admitem că am făcut un plan de decupare, tăind de pildă, jumătate din tot materialul după modelul A_1, iar partea cealaltă după modelul A_6. In medie, dintr'o fâșie care s'a consumat potrivit acestui plan, se vor obține $\frac{5}{2}$ bucăți No. 1 și $\frac{7}{2}$ bucăți No. 2. Punctul M cu aceste coordonate $x = \frac{5}{2}$, $y = \frac{7}{2}$ se obține, luând mijlocul segmentului A_1A_6.

Dacă se schimbă întrucâtva planul și se taie după modelul A_1 mai mult de jumătate din întreg

materialul, iar restul materialului se decupează după modelul A_6, atunci punctul M se va deplasa pe segmentul A_1A_6.

Dacă, din contra, materialul se decupează după modelul A_6 atunci punctul M se apropie mai mult de A_6. Oricum am decupa materialul după modelele A_1 și A_6, punctele obținute nu se vor deplasa decât pe segmentul A_1A_6.

Astfel, punctele de pe segmentul A_1A_6 arată prin coordonatele lor numărul pieselor Nr. 1 și Nr. 2, care se obțin, în mediu, dintr'o singură fâșie consumată, după diferite planuri.

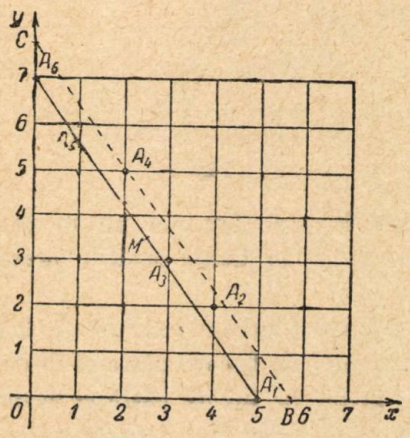


Fig. 6

In sfârșit, dacă am fi încercat să compunem diferite planuri de decupare după diferitele modele A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 și altele, atunci, așa cum poate fi demonstrat, punctul M, care arată felul bucăților obținute în medie dintro singură fâșie de material, ar fi ocupat în diferite proiecte de decupare, diferite poziții pe partea convexă $OA_1\ A_2\ A_4\ A_6O$. Această parte este umbrită în fig. 7.

După cum s'a stabilit la început pentru fiecare fabricat se cer 8 piese prefabricate Nr. 1 și 8 No. 2, adică un număr egal din amândouă felurile. Aceasta înseamnă că dintre toate proiectele de decupare condiția de a realiza ceeace s'a cerut, va fi satisfăcută numai de acele proiecte cărora le corespunde punctul M cu coordonatele x și y egale. Acest punct se află pe bisectoarea OL a unghiului xOy [1]).

Este clar că cu cât punctul M se va îndepărta de punctul O dealungul bisectoarei OL, adică cu cât mai mari vor fi coordonatele punctului M, cu atât se va obține un număr mai mare de piese prefabricate de ambele feluri din fâșia consumată și cu atât mai economic va fi planul de decupare corespunzător.

[1]) Dacă pentru fabricate se cere un număr inegal de piese de fiecare fel, atunci dreapta OL va da altă poziție, de ex. OL_1 (fig. 7). Mai departe se examinează și astfel de exemple.

Insă punctul M nu poate trece de limitele $OA_1\ A_2\ A_4\ A_6O$. Cel mai economic dintre toate planurile, va fi planul de decupare, în care punctul M va ocupa poziția M_1 (intersecția bisectoarei OL cu poligonul $OA_1\ A_2\ A_4\ A_6O$) (fig. 7). Aceasta se poate realiza întrebuințând modul de decupare A_2 și A_4, care corespund acelei laturi a poligonului care este intersectată de bisectoarea OL.

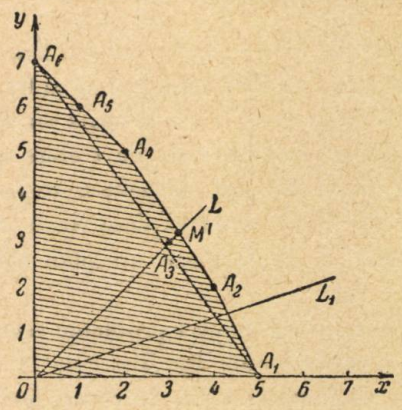


Fig. 7

Să stabilim acum ce parte din întreg materialul trebue să fie tăiat după modelul A_4 și ce parte după modelul A_2.

Să însemnăm cu z partea materialului care se decupează după modelul A_4, restul $(1-z)$ să fie croit după procedeul A_2. Atunci, în medie, din fiecare fâșie se vor obține $2z+4\ (1-z)$ de piese de 698 mm și $5z+2\ (1-z)$ de piese de 518 mm. Pentru a obține maximum de randament trebue să se respecte condiția: $2z+4\ (1-z)=5z+2\ (1-z)$, de unde aflăm:

$$z=\frac{2}{5}$$

Planul definitiv capătă următorul aspect:

Denumirea decupării	Felul decupării	Partea materialului
A_2	$6698\times 2+518\times 2$	$\frac{2}{5}$
A_4	$698\times 4+518\times 2$	$\frac{3}{5}$

Acest plan de decupare asigură un procent mic de deșeuri. Cu ce este egal acest procent, cititorul îl va calcula singur.

Este interesant că ne putem dispensa complect de calculul prealabil al procedeelor posibile de decupare și să găsim punctele $A_1, A_2, \ldots A_6$ dintr'odată. Dacă (ne întoarcem la fig. 6) se înseamnă pe axa Ox punctul B, a cărui abscisă OB este egală cu raportul dintre lungimea unei bucăți de material (4000 mm) și lungimea piesei No. 1 (698 mm), adică $OB=\frac{4000}{698}=5{,}73$, iar pe axa Oy se în-

seamnă punctul C, a cărui ordonată este egală cu raportul dintre lungimea unei bucăţi de material (4000 mm) şi lungimea piesei Nr. 2 (518 mm), adică $OC = \frac{4000}{518} = 7{,}76$. Punctele B şi C obţinute se unesc. Toate punctele apropiate de dreapta BC, care se află sub ea şi având coordonate numere întregi, vor reprezenta toate decupările care se pot efectua.

Să examinăm un al doilea exemplu. Dacă aceleaşi fâşii cu lungimea de 4000 mm, trebue să fie decupate în bucăţi a căror lungime este egală cu 698 mm şi 518 mm, iar în ansamblu ele nu trebue să intre în mod egal, ci în aşa fel ca pentru o piesă No. 2 (518 mm) să revină câte trei piese Nr. 1 (698 mm), în acest caz să se formeze un plan raţional de decupare.

Pentru rezolvarea acestei probleme este folositor graficul pe care-l avem (fig. 7).

Potrivit cu noua condiţie în ceeace priveşte întrebuinţarea totală a materialului, trebue să se schimbe sensul razei OL. Deoarece raportul numărului de piese No. 1 faţă de numărul de piese No. 2 este egal cu 3, atunci noua rază OL_1 trebue să treacă prin punctele ale căror abscise sunt de trei ori mai mari decât ordonatele lor.

Raza OL_1 intersectează latura A_1A_2, deci cel mai bun plan de decupare se obţine prin procedeele A_1 şi A_2.

Ca să se desăvârşească compunerea planului, să admitem iarăşi că z este partea materialului care se decupează după procedeul A_1; iar partea materialului care se decupează după procedeul A_2 va fi $(1-z)$. Din fiecare fâşie se va obţine, în medie, $5z + 4(1-z)$ de piese Nr. 1 (698 mm) şi $2(1-z)$ de piese Nr. 2. Luând în consideraţie numărul pieselor Nr. 1 şi Nr. 2 stabilim ecuaţia următoare:

$$5z + 4(1-z) = 32(1-z)$$

De aci $z = \frac{2}{7}$ şi $1 - z = \frac{5}{7}$.

Aşadar, pentru obţinerea unei pierderi cât mai mici dela fiecare dintre cele şapte foi, două trebue decupate după procedeul A_1 (698×5) şi cinci după procedeul A_2 ($698 \times 4 + 518 \times 2$).

Şi în sfârşit ultimul exemplu.

Trebue să tăiem bucăţi de placaj de 1525×1525 mm^2 din următoarele piese dreptunghiulare:

	Suprafaţa pieselor în mm^2	Numărul pieselor pentru un fabricat
No. 1	420×1300	1
No. 2	320×700	3

Deosebirea acestei probleme de cea precedentă constă în aceea că aci este necesar să se ia în consideraţie şi dimensiunile celei de a doua laturi. A doua latură (1300) a piesei No. 1 este mai mică decât latura bucăţii de placaj numai cu 225 mm; deci, în restul, nu poate intra nici cea mai mică piesă No. 2 şi acest caz este pe deplin analog celor anterioare. Dar a doua latură (700 a piesei) Nr. 2 poate intra de două ori în latura bucăţii de placaj;

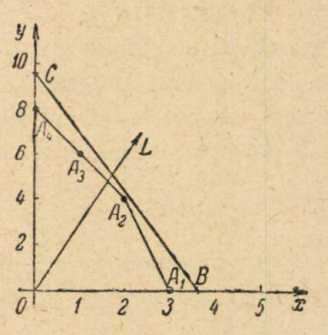


Fig. 8

deci fiecare fâşie de 320 mm, nu va da o singură piesă Nr. 2, ca în toate cazurile precedente, ci două.

Ca să se ia acest lucru în consideraţie în alcătuirea graficului, vom lua fiecare pătraţel dealungul axei Ox drept piesă, iar fiecare pătrăţel dealungul axei Oy drept două piese. Mai departe putem proceda potrivit planului conceput:

Să împărţim 1525 la 320, vom obţine aproximativ 3,6. Să punem punctul B (3,6; 0) (fig. 8).

Să împărţim 1525 la 320, vom obţine aproximativ 4,8. Să mărim de două ori acest număr şi vom obţine punctul C (0; 9,6).

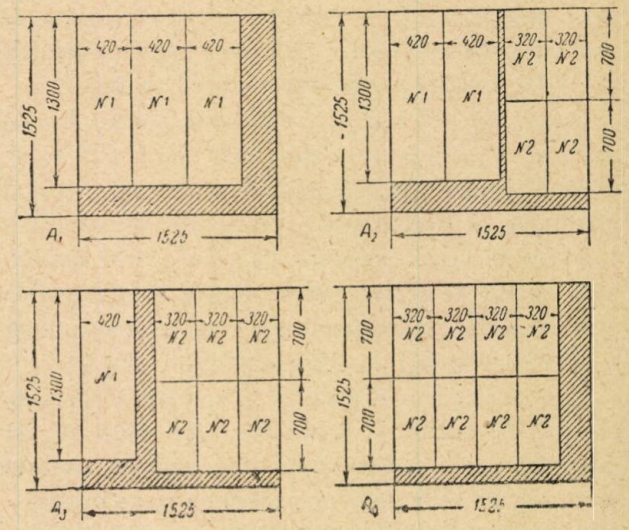


Fig. 9

Să tragem dreapta BC. Punctele apropiate de această dreaptă, care se află mai jos de ea şi care au coordonate întregi, vor fi: A_1 (3; 0); A_2 (2; 4); A_3 (1; 6) şi A_4 (0; 8). Aceasta este reprezentarea decupărilor posibile.

Să tragem raza OL (fig. 8) prin punctele pentru care raportul abscisei față de ordonată este egal cu $\frac{1}{3}$ (potrivit cu condiția întrebuințării cât mai raționale a materialului.)

Raza OL, în acest caz, intersectează latura A_2A_4 pe care se află și punctul A_3.

Deci cel mai economic plan de decupare poate să fie pentru piesele A_2 și A_3 sau pentru A_2 și A_4, sau din combinarea tuturor celor trei piese A_2, A_3, A_4. Aceste variante ale planului nu sunt prea economice. Alegeți una din variante și faceți singuri un plan definitiv al decupării.

Piesele decupate posibile A_1, A_2, A_3 și A_4 sunt arătate în fig. 9.

Dacă am fi vrut să obținem în această decupare a foilor de placaj, pentru fiecare piesă decupată Nr. 1 câte 2 și nu 3 bucăți Nr. 2, atunci raza OL ar fi trecut prin vârful A_2. In acest caz, întreg materialul ar fi trebuit decupat după procedeul A_2.

L. V. Cantorovici și V. A. Zalgaller au studiat procedeele de calcul privind decuparea cea mai economică a materialelor industriale, nu numai pentru cazurile arătate aici, dar și pentru multe alte cazuri. Limitându-ne la exemplele date în acest articol, accesibile pe deplin cercului larg de cititori, am arătat modul în care savanții matematicieni sovietici aplică metodele matematicii la nevoile producției socialiste.

(După cartea «Patratul Miraculos» de B. A Cordemschi și N. V. Rusalev)

CANALUL VOLGA-DON

DUPĂ ARTICOLUL PROF. A. N. AHUTIN (MOSCOVA) DIN FIZICA v ȘCOLE Nr. 2—1952

Din inițiativa tovarășului I. V. Stalin, poporul sovietic realizează cu succes edificii hidrotehnice gigantice, precum sunt: construcția centralelor hidroelectrice dela Cuibâșev și Stalingrad, de pe Volga; a canalelor de irigație din Sudul Ucrainei și din Nordul Crimei, a canalului principal turcmen Amu-Daria-Krasnovodsc.

Dacă ținem seama de dimensiunile gigantice ale acestor lucrări, de complexitatea lor din punct de vedere tehnic și constructiv, de termenele de realizare excepțional de scurte și de importanța lor pentru desvoltarea ulterioară a economiei naționale a Uniunii Sovietice — aceste construcții măreț sunt un pas imens înainte pe calea spre comunism.

Deosebit de importantă este ideea care stă la baza tuturor acestor construcții, transformarea naturii, în scopul ridicării stării materiale a poporului sovietic, a creării bazei tehnice și materiale a societății comuniste.

In ziua de 28 Decembrie a anului 1950 s'a publicat hotărîrea Consiliului de Miniștri a U.R.S.S. privind construcția canalului de navigație Volga-Don și a irigării terenurilor agricole, din regiunile Rostov și Stalingrad. Se arată în acest document istoric, că prin unirea Volgăi cu Donul se desăvârșesc lucrări imense, executate în anii puterii sovietice pentru reconstrucția și construcția căilor de navigație, ce unesc mările: Albă, Baltică și Caspică cu cea de Azov și Neagră; precum și la creearea unei căi de tranzit pe apă pentru transportul mărfurilor.

Volga este cel mai mare fluviu al Europei. El are o lungime de aproximativ 3700 km și o suprafață de 1.380.000 km². Volga taie — începând dela Nord-Vest spre Sud-Est — aproape întreaga parte a teritoriului european al Uniunii Sovietice; iar marii săi afluenți: Mologa, Șecsna, Kostroma, Unja, Vetluga, Kama, de pe stânga și: Oka, Șura și Sviaga de pe partea dreaptă, pătrund departe în regiunile nordice, nord-estice, estice și centrale ale Uniunii.

Pe apa Volgei se scurge o mare cantitate de mărfuri. Dar de mai mare însemnătate sunt imensele rezerve de energie ale Volgăi și a afluenților ei, a căror folosire a început numai sub guvernul sovietic.

Oamenii de știință ruși progresiști și-au dat seama încă din timpurile trecute de deosebita însemnătate a Volgăi pentru economia națională a țării, importantă cale navigabilă, izvor de energie excepțional de puternic, izvor inepuizabil de apă potabilă, care poate fi folosit pentru irigarea unor vaste teritorii secetoase.

Rusia dinaintea Revoluției cu starea ei economică înapoiată și cu tehnica ei puțin desvoltată nu ar fi putut încerca realizarea unor construcții hidrotehnice pe un fluviu, cum este Volga. In genere, în Rusia țaristă n'a existat vre-o construcție hidroenergetică deosebită, afară de câteva stațiuni mărunte hidroelectrice, a căror putere totală nu trecea de 10.000 kW. In acele timpuri deci, nici calea navigabilă pe fluviul Volga nu s'a desvoltat în mod serios.

Transformarea naturii în interesul economiei sovietice a început abia după Marea Revoluție Socialistă din Octombrie. In anul 1920, sub conducerea directă a lui V. I. Lenin și a lui I. V. Stalin a fost elaborat cel dintâi plan de perspectivă pentru reconstrucția și desvoltarea economiei naționale a Uniunii Sovietice, pe baza electrificării țării și a folosirii largi a combustibililor locali, precum și a altor resurse energetice. Acest plan măreț leninist-stalinist a trecut în istorie, sub denumirea de «planul GOELRO» și el este planul de electrificare a Rusiei.

In planul GOELRO a fost inclusă construcția unor uzine hidroelectrice, cum sunt cele dela Volhovschi, Svirsch, Dnieprovsk și altele. Totuși, în perioada prelucrării planului GOELRO specialiștii sovietici n'au posedat încă experiența proiectării și construcției marilor stăvilare și uzine hidroelectrice.

In acel timp (acum 30 de ani) s'a părut destul de greu să poți construi edificii hidrotehnice betonate și grele, care să suporte marea presiune a apei, pe niște soluri grezio-argiloase și de nisip, cum sunt șesurile care înconjoară marile fluvii, ca: Volga, Donul, Cama și altele.

Hidroenergetica sovietică s'a desvoltat într'un ritm atât de repede, încât planul GOELRO prevăzut pe 15 ani, a fost depășit în mod considerabil și — în întreaga această perioadă de timp — specialiștii sovietici au acumulat o mare experiență în proiectarea și construcția edificiilor hidrotehnice, în condițiile geografice și geologice atât de variate ale vastei țări sovietice.

Către anul 1935 au fost construite nu numai prima centrală hidroenergetică sovietică — centrala hidroelectrică dela Volhovsc, dar și centrala hidroelectrică Dneprovsc, cea mai puternică din Europa. Ambele aceste centrale au fost construite pe roci stâncoase; iar centrala dela Svirsk — pe soluri de grezie și argilă. In acest timp s'au construit deasemeni și numeroase edificii hidrotehnice. S'a construit canalul Moscova într'un sol ușor de gresie argiloasă, s'a terminat construcția primei centrale hidroelectrice de pe Volga — aceea dela Ivankovsk, care asigură intrarea navelor din Volga în canal.

Așadar — în anul 1930 — hidroenergetica sovietică a pășit cu îndrăsneală și curaj pe calea largă a construcției de stăvilare și de centrale hidroelectrice — în condiții naturale defavorabile.

Pe la începutul anului 1930, din inițiativa marelui conducător, tovarășul I. V. Stalin, s'a prelucrat planul fundamental de reconstrucție a economiei naționale în bazinul Volgăi, bine cunoscut întregului popor sovietic, sub denumirea de « Volga cea Mare ».

Un astfel de plan se poate realiza numai într'un stat socialist, care a părăsit proprietatea particulară asupra uneltelor și a mijloacelor de producție, asupra pământului și a apelor, stat, care conduce țara după o economie națională planificată.

Planul de reconstrucție fluvială a prevăzut, mai înainte de toate, o transformare complectă a Volgăi. Volga a trebuit să se transforme într'o cale de comunicație adâncă bine amenajată, astfel încât să nu se teme de anii secetoși sau înămolire. Simultan cu aceasta, trebuiau folosite rezervele imense de energie ale puternicului curent de apă de pe cursul superior al fluviului până la gurile de vărsare.

In acest scop toate căderile succesive de curent în lungul fluviului, dela Kalinin și până la Stalingrad, au fost împărțite într'o serie de trepte. Fiecare treaptă este alcătuită dintr'un așa numit « nod hidraulic » format dintr'un grup de construcții hidrotehnice. In fiecare nod hidraulic se află următoarele construcții hidrotehnice mai principale; stăvilarul de pământ, care ridică nivelul apei în albia fluviului la înălțimea necesară; stăvilarul de beton — adică deversorul pentru scurgerea cantității excedentare de apă în perioada revărsărilor de primăvară, o clădire de beton armat a centralei hidroelectrice; un canal care ocolește stăvilarul, cu o ecluză navigabilă de beton armat. La presiuni mari de peste 20 m, se plasează o ecluză cu două compartimente sau și două ecluze separate cu câte un compartiment fiecare. Ecluzele cu câte un singur compartiment există la nodurile hidraulice de pe Volga inferioară. Canalele navigabile ale nodurilor hidraulice Cuibîșev și Stalingrad vor avea câte două ecluze.

Așadar după terminarea lucrărilor de reconstrucție a Volgăi, întreg caracterul fluviului, geografia lui și regimul curentului fluvial se vor modifica simțitor. Pe o lungime de mai bine de 3000 km, Volga se va transforma într'un fel de scară uriașă, alcătuită dintr'o serie de trepte. Fiecare treaptă va reprezenta un imens rezervor de apă. Pe fiecare treaptă, la stăvilar, se va găsi o centrală hidroelectrică. Reconstrucții asemănătoare vor fi făcute și pe alte fluvii puternice ale Uniunii, și de asemenea pe afluenții fluviilor Volga, Kama, Oka, Șecsna. In anii 1937—1941, au intrat în funcție trei trepte superioare (Ivancovscaia, Ugliciscaia, Scerbacovscaia, Râbinscaia) și lucrează cu puterea totală.

Cea de a patra treaptă în ordinea succesiunii, care se construește în prezent, este centrala hidroelectrică Gorki, care va fi terminată în curând. Centralele hidroelectrice gigantice dela Cuibîșev și Stalingrad, cele mai mari din lume în ceeace privește puterea, a căror construcție a început în urma

hotărîrii guvernului publicată la 22 și 31 August 1950, complectează reconstrucția Volgăi.

Marile bazine de acumulare ale nodurilor de pe Volga permit să oprească și totodată să se colecteze prisosurile de apă ale revărsărilor de primăvară, care, — mai înainte — erau pierdute fără nici un folos pentru economia națională a țării. Rezervoarele de apă permit într'o măsură apreciabilă să se niveleze această inegalitate a scurgerii fluviilor. Astfel, consumul de apă se micșorează în timpul primăverii și se mărește în timpul verii, atunci când apa este necesară atât navigației, cât și irigării câmpiilor și iarna, atunci când este necesară centralelor hidroelectrice ale cascadei Volgăi, făcând posibilă producerea unei mari cantități de energie electrică. Elaborarea teoriei și practicii reglării scurgerii apelor din fluvii în câmpiile sovietice este o realizare colosală a oamenilor de știință sovietici.

Și astfel, reconstrucția Volgăi se apropie de sfârșit. Volga devine un canal principal puternic și adânc, amenajat pentru comunicația pe apă, cu o capacitate imensă de circulație a mărfurilor. Toate rezervele ei în energie de apă vor fi folosite în turbogeneratoarele agregatelor centralelor hidroelectrice ale Volgăi și vor furniza zeci de miliarde de kilowați—oră de energie electrică eftină. Apa, acumulată în rezervoarele centralelor hidroelectrice dela Cuibîșev și Stalingrad, va fi folosită pe scară largă și în mod efectiv, la irigarea milioanelor de hectare ale câmpurilor de dincolo de Volga și din josul Volgăi, cât și la irigarea stepelor secetoase și a semideșerturilor aflate în lungul fluviului și în regiunea Caspicei. Toate acestea permit mărirea într'o măsură uriașă a culturii cerealelor și desvoltarea creșterii vitelor. Circulația mărfurilor pe Volga crește nelimitat, pentrucă drumul adânc pe apă al Volgăi permite în timpul navigației plutirea unor nave noi, precum și transportul lemnelor din pădurile dela Nord și din Ural (pe Kama) pe plute imense.

In aceste condiții a fost necesară unirea fluviului Volga cu bazinele deschise ale Mărilor de Azov și Neagră.

Din inițiativa și sub conducerea directă a tovarășului I. V. Stalin, poporul sovietic a pășit cu entuziasm la construcția canalului Volga-Don.

La începutul anului 1930, printr'un procedeu îndrăsneț și revoluționar s'a lichidat « greșeala naturii » — pragul stâncos dela Dneprovsk, care tăia cursul Niprului în două părți separate.

Guvernul sovietic a dat soluția barării Niprului printr'un stăvilar înalt la orașul Zaporojie, transformând pragul viejlios într'un lac de acumulare liniștit, silind torentele puternice ale bătrânului Nipru să slujească poporului sovietic, prin rotirea celor mai puternice turbine din Europa ale centralei hidroelectrice dela Dneprovsk, numită V. I. Lenin.

Onoarea unirii fluviului Volga cu fluviul Don aparține poporului sovietic. Pentru accelerarea executării căii de comunicație pe apă, — Volga-Don și a irigării pământurilor pe jumătate pustii și secetoase ale regiunilor Rostov și Stalingrad, luându-se în considerare desvoltarea încununată cu succes a lucrărilor de comunicație și a înaltului utilaj de construcții cu excavatoare puternice, cu mecanisme de construcții și de transporturi, ce permiteau să se mecanizeze complect lucrările de pământ și de beton. La 28 Decembrie 1950, Guvernul Uniunii Sovietice, a hotărît să se reducă cu 2 ani termenul de costrucție a căii de comunicație pe apă Volga-Don. In primăvara anului 1952 s'a pus în exp.oatare canalul navigabil Volga-Don și nodul hidraulic dela Țimlianskaia și prima etapă de irigare.

Sondagii amănunțite ale liniei despărțitoare a apelor Volgăi și Donului au arătat, că la distanța cea mai scurtă între fluvii (Stalingrad - Calaci, 52,5 km), canalul ar fi fost greu de realizat, prin faptul că spre malul Volgăi se află o creastă, având 150 m deasupra nivelul fluviului, iar țărmul drept al fluviului este înalt și format dintr'o scufundare de teren — care era incomod și primejdios pentru construirea gurei canalului în acest punct.

Deoarece la distanța minimă dintre fluvii, condițiile executării caanlului erau nefavorabile, constructorii au elaborat un alt plan, în care traseul canalului era ceva mai la sud, folosindu-se în primul rând de faptul că în partea de miazăzi creasta iniei de separație a apelor coboară apreciabil și, în al doilea rând, că în apropiere de granița de sud a Stalingradului (la Krasnoarmeisk) se varsă în Volga — râul Sarpâ. Lungimea canalului s'a obținut — în acest caz — de 101 km. A două porțiune a canalului, dela linia despărțitoare a apelor și până la Don — a fost propusă să însoțească pe valea a două râuri mici — Cervlenoi și Carpovschi (afluenți ai Donului). Pe aceste râuri se construesc trei stăvilare, se creează un bazin de apă, navigabil. Aceasta a micșorat în mod apreciabil volumul lucrărilor terestre pentru construcția canalului.

Schema canalului Volga-Don este următoarea: dela orașul Krasnoarmeisk, canalul trece pe valea râului Sarpâ și se ridică brusc în sus, la o înălțime de 88 m, cu ajutorul a nouă ecluze navigabile (fig. 1). Mai departe, pe platoul de sus, se creează un canal, cu săpături adânci, în unele locuri de 16—18 m. Canalul se termină printr'o a zecea

ecluză, iar după el se începe o pantă de coborîre cu înălțimea de 44 de m, după cum se vede pe schema mai sus arătată. Această pantă se realizează cu ajutorul a patru ecluze. Toate ecluzele de pe canal au câte un singur compartiment. Schema unei

Pentru umplerea cu apă a tuturor celor 13 ecluze și a canalului liniei despărțitoare a apelor se pompează apa din Don, prin trei pompe puternice ale centralei, situate în trei noduri hidraulice ale unor bazine de pe pârâiașele Karpovka și Cervlenoi.

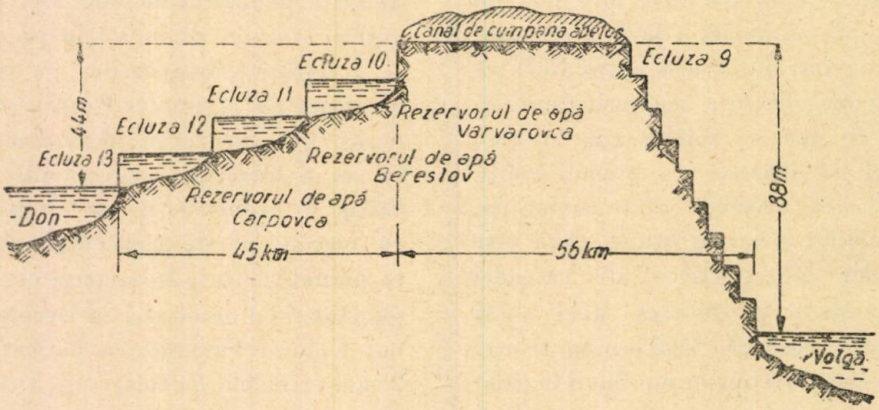


Fig. 1

ecluze cu un singur compartiment este arătată în fig. 1 *a*. Capacitatea maximă se obține, dacă ecluza lucrează de ambele părți: după ieșirea navei, ce merge într'un sens; în compartiment intră nava, ce merge în sens opus.

Nava, care a trecut prin Canalul Volga-Don, ieșind din cea din urmă ecluză, intră în Don, în partea superioară a imensului rezervor dela Țimliansk. Lângă centrala dela Țimliansk se construește un nod hidraulic puternic și complex, care ri-

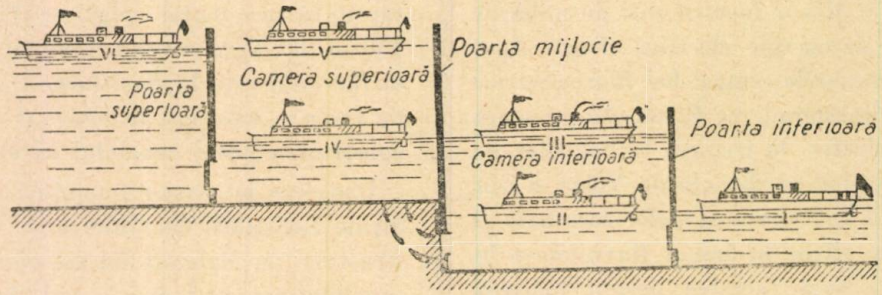


Fig. 1 a

Ecluzele dispuse în canale se fac aproape întotdeauna cu un singur compartiment. Totuși, în unele cazuri, se folosesc în canale și ecluzele cu câte două compartimente. Astfel de ecluze sunt, de pildă, ecluzele 7 și 8 ale canalului Moscova, la ieșirea

dică cu 26 m nivelul apei în bazinul cu apă și care va avea următoarele consecințe: va ameliora radical condițiile neprielnice de navigație pe porțiunea mijlocie a Donului (adâncimi mici, albie cu cotituri, bancuri de nisip); va regla distribuirea scurgerii

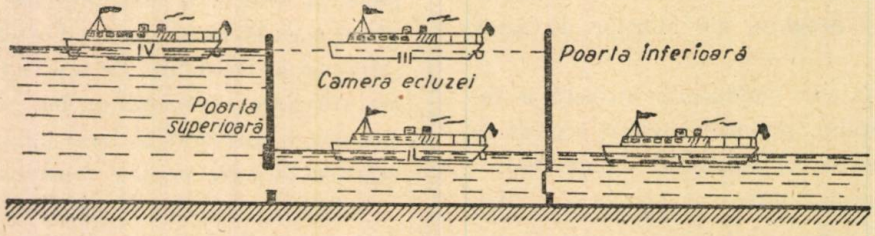


Fig. 1 b

canalului în râul Moscova. Schema de funcționare a ecluzei cu două compartimente este arătată în fig. 1 *b*.

apelor Donului — excepțional de neuniformă în cursul anului; va folosi energia apelor Donului concentrate la stăvilarele dela Țimlianskaia, va iriga

cu apele acumulate în bazine cele 750.000 ha ale pământurilor secetoase din regiunile Rostov și Stalingrad și va uda două milioane de hectare așezate la înălțime — destinate bazelor de nutreț și desvoltării creșterii vitelor.

Nodul hidraulic dela Ţimlianskaia este format din următoarele părți: un stăvilar de pământ cu înălțimea de 40 m, care barează albia Donului; un bazin de acumulare a apei — un stăvilar de beton armat cu vane metalice, destinat colectării apelor de prisos din timpul revărsărilor de primăvară în anii abundenți în apă. O construcție specială este ascensorul, care permite trecerea peștilor prin stăvilar; o alta este o clădire a centralei hidroelectrice cu o putere de 160.000 kW (4 agregate a câte 40.000 kW); și a treia o construcție de alimentare, care servește pentru scoaterea din bazinul de alimentare a unei cantități de 250 m³/s. pentru irigarea și udarea pământurilor regiunii Rostov, așezate între fluviile: Don, Sal și Manâci. De partea rezervorului, pe țărmul stâng al stăvilarului de pământ — se află portul Ţimlianskaia, care a fost întemeiat pentru transportarea mărfurilor, care vin dinspre Volga, dinspre mările de Azov și Neagră sau sunt aduse pe cale ferată sau pe autostradă și își continuă apoi drumul pe Marea Ţimlianskaia.

Dela nodul hidraulic din Ţimlianskaia pleacă o conductă principală a canalului Don, cu o lungime totală de 190 km. Apa este condusă printr'un sistem de distribuție prin canalele dintre fluviile Don și Sal (canalul Donului inferior), dintre Sal și Manâci (canalele Bogaevschi și Sadkovschi), dela fluviul Manâci spre Vest până la Rostov (canalul de Azov). Insuși fluviul Sal se transformă într'un canal de irigație, iar apa Donului împinsă de pompe trece în sus până pe cursul râului Sal, irigând pământurile învecinate (fig. 2).

Teritoriile situate pe locuri mai înalte, se vor aproviziona cu apă pe calea pompării, prin pompe puse în funcțiune cu ajutorul energiei electrice ale centralei hidroelectrice dela Ţimlianskaia. In total, în sistemul de irigare al canalului Volga-Don se vor construi 140 centrale de pompe.

In afară de canalele enumerate, din partea de nord a rezervorului mai pleacă canalul Cirsc, care irigă pământurile regiunii Stalingrad. Din rezervorul dela Varvarovsk, pe traseul canalului Volga-Don, pornește înspre Sud marele canal Ergheninsk care prin sistemul său de cascade folosește la irigarea așa numitului platou dela Ergheninsk, apărat de vânturile calde dinspre sud-est, printr'o fâșie largă de perdele forestiere.

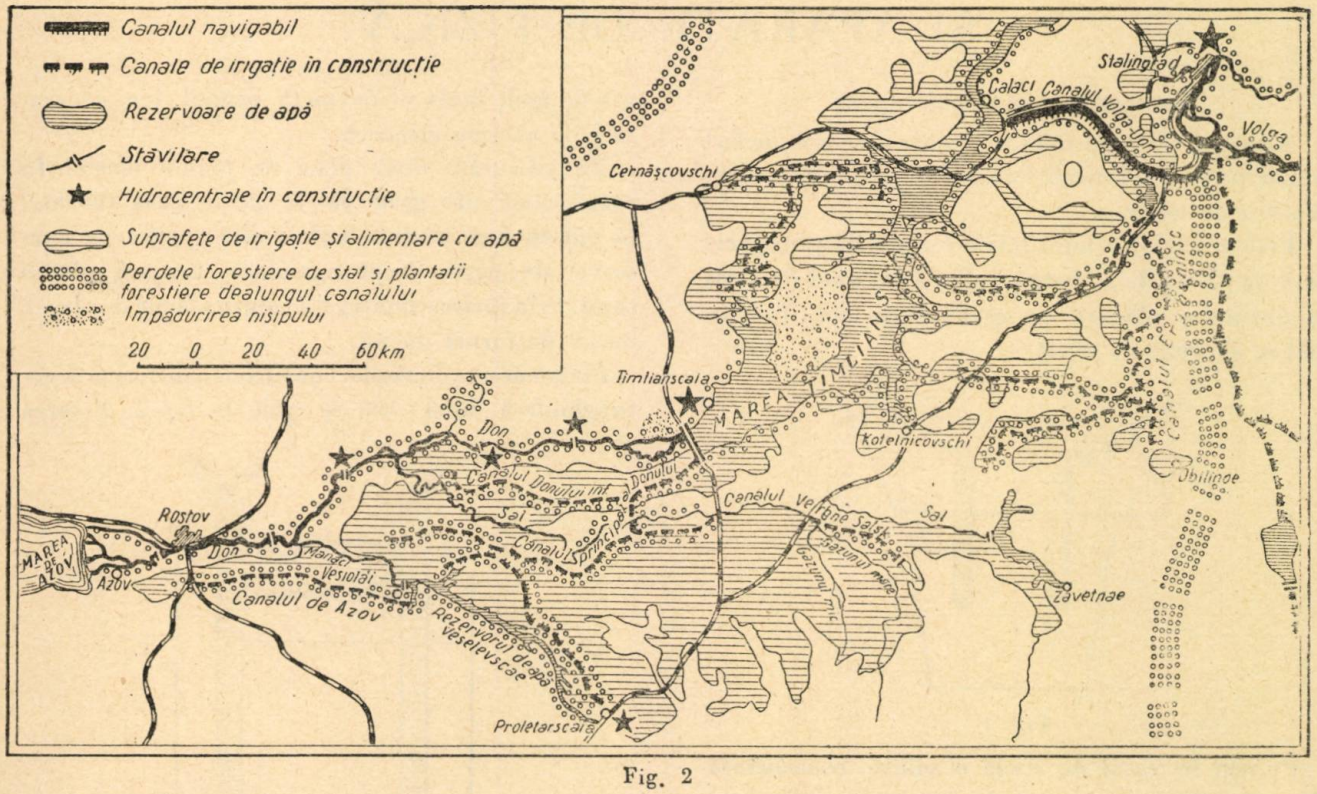


Fig. 2

Așadar, în alcătuirea complexului Volga-Don și, în alcătuirea nodului hidraulic dela Ţimlianskaia, intră numeroase construcții hidrotehnice, în mare parte voluminoase și complicate.

Complexitatea și imensele dimensiuni ale construcțiilor sunt în funcție de condițiile geologice ale nodului dela Ţimlianskaia.

Toate construcțiile grele, atât stăvilarele de pământ, cât și cele de beton — zidăriile pentru colectările de apă și clădirile centralelor hidroelectrice, se înalță pe o temelie de nisip mărunt a albiei. In astfel de condiții, asemenea clădiri încă nu s-au mai construit niciodată și nicăeri.

Insă o problemă deosebit de importantă, care s'a pus înaintea constructorilor, a fost necesitatea de a îndeplini într'un termen excepțional de scurt (4 ani) o muncă atât de vastă. Numai lucrările de pământ pentru săparea canalurilor și pentru umplerea stăvilarelor — au necesitat scoaterea a mai bine de 150.000.000 m³ de pământ, iar lucrările în beton și beton armat — au necesitat aproximativ 3 milioane m³ de material. Pentru executarea acestor lucrări gigantice au fost necesare utilaje pe care numai marea industrie sovietică le-a putut procura. Despre aceste utilaje vom vorbi în numărul viitor.

PENTRU CERCURILE DE FIZICĂ

SĂ CONSTRUIM CU MIJLOACE PROPRII MODELE ȘI APARATE DE FIZICĂ

Construirea unui voltametru

Scoatem cărbunii dela o baterie electrică de buzunar pe care îi introducem în foc spre a îndepărta clorura de amoniu.

Fixăm acești cărbuni într'o bucată dreptunghiulară de placaj la o distanță de 23 cm unul de altul și sprijinim plăcuța cu cărbunii în jos, într'un pahar obișnuit de sticlă.

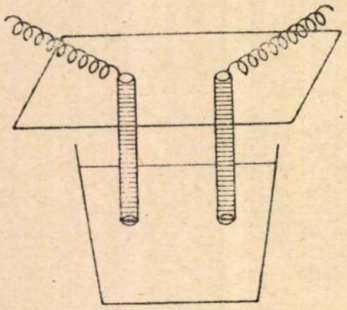


Fig. 1

Punem în vasul de sticlă o soluție concentrată de sulfat de cupru în apă. Legăm cărbunii la bornele redresorului electrolitic făcând astfel electroliza soluției de sulfat de cupru.

Pe cărbunele legat cu polul negativ al redresorului se depune un strat spongios negru de cupru.

Dacă soluția mai este caldă dela disolvarea sulfatului de cupru la cald, pe cărbunele negativ se depune și aderă bine de el o pojghiță de cupru în culoarea roșu-arămiu caracteristică cuprului.

Construirea unui acumulator electric

Un acumulator este tot un voltametru de formă specială în care electroliza modifică electrozii așa de mult încât ei devin la rândul lor generatori de energie electrică.

Ne procurăm două plăci de plumb masiv. In cazul când este greu să le găsim gata turnate, le putem face singuri astfel: într'o cutie de conserve de pește dreptunghiulară turnăm plumb topit. Prin răcirea topiturei se obțin plăcile de plumb masiv de formă dorită.

Fixăm aceste două plăci de un lemn de formă dreptunghiulară după cum se vede în fig 2. Fixarea

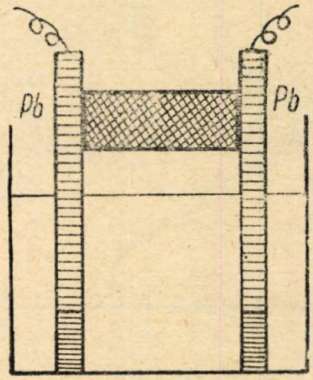


Fig. 2

o facem bătându-le în cuie pe bara de lemn, sau prin holtz-șuruburi, având grija de cuie să nu facă contact între ele. De fiecare placă pe care le perforăm la partea lor superioară legăm câte un reofor de cupru.

Sistemul celor două plăci de plumb fixate pe bara de lemn le introducem într'o soluție diluată de acid sulfuric, sprijinindu-l pe fundul vasului.

Incărcarea acumulatorului o facem legând cei doi reofori la bornele redresorului electrolitic.

Cu cât îl lăsăm mai mult în circuitul de curent continuu al redresorului cu atât se încarcă mai mult.

După 10—15 minute îl scoatem din circuitul redresorului și îl punem în circuit cu unul din ampermetrele construite de noi. Vom constata devierea acului, ceeace denotă că aparatul nostru a înmagazinat electricitate dela sursa de curent continuu, pe care apoi ne-o restitue.

Putem arăta prezența curentului electric debitat de acumulatori, executând experiența Oersted.

Construirea unui cuplu termoelectric

Din două fire de diametru mai mare, unul de cupru și altul de fier moale, alcătuim un cadru dreptunghiular prin împletirea strânsă a firului de cupru în jurul celui de fier așa cum se vede în figura 3.

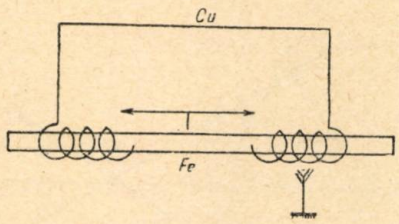


Fig. 3

Așezând în interiorul acestui cadru o busolă de buzunar sau un ac magnetic și încălzind una din cele două împletituri, vom constata deviația acului busolei, ceeace denotă că energia calorică a fost transformată cu ajutorul acestui aparat denumit cuplu termoelectric în energie calorică.

Incălzirea o putem face la orice izvor de căldură.

Construirea arcului electric (Petrov)

Tensiunea și intensitatea ce ni le procură un redresor electrolitic așa cum a fost descris mai sus (10—12 A și 50—60 V) ne permite să provocăm arcul electric în condițiuni foarte bune.

Scoatem dintr'o baterie electrică uscată, cărbunii de acolo ce constituesc polul pozitiv al elementului, îi introducem într'o flacără pentru a îndepărta din ei clorura de amoniu și ascuțim unul din ei.

Fiecare cărbune îl introducem într'un dop de plută după cum se vede în figura 4.

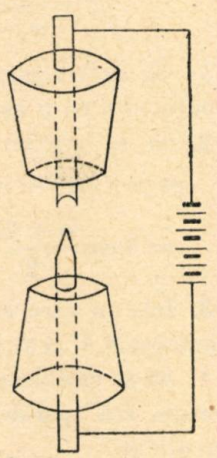


Fig. 4

Prindem dopurile de plută în cleme pe care apoi le fixăm la un stativ vertical.

Legăm cărbunii la bornele redresorului (capetele C și D), îi apropiem făcând contactul lor, apoi la îndepărtarea lor treptată apare flama sub formă de arc.

In lipsa clemelor și stativului putem ține dopurile de plută cu cărbuni în mână.

Construirea unei sonerii electrice

Ne procurăm o vergea de fier rotund cu diametrul între 0,5—1 cm pe care o îndoim în formă de U și o vopsim pentru ca ulterior să nu rugineasca.

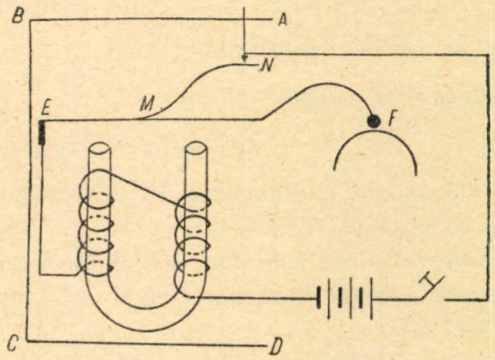


Fig. 5

Din trei scânduri de lemn alcătuim cutia deschisă *ABCD*. Fixăm pe scândura *CD* fierul de formă *U* pe care înfășurăm sârma de cupru izolată pentru a forma din el un viitor electromagnet.

Pe scândura *BC* fixăm o lamelă de fier moale (dintr'un balot mai gros care să prezinte oarecare elasticitate). Această lamelă *EF* o terminăm cu un ciocănaș *F* care să poată lovi într'un clopoțel de bicicletă.

Tot pe lamela *EF* lipim cu cositor lamela *MN*, tăiată dintr'o cutie de conserve, care să se sprijine pe un cui fixat și el în scândura *AB*.

Stabilim prin fire de conexiune circuitul din fig. 5, încare intercalăm un întreruptor și redresorul electolitic. Stabilind circuitul, soneria intră în funcțiune.

Dacă intensitatea curentului debitat de redresorul electrolitric este prea mare folosim un reostat cu apă. Reostatul cu apă este un vas cu apă în care cufundăm două lamele metalice. Prin apropierea sau îndepărtarea lor, variem rezistența în circuit și deci și intensitatea curentului.

Prof. N. RĂDULESCU

CHESTIUNI DE EXAMEN[1]

Date în August 1952 la admiterea în Institutul de Petrol şi Gaze din Bucureşti, facultăţile de Geologie şi Eeconomie

703*. *Grupa I.*

1. Se dau relaţiile:

$$x + y + z = a$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = b^2$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{c}$$

Să se calculeze suma:

$$x^3 + y^3 + z^3$$

2. Să se verifice identitatea:

$$tg\,2a - tg\,(a + b) - tg\,(a - b) =$$

$$= tg\,2a\,tg\,(a + b)\,tg\,(a - b).$$

3. Se dă un cerc şi diametrul AA'. Se duce raza OB aşa ca unghiul $AOB = 60°$.

a) Să se calculeze volumul conului descris prin rotirea razei OB în jurul diametrului CC' perpendicular pe AA'.

b) Să se calculeze aria calotei sferice născută prin rotirea arcului BC în jurul diametrului CC'.

c) Să se calculeze aria laterală a trunchiului de con născut prin rotirea coardei AB în jurul diametrului CC'.

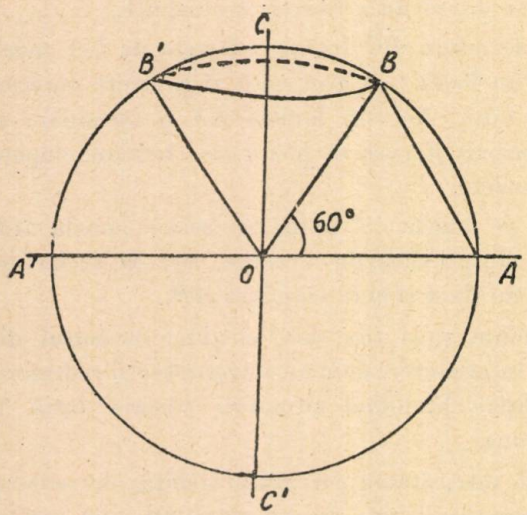


Fig. 1

704*. *Grupa* II

1. Să se rezolve ecuaţia:

$$\sqrt{\frac{x-1}{x-2}} + 2\sqrt{\frac{x+6}{x+5}} = \frac{10}{\sqrt{(x-2)(x+5)}}$$

2. Să se rezolve ecuaţia trigonometrică

$$tg\,(45^0 - x) + tg\,x = 2$$

3. Se dau două cercuri cu centrele în O_1 şi O_2 la distanţa $O_1O_2 = 15$ m., de raze $R_1 = 6$ m şi $R_2 = 3$ m. Se duc tangentele interioare comune ambelor cercuri T_1MT_2 şi S_1MS_2. Se cere:

a) Să se calculeze lungimea segmentelor MO_1 şi MO_2.

b) Să se calculeze puterea punctului M faţă de cercul O_1.

c) Să se calculeze aria calotei sferice descrisă de arcul T_1S_1 prin rotire în jurul axei O_1O_2.

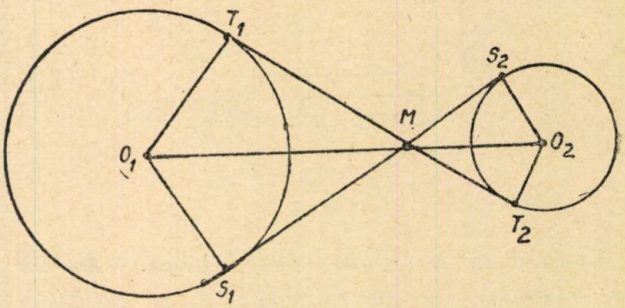


Fig. 2

705*. *Grupa III.*

1. Se dă ecuaţia:

$$x^2 - 6x + 7 = 0$$

a) Fără a calcula rădăcinile x_1 şi x_2 ale acestei ecuaţii să se formeze ecuaţia care are rădăcinile:

$$y_1 = \frac{2x_1}{x_1 - x_2}; \quad y_2 = \frac{2x_2}{x_2 - x_1}$$

b) Să se calculeze rădăcina pozitivă a acestei ecuaţii în y cu o aproximaţie de $1/10^2$.

2. Să se verifice identitatea trigonometrică:

$$\cos(a + 2b) + \cos(2a + b) + \cos(a - b) =$$

$$= 4\cos\frac{a + 2b}{2}\cos\frac{2a + b}{2}\cos\frac{a - b}{2} - 1$$

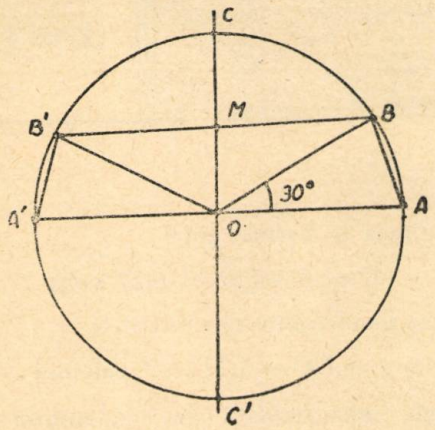
3. Intr'un cerc cu rază de 8 metri se duce un diametru AA' şi se ia unghiul $AOB = 30^0$.

1) Să se calculeze puterea punctului M, mijlocul coardei BB' paralelă cu diametrul AA' faţă de cercul dat.

2) Să se calculeze aria zonei sferice formată prin rotirea arcului AB în jurul diametrului CC', perpendicular pe AA'.

[1] La chestiunile 703* — 707* se primesc soluţii, fiind socotite ca probleme propuse.

3) Să se calculeze volumul conului format prin rotirea razei OB în jurul diametrului CC'.



706*. *Grupa IV*

1. Se dă ecuația:

$$(m+1)\,x^2 + 2\,(m-2)\,x + 4 = 0$$

a) Să se discute această ecuație după diversele valori ale lui m.

b) Să se formeze ecuația de gradul al doilea în y astfel ca:

$$y_1 = x_1^2; \quad y_2 = x_2^2$$

c) Să se rezolve ecuația în x pentru cazul $m = -2$ și să se găsească rădăcina pozitivă cu aproximație de $1/10^2$.

2. Să se rezolve ecuația trigonometrică:

$$\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x = \sin x + \cos x$$

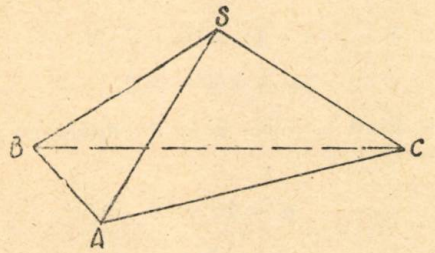


Fig. 4

3. Se dă o piramidă triunghiulară $SABC$, așa că: $SA = SB = SC = a$; unghiul $ASB = 60°$; unghiul $ASC = 90°$; unghiul $BSC = 120°$.

a) Să se calculeze laturile triunghiului de bază ABC.

b) Să se calculeze aria laterală a piramidei.

c) Să se calculeze volumul piramidei.

707*. *Grupa V*

1. Să se rezolve sistemul:

$$\frac{xy}{x+y} = \frac{12}{5}; \quad \frac{yz}{y+z} = \frac{18}{5}; \quad \frac{zx}{z+x} = \frac{36}{13}$$

2. Să se rezolve ecuația trigonometrică:

$$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} - \frac{1}{\operatorname{ctg}^2 x} - \frac{1}{\sec^2 x} - \frac{\operatorname{cosec}^2 x}{1} = -3$$

3. Un triunghiu dreptunghiu are laturile în progresie aritmetică.

a) Știind că ipotenuza este de 10 metri să se calculeze catetele.

b) Cele două cercuri având ca diametre respective catetele, se taie în punctul D. Să se arate că punctul D este piciorul înălțimei dusă pe ipotenuză.

c) Să se calculeze volumul conului născut prin rotirea catetei mari AC în jurul ipotenuzei.

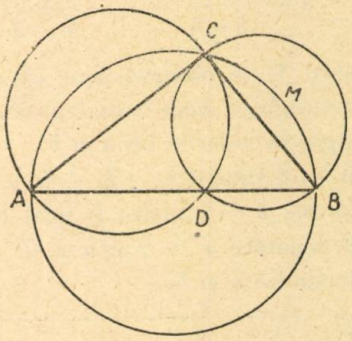


Fig.

d) Se consideră cercul circumscris triunghiului ABC și se cere să se calculeze aria calotei sferice obținută prin rotirea arcului BMC corespunzător catetei mici.

Problema 383

Există triunghiuri dreptunghice având laturile exprimate prin numere întregi la care perimetrul și suprafața sunt exprimate prin același număr.

Demeni Zoltan

Soluție: Conform enunțului avem:

$$a + b + \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{1}{2} ab \text{ sau}$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \frac{1}{2} ab - a - b$$

de unde prin ridicare la patrat și simplificând cu $ab \neq 0$ obținem:

$$ab - 4b - 4a + 8 = 0$$

$$a = \frac{4b - 8}{b - 4} = 4 + \frac{8}{b - 4} \qquad (1)$$

Din relația (1) se observă ușor că există triunghiuri dreptunghice care satisfac condițiile problemei. Să găsim valorile lui a și b.

Divizorii lui 8 sunt ± 1, ± 2, ± 4, ± 8. Din valorile de mai sus $b - 4$ poate fi egal cu $+1$, $+2$, $+4$ și $+8$, deoarece $a > 0$ și $a \neq 0$.

Iată valorile lui a și b:

a	12	8	6	5
b	5	6	8	12

Problema 496

O pilă electrică cu f.e.m. de 10 volți și rezistența de 18 ohmi este închisă de o rezistență exterioară de 20 ohmi. Armăturile unui condensator de 1 microfarad comunică cu polii pilei. Se cere:

Intensitatea curentului, sarcina q a condensatorului și energia înmagazinată de condensator.

Cucula V. Dacos

Soluție: Intensitatea curentului este:

$$I = \frac{E}{R_1 + R_e} = \frac{10}{18 + 20};$$

$$I = 0{,}26 \text{ amperi.}$$

iar tensiunea la bornele pilei

$$U = E - I_k R_1 = 5{,}27 \text{ volți}$$

Sarcina condensatorului este deci

$$q = UC = 5{,}27.10^{-6} \text{ culombi}$$

Energia înmagazinată de condensator este:

$$W = \frac{1}{2} q\, U. = 13{,}88645.10^{-6} \text{ jouli} =$$

$$= 138{,}8645 \text{ ergi.}$$

Problema 506

Să se calculeze termenii comuni progresiilor:

4, 9, 14, ...
93, 86, 79, ...

Gh. Bazacov

Soluție. Rația primei progresii este $+5$ iar a celei de a doua -7.

Termenii comuni celor două progresii, de rang n în prima, respectiv de rang N în a doua vor fi dați de ecuația:

$$4 + 5(n - 1) = 93 - 7(N - 1)$$

$$5n + 7N = 101$$

O soluție fiind $n = 16$, $N = 3$ rădăcinile sunt de forma:

$$n = 16 - 7t$$

$$N = 3 + 5t$$

n și N fiind pozitivi nu putem avea decât $t = 0$; 1; 2 și deci

$$n = 16;\ 9;\ 2$$

$$N = 3;\ 8;\ 13$$

iar termenii comuni sunt 79, 44 și 9.

Problema 510

Pentru a pune în mișcare turbina unei uzine dela o microcentrală electrică se folosește apa unui râu de munte strânsă într'un lac la cota 1240 m, uzina aflându-se la cota 940 m.

Care este debitul apei necesare mișcării turbinei și ce forță electrică în kW are microcentrala, randamentul ei fiind de 75%, dacă mărind debitul cu

1 m^3/s, *instalând microcentrala cu* 50 *m mai sus și mărindu-se randamentul la* 80%, *forța electrică se mărește cu* 1075 *kW.*

N. Mihăilă

Soluție. Fie x dm³/sec debitul căutat. Puterea turbinei este (1 kW = 0,736 C. P.)

$$P = 0{,}75 \times \frac{0{,}736 \times 300\,x}{75}\ \text{kW}$$

In al doilea caz vom avea pentru puterea turbinei valoarea

$$P_1 = 0{,}80 \times \frac{0{,}736 \times 250\,(x + 1000)}{75}\ \text{kW}$$

Pentru determinarea lui x avem ecuația:

$$P = P_1 - 1075 \quad \text{sau}$$

$$6{,}624x + 3225 = 5{,}888x + 5888$$

$$0{,}736\,x = 2663$$

$$x = 3618{,}206\ \text{cm}^3/\text{s}$$

Puterea microcentralei este 7989 kW.

Problema 516

In circuitul unei pile se leagă mai întâi în serie apoi în derivație, trei fire: de cupru, aluminiu și nichel. Firele având aceeași lungime, aceeași secțiune iar rezistențele specifice respective fiind 1,7 *pentru cupru;* 4 *pentru aluminiu și* 9 *pentru nichel, să se afle: raportul cantităților de căldură primite, între firul de cupru și aluminiu și între cupru și nichel, în ambele feluri de legături.*

Virgil Atanasiu

Soluție. Firele având aceeași lungime și aceeași secțiune, rezistențele lor sunt proporționale cu rezistențele lor specifice.

Pentru legătura în serie avem

$$\frac{Q_{cu}}{\rho_{cu}} = \frac{Q_{Al}}{\rho_{al}} = \frac{Q_{Ni}}{\rho_{Ni}}$$

$$\frac{Q_{Cu}}{Q_{Al}} = \frac{\rho_{Cu}}{\rho_{Al}} = \frac{1{,}7}{4} = 0{,}425$$

$$\frac{Q_{Cu}}{Q_{Ni}} = \frac{\rho_{Cu}}{\rho_{Ni}} = \frac{1{,}7}{9} = 0{,}188$$

Pentru legătura în paralel avem

$$\frac{Q_{Cu}}{\frac{1}{\rho_{Cu}}} = \frac{Q_{Al}}{\frac{1}{\rho_{Al}}} = \frac{Q_{Ni}}{\frac{1}{\rho_{Ni}}};$$

deci

$$\frac{Q_{Cu}}{Q_{Al}} = \frac{\rho_{Al}}{\rho_{Cu}} = \frac{4}{1{,}7} = 2{,}352;\quad \frac{Q_{Cu}}{Q_{Ni}} = \frac{\rho_{Ni}}{\rho_{Cu}} = \frac{9}{1{,}7} = 5{,}294.$$

Problema 512

Un tren merge cu 72 *km/oră. El se apropie fluierând și apoi trece de un om care se află lângă sine. Știind că sirena locomotivei emite un sunet cu frecvența* $\nu = 392$ *Hz, se întreabă care este diferența între frecvențele sunetelor percepute și observator când trenul se apropie și când trenul se depărtează (Se dă* $V = 340$ *m/sec).*

N. Stănescu

Soluție. Când trenul se apropie frecvența sunetului perceput de om este

$$\nu' = \nu \frac{V}{V - u}$$

iar când trenul se îndepărtează

$$\nu'' = \nu \frac{V}{V + u}$$

Scăzând cele două relații, găsim

$$\nu' - \nu'' = \frac{2u\nu V}{V^2 - u^2}$$

Inlocuind valorile cunoscute ($u = \frac{72.000}{3600} = 20$m/s), $\nu = 392$ Hz, $V = 340$ m/s) găsim

$$\nu' - \nu'' = \frac{2 \times 20 \times 392 \times 340}{360 \times 320}$$

$$\nu' - \nu'' = 46{,}3\ \text{Hz}.$$

Problema 515

Intr'un cilindru metalic se află un lichid la $0°C$, *până la înălțimea* h. *Coeficientul de dilatare al metalului din care este făcut cilindrul este* α, *iar al lichidului* β.

Care va fi înălțimea lichidului în cilindru la $t°$ *C.*

Simon St. Petre

Soluție. Fie R raza bazei cilindrului, la 0°C. Suprafața bazei la $t°$ va fi

$$R^2\,[1 + 2\,(t - 0)]$$

unde α este coeficientul de dilatare liniară a metalului.

Volumul lichidului este dat de expresia:

$$\pi R^2 h\,[1 + \beta\,(t - 0)]$$

Inălțimea lichidului la $t°$ va fi

$$h_t = \frac{\pi R^2 h\,[1 + \beta\,(t - 0)]}{\pi R^2\,[1 + 2\,(t - 0)]} = \frac{1 + \beta\,(t - 0)}{1 + 2\alpha\,(t - 0)} \cdot h$$

diferența $h_t - h = d_t$, cu cât lichidul s'a urcat în cilindru este

$$d_t = \frac{(\beta - 2\,\alpha)\,(t - 0)\,h}{1 + 2\,\alpha\,(t - 0)}$$

Observare. Dacă $\beta = 2\alpha$ înălțimea lichidului staționează; iar dacă $\beta > 2\alpha$, înălțimea lichidului crește.

Problema 519

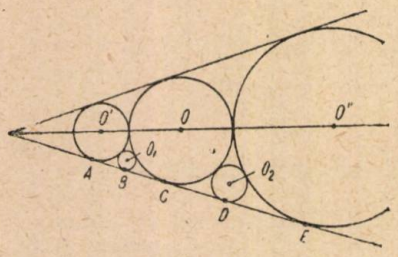
Se dă un cerc O (R) *înscris într'un unghi. Se construesc două cercuri* O′ *şi* O″ *tangente lui* O *şi laturilor unghiului şi două cercuri* O_1 *şi* O_2 *tangente la cercurile* O′ *şi* O *respectiv* O *şi* O″ *şi la una din laturile unghiului. Să se arate relaţia*

$$\sqrt{r} + \sqrt{r'} = \sqrt{R}$$

r *şi* r′ *fiind razele cercurilor* O_1 *şi* OO_2.

Dan Popescu
elev

Soluţie. Fie a, b respectiv razele cercurilor O', O''; fie A,B,C,D,E respectiv, punctele de contact ale cercurilor O', O_1, O, O_2, O'' pe o latură a unghiului. Avem:



$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$$

$$\overline{CE} = \overline{CD} + \overline{DE}$$

sau

$$2\sqrt{ar} + 2\sqrt{Rr} = 2\sqrt{aR}$$

$$2\sqrt{br'} + 2\sqrt{Rr'} = 2\sqrt{bR}$$

de unde

$$\sqrt{Rr} = \sqrt{a}\,(\sqrt{R} - \sqrt{r}); \quad \sqrt{Rr'} = \sqrt{b}\,(\sqrt{R} - \sqrt{r'})$$

Prin înmulţirea ultimelor două relaţii şi ţinând seama că $\sqrt{ab} = R$ obţinem

$$\sqrt{Rr} + \sqrt{Rr'} = R,$$

sau

$$\sqrt{r} + \sqrt{r'} = \sqrt{R}$$

Notă. Relaţia $\sqrt{ab} = R$ se poate obţine astfel: cercurile O' şi O sunt omotetice unul faţă de altul în raport cu vârful unghiului, la fel ca O şi O''; când se transformă prin omotetie sistemul de cercuri O' şi O, în aşa fel ca O' să se schimbe în O, transformarea aduce pe O în O''. Raportul razelor cercurilor O' şi O este acelaş cu raportul razelor cercurilor O şi O'', deci

$$\frac{a}{R} = \frac{R}{b} \quad \text{sau} \quad \sqrt{ab} = R$$

Problema 520

Să se rezolve ecuaţia

$$x^4 + 4x^3 + x^2 - 6x + 2 = 0$$

Klaus Fissgus
elev, Petroşani

Soluţia I. Ecuaţia se poate scrie:

$$(x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1) - 5(x^2 + 2x + 1) + 6 = 0$$

$$(x+1)^4 - 5(x+1)^2 + 6 = 0$$

de unde

$$x + 1 = \pm\sqrt{\frac{5 \pm 1}{2}}$$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{3} - 1 \quad \text{şi} \quad x_{3,4} = \pm\sqrt{2} - 1$$

Soluţia II. Ecuaţia se mai poate scrie:

$$x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 3x^2 - 6x + 2 = 0$$

$$(x^2 + 2x)^2 - 3(x^2 + 2x) + 2 = 0$$

de unde

$$x^2 + 2x = \frac{3 \pm 1}{2}$$

$x^2 + 2x - 2 = 0$	$x^2 + 2x - 1 = 0$
$x_{1\,2} = \pm\sqrt{3} - 1$	$x_{3,4} = \pm\sqrt{2} - 1$

Problema 522

Se dă un triunghi echilateral ABC. *Prin* A *se duce perpendiculara pe* BC. *Pe această dreaptă se ia un punct oarecare* M *care se uneşte cu cele* 3 *vârfuri* A,B,C. *Să se arate că:*

$$MA \leqslant MB + MC$$

N. G.

Soluţie. Într'un patrulater oarecare produsul diagonalelor este mai mic decât suma produselor laturilor opuse (generalizarea teoremei lui Ptolemeu). Putem deci scrie

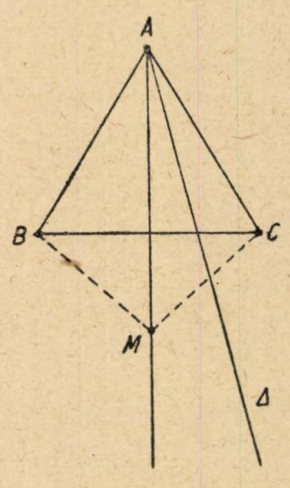
$$\overline{MA} \cdot \overline{BC} < \overline{MB} \cdot \overline{AC} + \overline{MC} \cdot \overline{AB}$$

sau

$$(BC = AC = AB)$$

$$MA < MB + MC$$

Egalitatea are loc când patrulaterul $MBAC$ este inscriptibil, deci când MB şi AB sunt perpendiculare.



Se observă că pentru existenţa relaţiei de mai sus nu este necesar ca AM şi BC să fie perpendiculare, ci orice dreaptă Δ; iar condiţia ca intersecţia (Δ, BC) să fie între B şi C, asigură existenţa relaţiei.

Exerciţii

Demonstraţi

$$\left(\frac{125}{64}\right)^{10} < 1000$$

EXERCIŢII ŞI PROBLEME PROPUSE

Probleme

A, B = puncte fixe;
Locul geometric M?

$$\frac{1}{AM} - \frac{1}{BM} = const.$$

683. Să se rezolve ecuaţia:

$$\log_x 10 + 2\log_{10x} 10 + 3\log_{100x} 10 = 0.$$

A. Murkluischi

684. Să se demonstreze că trinomul:

$$x^2 + 5x + 16$$

nu se împarte cu numărul 169, pentru nici o valoare întreagă a lui x.

M. Leibman

685. Zece becuri identice sunt legate în paralel într'o reţea sub o tensiune de 127 volţi. Să se afle intensitatea în circuitul principal dacă rezistenţa unei lămpi este de 240 ohmi.

* * *

686. Un motoraş de curent continuu sub tensiunea de 120 volţi are o putere de 3,92 HP, randamentul fiind 0,9.

Să se afle forţa electromotoare a motorașului, dacă rezistenţa indusului este 0,4 ohmi.

La pornirea motorașului se cere o intensitate mai mare şi pentru aceasta se foloseşte un reostat de pornire. Ce rezistenţă trebue să aibă reostatul pentru ca intensitatea curentului să fie de 50 amperi?

I. Licea
elev Galaţi

687. Se dă o lentilă convergentă cu distanţa focală f = 11 cm şi un obiect în faţa ei astfel încât imagina formată de lentilă este virtuală.

Ştiind că raportul dintre imagine şi obiect este egal cu 3, să se afle:

1°. Depărtarea imagini de centrul optic al lentilei.

2°. Puterea şi grosismentul lentilei.

M. I. Popescu
elev, Craiova

688. Intr'un vas se găsesc lichide de densităţi diferite care nu se amestecă (ulei de recină cu densitatea 0,96 şi au alt lichid cu densitatea necunoscută).

In vas stă în echilibru o sferă de cupru cu R = 2 cm, densitatea cuprului este 8,86.

— Să se determine densitatea lichidului care se găseşte în vasul cu uleiul de recină ştiind că, raportul volumelor calotelor sferice care se găsesc în ulei şi celălalt lichid este 0,6.

— Să se determine înălţimea calotei sferice a volumului v_1 cufundat în uleiul de recină.

Alex. Gh. Crăciun

689. Un acumulator cu 4 volţi are capacitatea de 36 amperi-oră. Se cere:

1°. Câte elemente are acest acumulator şi ce voltaj e necesar pentru încărcarea lui?

2°. Câte zile durează încărcătura, dacă acumulatorul e întrebuinţat zilnic câte 4 ore, dând un curent de 0,9 amperi.?

3°. La ce indicaţie a voltmetrului vom considera acumulatorul ca fiind la limita descărcării?

Florin Torjescu
elev Ploeşti

690. Să se demonstreze că dacă $(p + 1)$ este prim cu 6, atunci suma

$$S = n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + \ldots + (n+p)^2$$

este divizibilă cu (p + 1).

Gh D. Simionescu

691. Să se determine o progresie aritmetică, în care suma primilor m termeni este n, iar suma următorilor n termeni este m.

Caz particular: $m = 6$, $n = 10$.

N. C. Ciomu

692. Unghiurile unui patrulater neregulat sunt în progresie geometrică.

Să se calculeze aceste unghiuri ştiind că unghiurile reprezintă numere întregi de grade atât în sistemul sexagesimal cât şi în cel centesimal.

Mircea D. Constantinescu
elev Bucureşti

693. O paralelă la latura BC a unui triunghi ABC taie laturile AB, AC în C', B'. O dreaptă dusă prin A întâlneşte latura BC în D şi dreptele BB', CC', în M, N.

Valoarea rapoartelor egale $\frac{C'A}{C'B}$ şi $\frac{B'A}{B'C}$ fiind k, să se arate că:

$\frac{MD}{MA} \pm \frac{ND}{NA} = \frac{1}{k}$, după cum dreapta AD taie sau nu taie triunghiul ABC.

D. C. Panu

694. Se dă triunghiul dreptunghic ABC. Perpendiculara în C pe ipotenuza BC taie pe AB în D; perpendiculara în D pe CD taie pe AC în E; perpendiculara în E pe DE taie pe AB în F; iar perpendiculara în F pe EF taie pe AC în G.

Perpendiculara în B pe BC taie pe AC în I; perpendiculara în I pe BI taie pe AB în J; perpendiculara în J pe IJ taie pe AC în K; iar perpendiculara în K pe JK taie pe AB în L.

Să se arate că:

Dreptele LC și BG sunt paralele;

$$\overline{BC}^2 = \overline{KL} \cdot \overline{FG} \text{ și } \operatorname{tg}^5 (ACB) = \operatorname{tg} (AGB).$$

C. Ionescu-Țiu

695. A, B, C, D fiind patru puncte așezate în ordinea dată pe o dreaptă, există relația:

$$\Sigma \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BC} = \overline{AC} \cdot \overline{BD} \cdot (\overline{AB} + \overline{CD}).$$

Onofraș Eugen

696. Se dă un triunghi dreptunghic CAB și un punct D pe cateta CA $(b > c)$.

Să se construiască grafic triunghiurile cari au ca înălțime cateta AC și ca mediană ipotenuza BC, ortocentrul D mișcându-se pe AC și prelungirea sa.

Teodor Verveagă
elev Bistrița

697. Trei triunghiuri isoscele asemenea, ABC, A_1BC_1, A_2BC_2, având respectiv $AB = AC$, $A_1B = A_1C_1$, $A_2B = A_2C_2$, au vârful B comun și o astfel de poziție încât vârfurile A_1, A_2, sunt situate în interiorul triunghiului ABC, ale cărui laturi sunt $AB = AC = l$, $BC = \frac{l}{k}$, $(k > \frac{1}{2})$.

1°. Pentru care poziție a vârfurilor A_1, A_2, cercurile circumscrise celor trei triunghiuri, sunt tangente interioare.

2°. Prelungirea lui AA_1 intersectând CC_1 în M, iar prelungirea lui AA_2 intersectând CC_2 în N, să se arate că:

$$\frac{MA}{MB + MC} = \frac{NA}{NB + NC}$$

Matei I. Nazarie
elev București

698. Dacă n_a, n_b, n_c sunt proiecțiile medianelor m_a, m_b, m_c respectiv pe laturile a, b și c ale unui triunghiu oarecare, să se stabilească relația:

$$\sum n_a + \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} = \sum \frac{m_a^2}{a} + \frac{1}{4} \Sigma a$$

Ce devine relația dacă triunghiul este echilateral?

Iliescu Dinu
student

699. Intr'un cerc de rază R e înscris triunghiul ABC, în care AB e fixă și C descrie cercul R. Se împart laturile AC și BC în p părți egale. Fie M și N punctele corespunzătoare așa fel ca $AM = \frac{AC}{p}$ și $BN = \frac{BC}{p}$. Din M și N se duc perpendiculare pe laturile AC și BC respectiv, care se întâlnesc în P. Se cere locul lui P, când C descrie cercul.

N. Gaiu

700. Să se găsească toate numerele prime până la 500 care au forma $7k + 1$ (fără a avea o tabelă de numere prime; folosind numai numerele prime până la 20).

Idem, pe cele de forma $7k + 2$.

È. Rusu

701. Fie d_a, d_b, d_c distanțele centrului cercului circumscris unui triunghiu oarecare ABC. Să se arate că avem:

$$d_a + \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{A}{2} = d_b + \frac{b}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} = d_c + \frac{c}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2}.$$

Simon Șt. Petre

702. Punctul M de coordonate a și b față de un sistem de axe ortogonale se proectează în M' și M'' pe axe, apoi în M_1 pe dreapta $M'M''$. M_1 se proectează pe axe, apoi pe dreapta ce unește proiecțiunile și așa mai departe obținându-se punctele M_2, M_3, M_4, ..., M_n.

Se cere:

1) Să se determine coordonatele punctului M_n în funcțiune de a și b.

2) Să se calculeze lungimea $M_{n-1}M$ în funcție de a și b.

I. Sager

Problemele *703* — 707** sunt enunțate la CHESTIUNI DE EXAMEN din acest număr la pagina 274.

EXERCIȚII PROPUSE PENTRU INVĂȚĂMÂNTUL ELEMENTAR

E. **223.** Numărul cărților literare și ideologice împrumutate dela o bibliotecă într'una din zile, e de 150. Ziua următoare, biblioteca dă de 4 ori mai multe cărți, dintre care de 3 ori mai multe cărți literare și de 6 ori mai multe cărți ideologice. Să se afle, separat, numărul cărților literare și ideologice date cu împrumut în fiecare din zile.

G. Dănilă
elev Giurgiu

E. **224.** Pentru a transporta cerealele produse de o gospodărie agricolă de Stat, un autocamion a făcut un anumit număr de curse cu încărcătura normală.

Dacă ar fi transportat de fiecare dată cu câte 800 kg mai puțin, ar fi trebuit să facă trei curse în plus; iar dacă ar fi putut transporta de fiecare dată cu 800 kg mai mult, numărul curselor ar fi fost cu 2 mai mic.

Ce cantitate de cereale a produs acea gospodărie agricolă de Stat?

N. C. C.

E. **225.** Să se arate că

$$a(b-c)^3 - c(b-a)^3 - b^3(a-c) = ac(c-a)(3b-a-c).$$

* * *

E. **226.** Două cercuri concentrice sunt tăiate de o dreaptă determinând pe cercul mare coarda $AB = a$ și pe cercul mic coarda $CD = b$. Să se calculeze aria cuprinsă între cele două cercuri. Aplicație $a = 10$ m și $b = 6$ m.

C. I. Ț.

E. **227.** Un biciclist pleacă dintr'o comună pe o șosea. In momentul când a parcurs distanța de 8 km, pleacă din aceeași comună o mașină cu viteza de 5 ori mai mare ca a biciclistului.

Să se afle la ce distanță de comună a fost ajuns biciclistul.

Ion Cochințoiu

E. **228.** Să se pună sub formă de produs de factori expresia:

$$4(ab+cd)^2 - (a^2+b^2-c^2-d^2)^2.$$

W. Paraschiv
student

E. **229.** Pe o hârtie cu pătrățele scrim numerele întregi crescătoare în rânduri de câte zece unele sub altele. Tăem fiecare multiplu al lui 3 prin diagonala pătrățelului în care este scris cel care merge din colțul de sus dreapta în colțul de jos stânga. Obținem linii în prelungire. De ce?

Câte câte în rând trebue așezate numerele pentruca tăind multiplii lui 7 să obținem linii în prelungire?

E. R.

E. **230.** Să se verifice identitatea

$$(a^2+b^2)^2(c^2+d^2)^2 + (a^2-b^2)^2(c^2-d^2)^2 = 2[(a^4+b^4)(c^4+d^4) + 4a^2b^2c^2d^2)]$$

Istinie Crăciunel
elev, Craiova

E. **231.** Să se găsească numerele de două cifre care să fie egale de patru ori suma cifrelor sale.

Aurel Nicolescu

E. **232.** Producția într'o uzină în luna Martie a fost cu 30% mai mare decât în luna Februarie, iar producția din Februarie a fost cu 10% mai mică decât cea din Ianuarie. Cu cât la sută, producția din Martie, a fost mai mare sau mai mică decât cea din Ianuarie.

Dinu Schileru
elev București

DESCHIDEREA UNOR CERCURI DE MATEMATICĂ ȘI FIZICĂ ALE ELEVILOR FRUNTAȘI

Urmărind să contribue la creșterea de cadre noi, de elemente bine pregătite pentru știință și tehnică, Societatea de Științe Matematice și Fizice din R.P.R. a inițiat deschiderea unor cercuri de elevi în diferite orașe ale patriei noastre. Cercurile pe oraș, au menirea să întrunească laolaltă, sub conducerea unui profesor, pe elevii fruntași la matematică și fizică din orașul respectiv, pentru a-și însuși cunoștințe mai multe și pentru a adânci prin probleme mai grele materia care se predă în învățământul mediu. Cercurile pe oraș vor contribui totodată la formarea de cadre, care vor mobiliza pe elevii din școlile din care fac parte participanții la cercurile pe oraș, pentru ca la rândul lor să-și intensifice interesul pentru matematică și fizică, științe necesare tehnicii. In cinstea marii prietenii a poporului nostru cu popoarele sovietice, care ne-au eliberat și ne ajută să ne construim o viață fericită, s'au deschis cercuri în diferite orașe ale țării.

La *București* s'a deschis cercul de matematici de pe lângă Facultatea de Matematică și Fizică a Universității C. I. Parhon. La deschidere au participat în sala « Spiru Haret » peste 200 elevi și eleve fruntași la învățătură. Ședința a fost deschisă de un delegat al Organizației București U.T.M. și au luat cuvântul vorbind despre importanța activității cercurilor, tovarășul Tiberiu Roman, secretarul general al Societății de Științe Matematice și Fizice din R.P.R., precum și elevul fruntaș Chiorean Gheorghe dela liceul de băieți Nr. 2. Lecția de deschidere a fost ținută de către tovarășul Academician S. Stoilov, care a vorbit elevilor despre « Noțiunea de infinit ». După lecția de deschidere a cercului, tovarășul A. Șaichin a enunțat probleme propuse pe care participanții la cerc urmează să le rezolve pentru ședința viitoare.

Tot în cadrul Lunii Prieteniei Româno-Sovietice, s'a deschis în sala festivă a liceului de băieți din *Orașul Stalin* cercul pe oraș al elevilor fruntași la matematică și fizică. Au participat la ședința de deschidere 180 elevi. Adunarea a fost deschisă de către președintele filialei Societății de Științe Matematice și Fizice, tovarășul profesor Stelian Mărculescu, care a vorbit elevilor despre prietenia poporului nostru și popoarele sovietice și despre neprețuitul ajutor pe care-l primim dela ele. Tovarășul Mărculescu a scos în evidență marele ajutor cultural și bogata experiență sovietică care ne stă la îndemână și care ne ajută să ne construim o viață fericită. După cuvântul tovarășului profesor Aurel Goia care face un scurt raport asupra activității în cercurile din școli din Orașul Stalin, delegatul Consiliului Central tov. O. Sacter a ținut lecția despre « Șiruri recurente ».

In localul liceului de băieți din *Pitești* a avut loc festivitatea deschiderii cercului de matematici și fizică pentru elevii din localitate. Au luat parte tovarășii profesori de matematică și fizică și elevii fruntași la matematică și fizică dela toate școlile din localitate. Tov. Profesor Emerit Emil Morțun a arătat importanța acestui cerc care se deschide în cinstea prieteniei dintre poporul nostru și popoarele sovietice. Tovarășul profesor a recomandat elevilor folosirea cât mai largă a experienței sovietice pentru a obține rezultatele cele mai bune în munca lor. Elevii să folosească larg cărțile de matematică și fizică sovietice, să lucreze intens în cercuri pentru a-și desvolta înclinațiile pentru științele matematice și fizice și să ajute pe colegii lor comunicându-le metodele lor bune și antrenându-i pentru a lărgi cercul activiștilor pentru preocupări științifice legate de practică. S'au rezolvat apoi probleme din Revista Matematică și Fizică de către elevii Iosifescu Marius și Udrescu Valeriu, la care tov. C. Ionescu-Țiu, delegatul Societății de Științe Matematice și Fizice, a făcut completări, propuneri și generalizări în legătură cu aceste probleme, arătând în acelaș timp că trebuesc alese probleme din cărțile sovietice, legate de practică, pentru a fi urmărite cu folos de către elevii prezenți la aceste cercuri. Ședințele acestor cercuri vor avea loc în fiecare Duminecă dimineața, alternând cele de matematică cu cele de fizică. S'a propus ca la următoarele ședințe să se prelucreze de către profesori și elevi unele din articolele publicate de către Revista Matematică și Fizică, iar la ședințele de fizică în afara experien-

telor ce vor avea loc să se dea indicații de modul cum ne putem construi singuri modele și aparate de fizică. A urmat apoi ședința cu cititorii Revistei și Gazetei matematice și fizice, după care majoritatea elevilor prezenți și-au luat angajamente de a fi colaboratori la aceste publicații și de a trimite lunar probleme rezolvate.

Tot în cadrul Lunii Prieteniei Româno-Sovietice, au avut loc ședințe festive de deschiderea cercurilor de matematică și fizică în orașele Craiova, Cluj, Iași, Suceava și Ploești.

In numerele viitoare ale revistei vom publica dări de seamă asupra modului cum s'au desfășurat aceste ședințe.

$x = 1 + \frac{1}{x}$

PAGINA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

S'au evidențiat în luna Septemvrie 1952, următorii rezolvitori de probleme:

Iosifescu V. Marius (clasa X, Pitești), *Ghinea N. Benone* (clasa X, Pitești), *Miclăuș Vasile* (clasa X, Roșiorii de Vede), *Mihăilescu N. Stefan* (clasa X, L. b. 3 București), *Ciobanu Constantin* (clasa XI, Roman), *Sârbu I. Ovidiu* (clasa XI, Craiova), *Hammer L.* (clasa X, Timișoara), *Popescu Alex. Dan* (clasa X, Reșița), *Șincan Corneliu* (clasa XI, L. b. 10 București), Todică *Petre* (Iași), *Dobre Gheorghe* (clasa XI, Craiova), *Popescu I. Mihail* (clasa XI Craiova), *Cheblea Constantin* (Rădăuți), *Dihoru Valentin* (clasa XI, Buzău).

In cursul lunii Septembrie 1952, s'au primit cel puțin câte cinci soluții bune, la probleme propuse în Revista Matematică și Fizică în anii 1951 și 1952 dela următorii rezolvitori:

★

Bacău. Școala medie tehnică de construcții civile și industriale. Anul II. Buganu Minodora (568,569,574,582, 587,615, E: 165, 168), Calman Leon (608, 615, 618, 621, E: 175, 178, 189, 185, 190, 192, P), Clasa X liceu. Zisman Iosif (505, 506, 508, 518, 522, 525, 611, 615, 618, 621, E: 156, 157, 160,188, 190, 191), Clasa XI: Munteanu Aurelian (520, 541, 608, E: 190, 191).

Baia Mare. Student. Cadar Ion (333, 503, 581, 591, 599, 608, 618, 621, P).

Bârlad. Clasa VII. Bichir Ilie (E: 50, 75, 79, 82, 98, 100, 120, 121, 125, 128, 145, 165, 192), Clasa X. David Maria (364, 597, 601, 611, 613, 615, 620, 621); Scoala medie tehnică Anul II. Condrea Nelu (297, 298, 332, 370, 434 512, 513, 525, 536, E: 156, 165, 166, 172).

București. Liceul 1 băeți Clasa X. Petcu C. V. Nicolae (363, 375, 406, 445, 456,459,466, 468, 514, 518, 550, 554, 578, 583, 591, 600, 604, 615, 621). Scoala tehnică metalurgică Nr. 1. Padar Petre (590, 615, E: 152, 165, 173, 178, 181, 182, 185, P). Liceul 3 băieți. Clsa X B. Mihăilescu N, Ștefan (323, 333, 341, 342, 433, 446, 448, 453 456, 457, 474, 476, 477, 481, 482 485, 486, 492, 493, 496, 497, 499, 503, 510, 512, 513, 514, 517, 518, 521, 529, 534, 543, 568, 572, 573, 574, 576, 578, 583, 587, 589, 590, 598, 600, 604, 609, 618, 621). Scoala elementară 4 băieți. Clasa VII. Dinu Schileru (E: 177, 181, 184, 185, 187, 186, 190, 191, 192, P). Centrul școlar 2-10-13 fete. Clasa IX D. Petrică Zamfira (597, 603, 604 621, E: 176).

Liceul 10 băieți. Clasa VIII A. Păduraru P. Octavian (615, E: 159, 165, 166, 174, 187), Vidlescu Vasile (E: 70, 91 109, 155, 156, 160, 175, 182, 192), Munteanu Cătălin (E: 7, 15, 165, 167, 175). Clasa XI. Șincan Corneliu (260, 276, 329, 345, 415, 426, 427, 429, 436, 455, 472, 474, 476, 477, 479, 481, 482, 486, 496, 503, 503, 508, 525, 528, 530, 533, 540, 550, 561, 568, 582, 587, 589, 590, 591, 608, 615, 621, E: 184, 185, P), Stoicescu Teodor (377, 390, 403, 416, 486, 489, 537, 550, 561, 611, 615, 621), Mândru Anatolie (333, 341, 342, 384, 550, 591).

Studenți. Oprea Constantin (608, 615, 618, 621, E: 130, P).

Buzău. Clasa IX, B. Teodorescu Dragoș (611, 615, E: 185, 186, 187, 192), Clasa X B. Golianu Petru (443, 602, 621, E: 60, 62, 69, 73, 82, 86, 91, 92), Negulescu Paul (322, 353, 445, 541, 611, 618, 621, P), Clasa XI. Badea N. Alexandru (416, 432, 433, 441, 448, 466, 536, 537, 550, 591, P), Dihoru Valentin) (363, 374, 386, 427, 463, 475, 509, 533, 536, 537, 548, 550, 559, 560, 567, 568, 571, 592, 604, 607, 608, 615, 617, 618, 620, 621, P).

Călărași. Clasa XI. Iatan L. Elena (605, 608, 611, 612 613, 615, 617, 618, 621).

Câmpina. Școala medie de utilaj petrolifer. Banghea Oprea (404, 568, 569, 577, 578, 608, 621).

Câmpulung (Muscel). Clasa X Popescu Sanda (481, 508, 518, 536, 611).

Caransebeș. Clasa IX. Chiric Ioan (533, 537, 539, 588, 591, 597, 600, 601, 611, 613, 615, 620, 621, E: 155, 156, 157, 159, 160, 161, 163, 165, 166, 171). Școala medie tehnică silvică Anul II C. Loziciu I. Ilie (290, 369, 506, 604, 618, E: 161, 174, 176, 178, 182, 189, 190, 192, P).

Constanța. Clasa IX. Bumbac Paul (463, 497, 518, 522, 525, 532, 537, 540, E: 156, 157), Școala medie tehnică de lucrări edilitare. Anul II. Fotescu T. Niculae (501, 503, 543, 608, 615, 616, E: 161, 185).

Craiova. Liceul 1 fete. Clasa VIII. Cetățeanu Cecilia (611, 615, E: 178, 185, 187), Clasa XI A. Florea P. Paula (507, 514, 536, 578, 604, 611, 621, E: 157, 160 175, 174, 192), Șerban Ileana (536, 621, E: 99, 155, 160, 174, 175, 176, 192, P), Școala medie tehnică construcții C.F.R. Vasile N. Alexandru (587, 608, 615, 621, E: 178, 185, 190, P). Liceul Popular Clasa X. Istinie C.Crăciunel (278, 290, 502, 506, 536, 611, P). Clasa XI. Dobre Gheorghe (369, 371 390, 392, 448, 454, 466, 474, 484, 485, 499, 503, 504, 514, 517, 528, 530, 534, 537, 543, 560, 561, 569, 574, 578, 581, 587

604, 620 E: 157, 158, 158, 161, 163, 165, 166, 181, 182). Popescu I. Daniel (E: 51, 72, 148, 149, 157, 159, Popescu I. Mihail (263, 264, 169, 270, 278, 283, 471, 481, 484, 487, 488, 505, 506, 514, 518, 528, 535, 537, 554, 563, 582, 583, 670, 608, 611, 618, 620, 621, P), Popescu Paul (375, 389, 390, 448, 456, 466, 468, 485, 507, 516, 517, 523, 543, 604, 611, 620, E: 180, P.), Sârbu I. Ovidiu (283, 289, 290, 323, 324, 329, 375, 389, 390,, 404, 410, 462 ,416, 461, 466, 499, 505, 517, 518, 530, 556, 578, 586, 589, 591, 601, 604, 611, 608, 612, 615, 620, 621, P), Vrejoiu Constantin (404, 407, 413, 419, 420, 439, 443, 445, 512, 517, 534, 536, 550, 574, 581, 597, 603, 604).

Dorohoi. Scutelnicu Constantin (389, 444, 505, 508, 528, 572, 588, 591, 597, 640, 611, 620, P).

Focșani. Clasa X. Ioan D. Ioan (365, 369, 543, 547, 569, 574, 547, 576, 578, 581, 587, 591, 601, 611, 615 620, 621, E: 155, 163, 178, 179).

Giurgiu. Clasa IX. Drăgan St. Marin (E: 120, 143, 175, 178, 181, 183, 184,), Clasa X. Florică D. Sergiu (512, 520, 578, 615, 621, E: 147, 148, 161, 175, 178), Clasa XI. Dănilă D. Gheorghe (517, 567, 574, 587, 595, 600, E: 156, 160, 175, 183, P), Mitu Velicu (E: 165, 173, 175, 176, 178, 179, 182), Tănăsescu Petrică (525, 542, 567, 574, 587, E: 160, 165, 178, 181, P).

Iași. Clasa IX. Ciobanu Maria (591, 621, E: (92, 189, 192), Pânzaru Lucia (E: 50, 51, 137, 156, 159), Șerbescu Gh. Constantin (615, 621, E: 175, 178, 192). Clasa XI. Cazacu Constantin (519, 522, 528, 536, 604, 608, P). Școala medie tehnică de energie electrică. Todică Petre (241, 251, 264, 269, 271, 290, 297, 303, 307, 322, 324, 325, 332, 335, 349, 352, 351, 363, 369, 404, 416, 454, 455, 456, 457, 458, 459, 466, 468, 495, 496, 497).

Lugoj. Clasa VIII. Bacaloglu Radu (588, 590, 591, 593, 600, 601, 602, E: 156, 163), Nahaiciuc T. Mihai (506, 516, 525, 620, 621).

Orașul Stalin. Codlea. Moraru Liliana (290, 292, 303, 307, 367, 416, E: 67, 68, 69, 70, 71, 76, 78, 79).

Mizil. Iordănescu Rica (590, 600, E: 69, 70, 171, 172, 174, 175, 176), Mircea Roi (536, 587, 591, 597, E: 157, 159, 163, 165, 178, 179).

Pitești. Clasa IX. Dragomir Constantin (351, 365, 367, 369, 371, 375, 386, 404, 407, 422, 418, 525, 536, 540, 541, 543, P), Clasa X. Ghinea N. Benone (241, 269, 270, 271, 279, 283, 317, 322, 324, 328, 329, 333, 341, 343, 345, 351, 354, 359, 363, 365, 395, 392, 403, 404, 407, 410 416, 437, 441, 443, 445, 448, 456, 463, 466, 464, 475, 476, 478, 480, 482, 486, 499, 501, 503, 405, 507), Iosifescu V. Marius (451, 531, 585, 587, 588, 589, 590, 591, 592, 594, 595, 596, 597, 598, 599, 600, 601, 602, 503, 604, 605, 606, 607, 608, 608, 609, 610, 611, 612, 613, 614, 615, 617, 619, 620, 621, P), Pușcașu Alexandru (401, 454, 574, 578, 587, 591). Școala tehnică met urgică. Anul III A. Bărbulescu T. Alexandru (480, 532, 578, 608, 621, P).

Rădăuți. Chelbea I. Constantin (301, 375, 390, 422, 461, 503, 512, 513, 515, 517, 518, 523, 525, 536, 540, 568, 581, 587, 590, 609, 615, 621, E: 156, 157, 159, 165, 169, 170, 175, 178, P).

Reșița. Clasa X. Popescu Alex. Dan (377, 379, 390, 406, 413, 416, 426, 433, 436, 437, 445, 446, 456, 457, 461, 467, 499, 502, 532, 530, 554, 555, 576, 582, 583, 587, 589, 593, 602, 604, 608, 615, 618, 621, E: 109, 137, 148, 149, 189, P).

Roman. Clasa X A. Moraru Victor (307, E: 67, 68, 69, 70, 71, 76, 79, 83, 91). Clasa XI. Ciobanu Constantin (265, 290, 296, 297, 333, 351, 374, 377, 379, 382, 386, 400, 401, 413, 415, 419, 426, 426, 427, 439, 454, 459, 463, 468, 480, 482, 485, 486, 488, 499, 505, 507, 508, 517, 518, 520, 523, 536, 537, 541, 543, 560, 562, 563, 567, 574, 578, 587, 588, 591, 593, 601, 602, 603, 605, 611, 621).

Roșiorii de Vede. Clasa X. Miclăuș Vasile (315, 331, 332, 335, 339, 356, 380, 384, 393, 414, 417, 418, 419, 420, 421, 423, 434, 444, 449, 455, 468, 471, 479, 482, 486, 489, 491, 495, 497, 499, 530, 505, 509, 510, 512, 514, 515, 517, 518, 520, 522, 525, 528, 531, 533, 536, 537, 540, 541, 542, 545, 548, 550, 554, 559, 561, 563, 569, 571, 572, 573, 574, 578, 582, 583, 587, 591, 597, 600, 601, 603, 604).

Târgoviște. Clasa XI. Andreescu Constantin (429, 434, 516, 617, 518, 528, 543, 571, 574, 577, 578, 608, 611, 612, 617).

Târgul-Jiu. Clasa VIII. Râcă Gheorghe (480, 507, 508, 536, 539, 591, 601), Cosînschi Dragoș (615, 621, E: 174, 176, 179, 192,). Clasa XI B. Ciocârlie Gh. Gheorghe (505, 506, 536, 550, 576, 578, 604, 608, 621).

Timișoara. Clasa X. Hammer Ladislau (236, 242, 259, 264, 278, 280, 289, 290, 299, 307, 315, 322, 325, 351, 363, 369, 375, 383, 398, 401, 404, 410, 416, 427, 437, 444, 481, 484, 505, 506, 507, 518, 523, 528, 607, 621), Moacă Solomon (269, 351, 439, 454, 465, 468, 517, 536, 561, 658, 579, 604, 615). Școala medie elctrotehnică. Anul III. Matlak Ioan (317, 608, 609, 612, 615, 621).

Turnu-Măgurele. Găină F. Stelian) (329, 335,345, 372, 377, 379, 383, 457, 471, 482, 484, P). Clasa XI. Iota Victor (587, 588, 590, 591, 621, E: 137).

Turnu-Severin. Clasa XI. Sperdea N. Anton (401, 416, 454, 457, 466, 468, 474, 484, 499, 505, 514, 518, 525, 621, E: 105, 137, 138, 142, 148, 157, 160, 161, 163, 175, 176, 192), Zaharescu Marius (375, 445, 483, 512, 517, 528, P).

Vaslui. Benehea A. (507, 354, 567, 570, 608, 618, E: 156, 158, 160, 161, 165, 173, 175, 176, P).

★

Redactarea problemelor. Pe aceeași foaie de formatul caietului obișnuit, se va rezolva câte o singură problemă. Soluția să fie însoțită de numărul și enunțul problemei. Se poate scrie în continuare și pe contrapagină; iar dacă soluția necesită figură, se va desena cu îngrijire și se va anexa. Nu se vor trimite soluțiile mai multor probleme pe aceeași foaie.

Rezolvitorul va scrie cu cerneală la fiecare soluție, numele, școala clasa și localitatea. Soluțiile trimise să nu fie copiate unele după altele.

Se mai primesc soluții și la poblemele propuse în anul 1952 și nerezolvate încă în paginile revistei, începând cu numărul 500 pentru mediu și numărul E. 150 pentru elementar.

Problemele ce se propun de către colaboratorii revistei să fie clar compuse și însoțite de soluții, să fie personale și nu luate din cărți sau reviste.

PREMIEREA REZOLVITORILOR

In urma unei clasificări a rezolvitorilor de probleme, evidențiații mai distinși vor primi premii, din partea Revistei Matematice și Fizice.

Pentru verificarea și alcătuirea tabelului de clasificarea rezolvitorilor, aceștia sunt rugați să-și întocmească și să trimită redacției, în plicul cu probleme rezolvate, câte o listă, în care să treacă problemele rezolvate, arătând pagina unde au fost anunțați în Revista Matematică și Fizică anul II numerele 11 și 12 și anul III numerele 1-10, adică toată activitatea dela Noembrie 1951 la Octombrie 1952.

REVISTA MATEMATICĂ ŞI FIZICA

ORGAN AL SOCIETĂŢII DE ŞTIINŢE MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R.

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

APARE SUB ÎNGRIJIREA UNUI SECRETARIAT DE REDACŢIE

REDACŢIA: STR. DIONISIE LUPU, 40. Parter. — BUCUREŞTI
RAIONUL STALIN

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică şi fizică a şcolilor, precum şi orice material informativ care ar interesa redacţia noastră se vor trimite pe adresa de mai sus

ABONAMENTE:

Tarif general ... ... *Lei 60*

Tarif redus pentru elevi, studenţi şi profesori ... ... *Lei 10*

Abonamentele se fac numai prin:

Centrul de Difuzare a Presei

Pentru Bucureşti: Str. Const. Mille Nr. 14 — Telef. 5.28.90

Pentru Provincie: Centrul de Difuzare a Presei din Capitalele Regiunilor sau Raioanelor — Banca de Stat în Contul C.D.P. Nr. 038.068

CĂRŢI APĂRUTE ÎN

EDITURA TEHNICĂ

* * * «*Lexiconul tehnic român*»
Vol. III literele I. — M
1.115 pag. — 127,50 lei

* * * «*Tabele şi formule matematice*»
402 pag. — 8,50 lei

T. S. BEZICOVICI:
«*Calcule aproximative*»
(trad. din l. rusă)
440 pag. — 21,46 lei

A. N. TUBERBILLER:
«*Probleme şi exerciţii de geometrie analitică*»
(trad. din l. rusă)
312 pag. — 17,98 lei

M. I. CORSUNSCHI:
«*Nucleul Atomic*»
(trad. din l. rusă)
354 pag. — 17,94 lei

N. V. EFIMOV:
«*Geometria superioară*»
(trad. din l. rusă)
544 pag. — 30,60 lei

N. P. TARASOV
«*Manual de matematici superioare*»
(trad. din l. rusă)
339 pag. — 11,90 lei

D. IOSUB
«*Matematica recreativă*»
160 pag. — 5,87 lei

I. I. ALEXANDROV
«*Probleme de construcţii geometrice*»
212 pag. — 9 lei

ÎNTREPRINDEREA POLIGRAFICĂ Nr. 4. — C. 2433.

Lei 1. —

KAT

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE ȘI FIZICE DIN R.P.R.

E 1426

BIBLIOTECA I. D. T.

REVISTA MATEMATICĂ și FIZICĂ

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

TULAJDONA

★

Trăiască scumpa noastră patrie,
liberă și independentă,
Republica Populară Română!

★ ★ ★

DECEMBRIE 1952

12

EDITURA TEHNICĂ

REVISTA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

SUMARUL:

		Pag.
1.	*Cinci ani dela proclamarea Republicii Populare Române*	285
2.	*Despre noţiunea de infinit în matematici, de Acad. Prof. S. Stoilov*	287
3.	*Canalul Volga-Don după A. N. Ahutin (urmare)*	292
4.	*Construirea cu mijloace proprii a unui model de aparat astronomic*	296
5.	*Chestiuni de examen*	297
6.	*Probleme rezolvate (281, 513, 517, 518, 523, 525, 528, 536, 537, 539, 540, 541, 542, 545)*	298
7.	*Exerciţii şi probleme propuse*	303
8.	*Exerciţii propuse pentru învăţământul elementar* ...	305
9.	*Pagina rezolvitorilor de probleme*	306
10.	*Tabla de materii*	310

12

ANUL III DEC. 1952

4819
BIBLIOTECA I.D.T.

REVISTA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ
PUBLICAŢIE PENTRU TINERET A SOCIETĂŢII DE MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ DIN R. P. R.
Anul III, Nr. 12 Decembrie 1952

Országos Műszaki Könyvtár TULAJDONA
ELLENŐRIZVE 1953

CINCI ANI DELA PROCLAMAREA REPUBLICII POPULARE ROMÂNE

La 30 Decembrie 1952 poporul muncitor din patria noastră, a sărbătorit proclamarea Republicii Populare Române. Au trecut cinci ani de când clasa muncitoare condusă de partidul ei a înlăturat monarhia, cel mai puternic sprijin al reacţiunii interne şi reazimul principal al tuturor uneltirilor imperialiste. Monarhia a însemnat pentru poporul muncitor din ţara noastră, un permanent mijloc de asuprire a sa de către regimurile burghezo-moşiereşti în cărdăşie cu imperialiştii străini şi o cetate a reacţiunii de unde porneau fel de fel de măsuri care ţineau în loc orice năzuinţe de progres. Inapoierea economică şi culturală a ţării, mizeria maselor, analfabetismul, constituie numai o parte din rezultatele domniei regilor şi a guvernelor burghezo-moşiereşti. Independenţa ţării, cu care se lăudau regimurile trecute, nu era decât o minciună sfruntată. Ţara noastră a fost înfeudată de către moşieri, capitalişti, şi cu sprijinul monarhiei, intereselor ţărilor imperialiste. In timpul regimului monarhic au fost împuşcaţi zeci de mii de muncitori şi ţărani numai pentrucă îşi cereau dreptul la viaţă; alţii umpleau temniţele pentrucă luptau cu dârzenie pentru apărarea intereselor clasei muncitoare. In primul război imperialist, deslănţuit şi cu sprijinul monarhiei din ţara noastră au fost măcelăriţi 800.000 de oameni din patria noastră, iar în războiul de jaf şi cotropire dus împotriva Uniunii Sovietice au pierit 500.000 oameni. Aceasta este doar o ilustrare palidă a ceeace a fost regimul blestemat al celui mai mare dintre moşieri, regele. Ani şi ani de-a-rândul, a mocnit în sufletele oamenilor muncii ura faţă de acest moşier sprijinitor al capitalismului şi exploatării. Ani de zile, clasa muncitoare din ţara noastră, condusă de partid, a luptat pentru ziua istorică de 30 Decembrie 1947. Numai după eliberarea ţării noastre de către glorioasele armate sovietice, poporul muncitor izgonind dela conducerea statului partidele reacţionare, a devenit posibilă izgonirea regelui şi a clicei sale. Inlăturarea monarhiei şi proclamarea Republicii Populare Române a însemnat actul istoric al trecerii depline a puterii de stat în mâinile clasei muncitoare.

In cei cinci ani care au trecut dela instaurarea Republicii, sub conducerea hotărîtă şi înţeleaptă a Partidului Muncitoresc Român şi cu sprijinul moral şi material al Marii Uniuni Sovietice, poporul muncitor a început construirea bazelor socialismului în patria noastră. Cu elan crescând în muncă, prin folosirea celor mai bune metode de lucru, cu sprijinul permanent a înaltei experienţe sovietice, poporul nostru muncitor a făcut din primele planuri de stat, etape însemnate pe drumul industrializării socialiste a ţării. Măreţul proces de socializare a agriculturii care trezeşte satele la o viaţă nouă, luminoasă, îmbelşugată, este în curs de desfăşurare. Industrializarea ţării şi socializarea agriculturii constituie pietrele de temelie pentru măreaţa clădire a patriei noastre socialiste.

Industria noastră este astăzi de două ori mai puternică decât sub regimul burghezo-moşieresc. Peste tot se construiesc noi fabrici şi uzine, noi mine, sonde petrolifere, se deschid mereu şantiere noi. Ţara noastră, în trecut aservită de burghezie şi moşierime imperialiştilor, a fost împiedicată să aibă o industrie desvoltată. In prezent, îndrumată de partid, ea şi-a creat o puternică industrie a construcţiei de maşini. Se desvoltă necontenit industria electrotehnică. Pentru prima oară se fabrică în ţara noastră, strunguri şi rulmenţi, motoare cu explozie puternice, instalaţii electrotehnice, turbogeneratori, tractoare, maşini agricole grele.

Industria noastră construieşte maşini şi utilaj pentru siderurgie, pentru industria chimică şi alimentară, produce maşinile necesare industriei uşoare, utilajul fabricilor de ciment. Ea asigură în întregime locomotivele şi vagoanele necesare economiei noastre şi a început să producă şlepuri, remorchere şi alte vase. Au fost construite în ţara noastră numeroase cuptoare Martin, cuptoare electrice pentru oţel, a intrat în funcţiune un nou laminor de ţevi. A fost terminat un mare furnal, au intrat în fucţiune fabrica de electrozi «Carbochim», fabrica de tananţi «Argeşul», termocentralele «Gh. Gheorghiu-Dej» şi «Ovidiu II» etc.

Lucrările pentru construirea Canalului Dunăre-Marea Neagră înaintează cu spor, se construeşte hidrocentrala «Vladimir Ilici Lenin» dela Bicaz, a intrat în funcţiune marele combinat «Casa Scânteii» şi încă multe alte lucrări sunt terminate sau sunt în curs de terminare. Ţi se umple inima de bucurie şi de mândrie patriotică pentru marile realizări ale poporului nostru care construeşte o patrie nouă fără burghezie şi împotriva ei.

La sate, în locul plugului de lemn şi a uneltelor de muncă înapoiate din timpul regimului burghezo-moşieresc, statul nostru de democraţie populară a pus la îndemâna ţărănimii muncitoare peste 10.000 tractoare, mii de maşini şi unelte agricole, seminţe selecţionate, credite, etc. Aproape 400 sate au fost electrificate. Numeroşi ţărani muncitori s'au unit de bunăvoie în întovărăşiri agricole şi gospodării colective. Recolta medie la hectar în gospodăriile colective este cu 20—25% mai mare decât în gospodăriile individuale.

A crescut şi creşte treptat nivelul de trai al celor ce muncesc. Referindu-ne numai la sectorul cultural constatăm realizări la care nici nu puteai visa în regimul burghezo-moşieresc sprijinit de către monarhie. Masele muncitoare dela oraşe şi sate, ţinute veacuri de-a-rândul în întuneric de clasele exploatatoare, se ridică la lumină, învaţă cu sete, îşi însuşesc cuceririle ştiinţei. Dreptul la învăţătură şi cultură prevăzut de Constituţia R.P.R. este asigurat tuturor cetăţenilor. Zeci de mii de elevi şi studenţi, fii ai oamenilor muncii, primesc burse de stat şi locuiesc în căminele statului. Analfabetismul, rămă-

ştiţă a regimului burghezo-moşieresc, e pe cale de a fi lichidat. In ultimii ani s'au deschis sute de şcoli noi de toate gradele, zeci de institute, universităţi şi facultăţi. Ştiinţa, arta, literatura au luat o largă desvoltare. Partidul şi guvernul acordă tot sprijinul şi toată preţuirea oamenilor de ştiinţă şi cultură. Premiile de stat acordate de curând ilustrează în mod deosebit această înaltă preţuire. Printre cei premiaţi se află şi profesori de matematică şi de fizică. Profesorii universitari Caius Iacob, Elie Carafoli au primit premii pentru lucrările lor de mecanică şi aerodinamică; deasemeni şi colectivul de autori ai cursului de «Geometrie Analitică» pentru lucrarea lor deosebită.

Tineretului i-au fost deschise cele mai largi perspective de către regimul de democraţie populară. El are putinţa deplină de a preface în realitate cele mai îndrăsneţe visuri. Tineretul are acces către orice şcoală la care năzuieşte şi pentru care s'a pregătit temeinic, el se poate adăpa din plin din ştiinţa sovietică, ştiinţa cea mai înaintată. In activitatea sa de însuşire a ştiinţei în şcoli, tineretul din patria noastră este ajutat de profesori, de organizaţia U.T.M. şi de către societăţile ştiinţifice. Societatea de Ştiinţe Matematice şi Fizice din R.P.R., creată din iniţiativa partidului nostru, a înfiinţat cercuri de matematică şi fizică unde se adâncesc cunoştinţele căpătate în clasă. Publicaţiile «Societăţii» vin deasemeni în ajutorul tineretului dornic să-şi însuşească cunoştinţele de matematică şi fizică. Numărul elevilor colaboratori ai Revistei Matematice şi Fizice a crescut mult în cei trei ani de apariţie a acestei publicaţii. In anul acesta Revista Matematică şi Fizică a evidenţiat un număr de 130 colaboratori. Pentru activitatea deosebită a unor colaboratori, Societatea de Ştiinţe Matematice şi Fizice din R.P.R. va acorda premii.

Acestea constituie încă unul din multiplele aspecte ale ajutorului pe care îl dă partidul şi guvernul tinerilor din şcoli pentru stimularea activităţilor lor.

Măreţe sunt perspectivele patriei noastre care construeşte socialismul. Ele se desprind mai ales din planul nostru cincinal, planul de electrificare şi recentele hotărâri ale partidului şi guvernului privind reconstrucţia oraşelor ţării noastre. Industria va fi în 1955 de cinci ori mai puternică ca în 1948, producţia industriei de construire a maşinelor va fi de trei ori mai mare decât în anul 1950, iar producţia de maşini-unelte de cinci ori mai mare decât în 1950. Vor căpăta viaţă noi întreprinderi vor intra în funcţiune noi hidrocentrale şi termocentrale. Se va construi combinatul siderurgic şi metalurgic din Moldova, care va da anual peste un milion de tone metal. Vor fi valorificate resursele naturale de gaze prin construirea unor combinate de industrie chimică, etc. Vor începe să circule vapoare pe Canalul Dunăre-Marea Neagră; hidrocentrala «V. I. Lenin» va trimite energie electrică în toate direcţiile. Va începe construcţia metroului din Bucureşti şi a canalului Bucureşti-Dunăre.

Va lua un mare avânt munca de reconstrucţie, sistematizare şi desvoltare a oraşului Bucureşti, Capitala Republicii noastre dragi. Se vor construi noi oraşe moderne, socialiste. Va începe construcţia centrului universitar din Bucureşti şi a unor institute de învăţământ superior în diferite oraşe ale ţării, etc. Intinse terenuri vor fi irigate. Din apele Canalului Dunăre-Marea Neagră vor fi irigate 120.000 hectare, iar alte 170.000 hectare vor fi redate agriculturii prin indiguiri. Se vor împăduri 390.000 hectare. Se vor înfiinţa noi S.M.T.-uri, vor fi electrificate 2.000 sate, etc. Toate aceste dovedesc cât de mari sunt puterile creatoare ale poporului nostru muncitor, care, eliberat de exploatare, îşi făureşte o viaţă nouă sub conducerea înţeleaptă a partidului şi cu ajutorul frăţesc al Uniunii Sovietice. Măreţe sunt şi perspectivele pentru tineretul nostru. Oricine îşi dă seama că la împlinirea acestor planuri va lua parte activă acest tineret. Este o fericire şi o cinste de a face parte din rândurile constructorilor unei astfel de vieţi. Tineretul trebue să-şi însuşească cunoştinţele de bază pentru tehnică: matematica şi fizica. Pentru aceasta, el trebue să înveţe temeinic pentru a-şi însuşi cât mai multe cunoştinţe, să participe activ la cercurile de matematică şi fizică, să colaboreze la publicaţiile care îl ajută să se califice cât mai bine.

Nu trebue să uităm niciun moment că trebue să apărăm cu orice preţ construcţia vieţii noastre fericite. Imperialiştii hrăpăreţi râvnesc la bunurile noastre, ei vor să ne subjuge pentru a ne exploata. Demascarea continuă a acestor ţeluri mârşave este o datorie permanentă.

Patria noastră trebue să devină cât mai puternică. Oamenii muncii au dovedit cu ocazia alegerilor de deputaţi pentru Marea Adunare Naţională că ei sunt alături de Partidul Muncitoresc Român, care conduce cu fermitate construcţia vieţii noastre fericite şi întărirea continuă a patriei. Cele 10.353.469 voturi dela 30 Noembrie 1952, pentru candidaţii Frontului Democraţiei Populare dovedesc cu prisosinţă acest lucru. Tineretul din şcoli trebue să se pregătească cât mai bine ideologic şi profesional pentru a putea face parte cu cinste din rândurile constructorilor unei patrii puternice şi fericite.

Lupta pentru pace, sub steagul ridicat de Marea Uniune Sovietică, în frunte cu tovarăşul Stalin, este sarcina cea mai de seamă pentru fiecare dintre noi. Cucerind pacea prin luptă, prin munca de întărire permanentă a patriei noastre, noi apărăm viaţa noastră fericită, luminată de învăţătura geniilor omenirii muncitoare, Lenin şi Stalin.

DESPRE NOŢIUNEA DE INFINIT IN MATEMATICI[1)]

de Academician S. Stoilov
Directorul Institutului de Matematici
al Academiei R. P. R.

Tovarăşi,

In cadrul Lunei Prieteniei Româno-Sovietice, Societatea de Ştiinţe Matematice şi Fizice a organizat această serie de prelegeri pentru elevii ultimelor clase ale şcolilor medii, prelegeri care au de scop să vă atragă către ştiinţele matematice, să vă facă să reflectaţi poate mai adânc asupra unor aspecte ale unor noţiuni care vă sunt deja lămurite, cu care lucraţi de ani de zile şi care cuprind elemente mult mai multe decât s'ar părea la prima vedere.

Matematica are reputaţia de a fi *o ştiinţă abstractă* şi ea este abstractă, abstractul însă nu înseamnă, cum de multe ori greşit s'a înţeles, rupt de realitate. Insuşi termenul de abstract ne aminteşte originea noţiunii şi vrea să ne arate că noţiunile acestea numite abstracte s'au format prin abstragerea unor proprietăţi, dela considerarea unor fapte sau fenomene reale. Abstractul îşi are originea în real şi abstractul este util, este fecund. Toate noţiunile care sunt la baza matematicii, oricât de abstracte ar părea ele, îşi au origina în realitatea noastră materială, în realitatea materială a lumii şi toate îşi trag seva şi puterea lor de aici.

In lecţia de astăzi vom vorbi de una din cele mai abstracte noţiuni pe care le-aţi întâlnit în lecţiile de matematici din clasele pe care le-aţi urmat, despre *noţiunea de infinit.* Pentru a pătrunde această noţiune, pentru a-i înţelege toată importanţa, este necesar să-i urmărim oarecum formaţia. Nu vreau să spun că să-i urmărim desvoltarea istorică; lucrul ar fi interesant, dar nu aceasta formează obiectul lecţiei de astăzi. Pentru a-i pătrunde adevăratul înţeles, trebue să urmărim geneza ei, formaţia ei, şi lucrul acesta va fi relativ uşor, pentrucă dvs. aţi întâlnit de mai multe ori, în lecţiile care vi s'au predat în liceu, noţiunea de infinit, sub mai multe forme. Tocmai, eu aş vrea să vă arăt că între aceste forme de infinit, între care există bineînţeles o legătură profundă, din moment ce le-aţi denumit cu acelaş termen, există totuşi şi o deosebire şi această deosebire, pusă în relief, o să vă facă să înţelegeţi mai bine că acest infinit nu are nimic misterios, că acest abstract este tras din real, că a provenit din contemplarea realităţii, din examinarea realităţii. Formaţia lui constitue prima din cele trei etape ale cunoaşterii stabilite de Lenin: 1) contemplarea vie; 2) abstracţia — şi din aceasta face parte noţiunea formată de infinit; şi 3) întoarcerea la concret prin aplicaţiuni.

Aţi auzit probabil de definiţia pe care *Engels* a dat-o matematicii, subliniind că matematica, ca şi orice altă ştiinţă adevărată, este o ştiinţă a naturii. Engels a definit matematica ca *ştiinţa raporturilor cantitative şi a formelor spaţiale.* Această definiţie este dată acum trei sferturi de veac şi ea este perfect valabilă şi astăzi, dar nu numai valabilă, ba chiar *conformă cu desvoltarea matematicii celei mai moderne.* Acei din dvs. care veţi urma sau care vă veţi specializa la facultatea noastră de matematică, sau poate la facultăţi de matematică similare, veţi constata în cursul studiilor dvs. cum tendinţele cele mai moderne ale matematicii actuale caută să pună în relief din ce în ce mai aparent această definiţie fundamentală pe care a dat-o Engels.

★

1. *Infinitul în Aritmetică.*

In lecţiile dvs. pe care le-aţi urmat în şcoala medie, matematica o împărţiţi în general în două ramuri: o ramură care se ocupă în mod mai deosebit de numere, care va să zică de cantităţi şi de raporturi cantitative; aritmetica prelungită prin algebră şi ulterior prin analiză, pe de o parte — şi o altă ramură a matematicii care se ocupă de formele spaţiale — adică geometria.

In aritmetică, ca şi în geometrie, dvs. aţi întâlnit noţiunea de infinit. Eu aş vrea mai cu seamă (şi aceasta va fi obiectul principal al lecţiei de astăzi) să vă arăt în mod mai amplu, cum *noţiunea de infinit nu se prezintă exact la fel în aritmetică şi în geometrie.* In aritmetică, putem să spunem că avem de a face cu noţiunea primară de infinit. Prima noţiune care se formează în mintea noastră derivă, incontestabil, din faptul că noi avem această conştiinţă că oricărei colecţii de elemente, oricât de numeroase, putem să-i adăogăm un alt element, putem face o operaţie care se poate repeta nelimitat, adică totdeauna încă odată. Faptul acesta, tras din experienţa noastră a lumii exterioare, ne dă

[1)] 12/X a. c., a avut loc deschiderea cercului de matematici al elevilor din capitală. Urmând exemplul din Uniunea Sovietică unde cei mai de seamă matematicieni ţin prelegeri la cercurile de elevi, Societatea de Ştiinţe Matematice şi Fizice a invitat pe Academicianul S. Stoilov, directorul Institutului de Matematică al Academiei R. P. R. să ţină prelegerea de deschidere. Reproducem aici această prelegere.

conștiința noțiunii de infinit. Acest lucru este ilustrat prin șirul numerelor naturale 1, 2, 3, ... n, adică a numerelor cărora li se mai zice și numere întregi și pozitive.

In formarea șirului numerelor naturale, esențialul este *succesiunea.* Dat fiind un număr natural n, oricine din dvs. va înțelege ce înseamnă $n + 1$, adică numărul obținut adăogând încă o unitate numărului n; n corespunde cu o colecție de obiecte, de numere naturale. Deoarece operațiunea aceasta se poate continua, adăogându-se încă o unitate, și așa mai departe, ea ne va duce la șirul infinit al numerelor naturale. Avem aici *un prim aspect* al noțiunii de infinit.

Dar noțiunea de infinit mai intervine tot în aritmetica elementară și pentru nevoile practice ale noastre când construim așa zisele fracții ordinare sau numere raționale. Considerând un obiect, în loc să-l înmulțim, în loc să-l reproducem la infinit, îl dividem. Pe lângă succesiunea obținută prin adăogiri sau repetări nelimitate ale unui obiect, avem și procedeul diviziunii. Această diviziune se poate face prin împărțirea unei unități în mai multe părți egale. O parte se exprimă prin formula $\frac{1}{n}$, în care se arată că întregul a fost împărțit în n părți egale. Adăogând la n încă o unitate, avem $n + 1$ la numitor: $\frac{1}{n+1}$.

Prin urmare, prin diviziune se obține un alt șir de numere:

$$\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \ldots$$

Dacă $\frac{1}{n}$ este considerat ca o unitate, putem repeta necontenit operațiunea adăogirii unui element identic și atunci avem:

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n} = \frac{p}{n}$$

de p ori.

Astfel se nasc așa zisele fracții ordinare, care se traduc în practică astfel: în loc să avem unitatea 1, considerăm unitatea care s'a format din împărțirea lui 1 la n, adică a n — a parte din unitatea primitivă și pe aceasta o reproducem de p ori. In modul acesta se formează numerele raționale.

Iată, că, întocmai ca în formarea numerelor întregi pozitive, în formarea numerelor raționale, intervine deasemenea repetiția unei operațiuni primitive și de aici noțiunea unui anumit infinit, *infinitul primar.*

2. *Infinitul în Geometrie.*

Ce se petrece în geometrie? Și aici se vorbește de infinit, dar *în alt sens*, într'un sens apropiat dar puțin diferit. In geometrie, se consideră dreapta, cercurile și diverse figuri plane. Pentru studiul aprofundat al acestor figuri, ele sunt considerate a fi formate din puncte. Punctul nu corespunde în mod perfect unei realități. Este o realitate transformată pentru ușurarea raționamentului nostru, însă utilă, pentrucă această abstractizare, această idealizare a noțiunii de punct real este trasă din realitate. Dacă cineva ar fi creat puncte fără să aibă nici o imagine a punctului în realitate, aceasta n'ar fi fost util nimănui. Pentru studiul figurilor geometrice, noi considerăm aceste figuri ca fiind formate din puncte luate într'un număr infinit de ori.

Fiecare dintre dvs. admite că o linie cuprinde o infinitate de puncte, de asemenea o figură din plan și așa mai departe.

Intre aceste două noțiuni de infinit, există asemănări, dar și deosebiri. După ce ni s'a format noțiunea despre infinitatea de puncte care formează dreapta și de infinitatea de numere care formează șirul numerelor naturale, avem tendința să confundăm aceste două feluri de infinit, ceeace ar putea duce la concluzii greșite.

Pentru a vă pune în gardă contra acestor greșeli și pentru a vă arăta adevărata natură a noțiunii de infinit, o să dăm o definiție care o să vă arate că *putem face în primul rând o distincție fundamentală între două specii de infinituri.*

2. *Mulțimi numerabile.*

Am spus la început că noțiunea noastră de infinit derivă din considerarea unei colecții de obiecte din lumea reală și din această conștiință pe care o avem trasă tot din experiența noastră, că totdeauna putem mări colecția adăogându-i încă o unitate. Astfel s'a născut șirul numerelor naturale pe care-l vom numi șirul (1).

(1) $\qquad 1, 2, 3, 4, \ldots n, \ldots$

Există alte infinituri pe care, comparându-le cu acest șir, le putem pune în *corespondență biunivocă* cu el. Să presupunem că avem o mulțime infinită de elemente (drepte, figuri, numere, ființe matematice sau chiar din afara matematicii formând o mulțime infinită) și că ele sunt de așa natură încât le putem împerechea cu numerele din șirul (1). Așa de exemplu, numerele

$$1, 2, 3, \ldots$$

se vor putea împerechea respectiv cu elementele mulțimii

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

așa încât fiecărui număr să-i corespundă un singur element din mulțimea noastră și numai unui singur,

și reciproc oricărui element din rândul al doilea să-i corespundă un număr de sus.

Cu alte cuvinte, am format perechi, fiecare pereche fiind constituită din câte un număr natural și un element al mulțimii noastre, așa fel încât orice număr natural să figureze într'o pereche și numai în una, și orice element al mulțimii noastre să figureze de asemenea într'o pereche și numai într'o pereche. O asemenea împerechere se chiamă o corespondență biunivocă.

O astfel de mulțime infinită, cum este mulțimea A formată din totalitatea elementelor a, ai cărei elemente pot fi puse în corespondență biunivocă cu numerele naturale, se numește o mulțime *numerabilă*, adică o mulțime care se poate număra, elementelor ei li se poate da câte un număr de ordine. Șirul numerelor (1) este deci o mulțime numerabilă-tip, fiindcă elementele fiecărei mulțimi numerabile se pot asocia cu elementele acestei mulțimi.

Dar mai sunt și alte mulțimi numerabile. Dacă iau din numerele $1, 2, 3, \ldots n$ numai numerele pare, adică numai o parte din ele, formez o altă mulțime și anume:

$$2, 4, 6, \ldots 2n, \ldots .$$

După cum vedeți aceasta este o mulțime tot numerabilă, ale cărei elemente pot fi asociate cu elementele șirului (1) și se poate spune că ea cuprinde același număr infinit de elemente. Aceasta este o expresie foarte periculoasă, utilă dar periculoasă dacă nu o înțelegem bine. O parte din colecția noastră poate fi pusă în corespondență biunivocă cu colecția întreagă. Dacă avem însă o colecție de 10 elemente și alegem din ea numai 7 elemente, atunci niciodată nu vom putea forma perechi din cele 7 elemente cu cele 10 elemente inițiale, în felul cum am asociat elementele din mulțimea A cu numerele naturale. Vedeți deci că există o deosebire fundamentală între o mulțime infinită și una finită.

Un alt exemplu de mulțime numerabilă este următorul: In loc să considerăm numerele întregi, să considerăm numerele formate cu o zecimală:

$$0{,}1 \quad 0{,}2 \quad 0{,}3 \ldots 0{,}9 \quad 1 \quad 1{,}1 \quad 1{,}2 \ldots$$

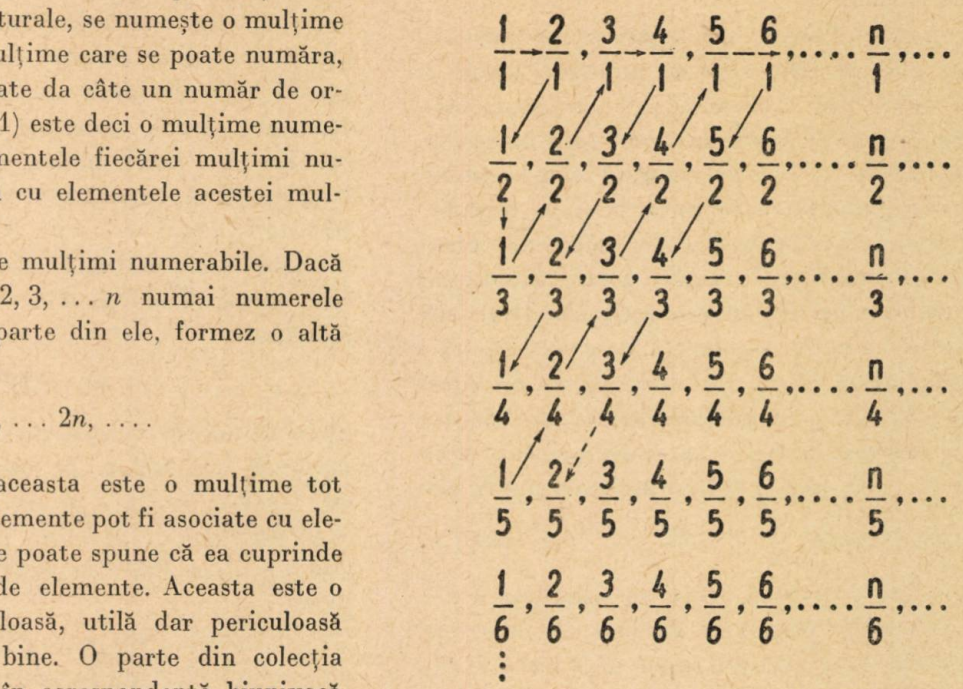
adică, pe lângă numerele întregi, să considerăm și numerele care cuprind un număr întreg de diviziuni ale unității împărțită în zece părți. Toate numerele acestea formează și ele o mulțime numerabilă. Aceasta este evident, căci nu avem decât să facem ca primul număr din (1) să corespundă cu primul număr din acest șir, al doilea cu al doilea și așa mai departe. Este clar că dacă mergem mai departe, adică din sutime în sutime, o să dăm iarăși peste o mulțime numerabilă:

$$0{,}01 \quad 0{,}02 \quad 0{,}03 \ldots$$

Putem deduce de aici că toate numerele zecimale exacte formează mulțimi numerabile.

Dar mai mult decât atât, să considerăm *toate fracțiile ordinare*, nu ca mai înainte fracții de un anumit fel. O să vedem că *mulțimea lor este tot o mulțime numerabilă.*

Pentru aceasta, formăm tabloul următor:



In rândul întâiu figurează toate numerele întregi, în rândul al doilea, toate fracțiile cu numitorul 2, și așa mai departe. Continuând în felul acesta, obținem cu siguranță toate fracțiile ordinare. Fracția $\frac{17}{39}$ de exemplu, este al 17-lea termen din rândul al 39-lea. Acest tablou poate fi așezat și el într'un șir, poate fi și el numerotat cu câte un singur indice pentru fiecare din elementele lui. N'am decât să citesc fracțiile din ordinea indicată prin săgețile din tablou și să atribui fiecăreia un număr de ordine. Obținem astfel șirul:

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$$

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad 6, \quad 7, \quad 8, \quad 9, \quad 10, \ldots$$

In modul acesta, toate numerele raționale intervin la un moment dat și fiecăruia i se atribue un

indice, iar totalitatea acestor numere formează tot o mulțime numerabilă [1]).

Vedeți dar, că această noțiune de infinit numerabil este destul de vastă. Ea cuprinde foarte multe colecții infinite.

4. *Mulțimi nenumerabile.*

Dar se naște întrebarea: nu cumva orice infinit este numerabil? Tocmai aici este chestiunea mai importantă pe care vreau s'o subliniez, și anume: *nu orice infinit este numerabil.* Am să arăt că infinițiturile cu care aveți de a face în geometrie nu sunt numerabile și aceasta le va distinge fundamental de infinitul primar.

Pentru exemplificare, am să iau chiar punctele de pe o dreaptă. Am spus că punctele de pe o dreaptă sunt infinite ca număr. Nu se poate stabili *o corespondență biunivocă între șirul numerelor naturale* 1, 2, 3, ... *și toate punctele care se găsesc pe o dreaptă sau chiar pe un segment de dreaptă*, de exemplu, pe segmentul (0,1), adică ale cărui extremități sunt 0 și 1. Toate aceste puncte se pot caracteriza printr'o scriere zecimală. Dvs. știți că așa zisele numere zecimale exacte se caracterizează prin aceea că au un număr finit de cifre. Numerele celelalte, lungimile celelalte, etc. se exprimă în scrierea noastră zecimală printr'o serie infinită de cifre. Aceste fracții zecimale pot fi periodice, ca în cazul $\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$, dar există și numere ca $\pi = 3{,}14159$, care nu sunt fracții zecimale periodice. Observăm în plus că numerele zecimale exacte se pot scrie și ele dacă este nevoie cu număr infinit de zecimale. De exemplu: 0,53 se poate scrie: 0,52999 ... cifra 9 repetându-se la infinit, aceasta este exact același lucru cu 0,53. In felul acesta, fiecare număr cuprins între 0 și 1 se poate scrie și cu o infinitate de zecimale.

După aceste precizări este suficient să arătăm că *nu este posibil să stabilim o corespondență biunivocă între șirul numerelor întregi* 1, 2, 3, ... *și numerele zecimale.*

Demonstrația este foarte ușoară, ea se face prin reducere și aceasta într'un singur fel, iar în chestiunea care interesează, punctele segmentului (0,1) pot fi înlocuite prin numere zecimale nesfârșite.

[1]) Dacă vrem să ne mărginim numai la fracțiile ordinare propriu zise, luate fiecare câte o singură dată, n'avem decât să eliminăm în prealabil din tablou toate fracțiile reductibile și să citim numai cele rămase în ordinea indicată prin săgeți. Obținem;

$$\begin{array}{cccccccccc} \frac{1}{2}, & \frac{1}{3}, & \frac{3}{2}, & \frac{2}{3}, & \frac{1}{4}, & \frac{1}{5}, & \frac{5}{2}, & \frac{4}{3}, & \frac{3}{4}, & \frac{2}{5}, \ldots \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, \ldots \end{array}$$

Să presupunem că cineva ar fi stabilit o asemenea corespondență. Aceasta înseamnă că toate fracțiile zecimale s'au putut așeza una sub alta, într'un tablou ca următorul:

1. 0,46312805...
2. 0,59143264...
3. 0,2175048 ...
4. 0,1646312 ...

.....

(Cifrele din care sunt formate aceste fracții zecimale sunt luate la întâmplare, ca exemplu). Acest tablou nu poate conține toate fracțiile zecimale posibile! Vom arăta în adevăr că se poate construi o fracție zecimală x deosebită de toate fracțiile din acest tablou, și anume: ca primă cifră zecimală a numărului x, luăm o cifră deosebită de 4, de pildă 5; ca a doua cifră, luăm o cifră deosebită de 9, de pildă 0; ca a treia cifră, luăm o cifră deosebită de 7, de pildă 5; și așa mai departe [1]). Numărul

$$x = 0{,}508\ldots$$

astfel format se deosebește cu siguranță de toate numerele din tablou. In adevăr, el diferă de primul număr, deoarece prima sa cifră este 5, nu 4; el diferă sigur de al doilea număr din tablou, deoarece a doua cifră a sa este 0, nu 9; și așa mai departe.

Prin urmare, am putut construi un număr x care nu este conținut în tabloul nostru. Urmează că toate numerele cuprinse între 0 și 1, deci punctele segmentului (0,1), nu pot fi puse în corespondență biunivocă cu șirul numerelor naturale.

De aici, tragem concluzia că *mulțimea punctelor de pe un segment de dreaptă* și cu atât mai mult depe dreapta întreagă *este o mulțime infinită care nu este numerabilă, este o mulțime infinită nenumerabilă.*

Acum, se poate merge și ceva mai departe și se pune întrebarea: Mulțimea punctelor dintr'un patrat, dintr'o porțiune din plan, este oare un infinit mai mare decât infinitul punctelor de pe o dreaptă sau nu? Voiu arăta că mulțimea punctelor unui patrat poate fi pusă în corespondență biunivocă cu mulțimea punctelor unui segment de dreaptă. Și cum se poate demonstra acest lucru?

Să luăm patratul cu latura 1. Dacă luăm două din laturile sale ca axe de coordonate, coordona-

[1]) Cifrele se aleg astfel ca x să nu conțină cifra 9 repetată la infinit.

tele unui punct M din interiorul lui vor fi niște fracții zecimale infinite:

$$x = 0, a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots$$

$$y = 0, b_1 b_2 b_3 b_4 \ldots$$

Putem face să-i corespundă pe axa Ox punctul P de abscisă

$$0, a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3 \ldots$$

P este situat în interiorul segmentului (0,1), căci acest număr este mai mic ca 1. Reciproc, fiecărui punct de pe segmentul (0,1) de abscisă

$$0, c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6 \ldots$$

putem face să-i corespundă punctul M de coordonate

$$x = 0, \quad c_1 c_3 c_5 \ldots$$

$$y = 0, \quad c_2 c_4 c_5 \ldots$$

și acest punct este situat în interiorul patratului, căci x și y sunt mai mici ca 1.

Așa dar, corespondența biunivocă între punctele patratului de latura 1 și punctele segmentului de dreaptă (0,1) este realizabil. Prin urmare, nu putem spune că numărul infinit al punctelor unui patrat este mai mare decât numărul infinit al punctelor de pe latura sa [1]). Același raționament se poate face cu numărul punctelor unui cub.

Lucrul acesta a apărut matematicienilor cam pe la 1870. Un matematician german, Schoenfliess, a spus atunci într'o conferință a sa că geometrii au simțit că se clatină pământul sub picioarele lor, pentrucă era vorba de noțiunea de dimensiune, oarecum veche, care părea legată de mulțimea punctelor care sunt cuprinse în figura respectivă.

Segmentul de dreaptă (0,1) are o dimensiune, pe când patratul cu latura 1 are două dimensiuni, aceasta înseamnă oarecum că patratul conține mai multe puncte ca latura sa, pe când din demonstrația noastră rezultă că pătratul are același număr de puncte ca și latura sa.

[1]) Demonstrația, pentru a fi riguroasă, are nevoie de unele precizări, pe care prelegerea le evită pentru a scoate în relief ideea principală.

S'a văzut că ideia că pătratul ar conține mai multe puncte decât latura sa era greșită, era o idee sugerată de contemplarea lumii, nu însă suficient analizată. Când s'au adâncit lucrurile, s'a văzut că nu este așa. Și totuși, era aici ceva real. Mergând mai departe, s'a arătat că *o corespondență biunivocă între punctele patratului și punctele segmentului de dreaptă*, dacă se poate realiza în condițiunile de care am vorbit, *nu se poate realiza în condițiunile continuității*, nu se poate realiza așa încât la variațiuni foarte mici de pe segment să corespundă variațiuni foarte mici depe patrat. Prin urmare, *noțiunea de dimensiune*, care era veche în mintea noastră, *este legată în fond de noțiunea de corespondență biunivocă și bicontinuă.* Este vorba de depășirea unui raționament printr'o contradicție. La un moment dat a apărut un rezultat contradictoriu, ceva care contrazicea însăși noțiunea de dimensiune. Totuși, din această contradicție aparentă, a rezultat ceva fecund, cum s'a văzut din cercetările ulterioare, căci s'a lămurit noțiunea de dimensiune.

* * *

Cam acestea erau ideile esențiale pe care vroiam să le expun. Dacă se poate trage o concluzie, aș putea spune că, atunci când aveți de a face cu colecții infinite, trebue să vă feriți să le tratați ca pe niște cantități finite. Când avem de a face cu un infinit, să nu punem în raționamentul nostru decât cele ce conține efectiv noțiunea cu care avem de a face.

Poate că aceste considerațiuni sumare pe care le-am făcut vor incita pe unii din dvs. ca să se intereseze mai departe de aceste chestiuni, să le adâncească, poate că unii din dvs. vor veni la facultatea de matematică după ce vor fi terminat școala medie, ca să se specializeze în acest domeniu. Trebue să subliniez însă că, în niciun caz, nu trebue să considerați noțiunea aceasta abstractă de infinit, ca un lucru misterios, pentrucă nu are niciun mister. Noțiunea de infinit în matematici nu are nimic comun cu infinitul idealiștilor, ea este trasă din realitate și trebue considerată ca atare în toate aspectele ei și nu trebue denaturată.

CANALUL VOLGA-DON

(După articolul Prof. A. N. Ahutin (Moscova))

din Fizika v Şcole Nr./2/1952

(Urmare)

Indeplinirea lucrărilor de construire a Canalului Volga-Don într'un termen scurt nu a fost posibilă decât cu mecanizarea de aproape sută la sută a lucrărilor, cu introducerea unei tehnici puternice, cu folosirea celor mai noi maşini de construcţie, a unor mecanisme de putere colosală şi a unei productivităţi mărite, prin maximum de electrificare posibilă şi prin automatizarea proceselor de producţie.

Producţia Uniunii Sovietice stăpânind ea însăşi o tehnică înaintată, a asigurat pe deplin construcţia tuturor maşinilor de acest gen. Toate aceste noi şi noi maşini se scurgeau neîntrerupt pe canalul Volga-Don. Constructorii Canalului Volga-Don au adaptat noi modele de maşini, depăşind de câteva ori productivitatea ce li s'a hotărît şi au ridicat în mod continuu ritmul producţiei lor.

Pentru fiecare caz izolat se alegea cel mai potrivit mod de mecanizare a lucrărilor, astfel ca să se obţină cele mai bune rezultate în raport cu termenele datele şi cu calitatea execuţiei.

Hidromecanizarea electrificării sovietice este cel mai productiv şi cel mai eftin mijloc de producţie, la scară mare, a lucrărilor de pământ în general şi a stăvilarelor de pământ înalte, în special din gresie nisipoasă mărunţită.

La construcţia stăvilarului dela Ţimliansk au lucrat drage puternice plutitoare, cu o capacitate de producţie dela 3000—5000 m³/ oră de pământ muiat (pulpa). La o concentraţie mijlocie a pulpei de 1:10 aceste drage sunt capabile să dea în corpul stăvilarului 300—500 m³ de sol dens pe oră. O dragă de 500 m³ poate să scoată între 2—2,5 milioane metri cubi de sol pe an, să-l deplaseze la o distanţă de 2—3 km prin tuburi şi să-l depună apoi în corpul stăvilarului. O dragă de acest gen înlocueşte munca a aproximativ 10.000 săpători şi a 5000 cai cu căruţe.

Aceste drage au fost create de către specialiştii sovietici şi de către muncitori, sub conducerea lui B. M. Şcundin, luareat al premiului Stalin. Maşinile de dragat lucrează prin absorbţia solului printr'o pompă puternică, care fărămiţează solul sub apă, printr'un mecanism rotativ special — freza.

Solul fărămiţat de freză, diluat cu apă, este absorbit de o pompă centrifugă şi se pompează (presându-se) într'o conductă cu presiune, care are nişte plutitori speciali la suprafaţa apei sau se aşează direct pe pământ. Construirea stăvilarelor de pământ prin metoda hidromecanizării a fost bine însuşită de către hidrotehnicienii sovietici.

Stăvilarul se construeşte prin metoda aluvionării bilaterale. Pământul muiat este împins la locul de muncă prin două conducte, dispuse pe nişte stâlpi metalici sau de lemn şi apoi aruncat dealungul marginilor viitorului corp al stăvilarului. Particulele mai mari de pământ fărămiţat se depun direct în apropierea tuburilor. Porţiunile mai mărunte se strâng, venind din toate părţile împreună cu apa către centrul (axa) corpului stăvilarului. Apa este trecută prin locuri speciale, iar în centrul corpului stăvilarului se depun fracţiunile cele mai mici de pământ, care posedă sub aspectul unei depuneri compacte, cea mai mică permeabilitate pentru apă.

Există o metodă de aluvionare unilaterală cu folosirea unei conducte, ba chiar metoda aluvionării cu apă, pentru care, în fluviu, se creează o zonă de încetinire a cursului apei, în care se produc aluviunile.

Hidromecanicienii sovietici folosesc aluviunile stăvilarelor şi în timpul iernii ceeace este o victorie ştiinţifico-tehnică imensă a constructorilor sovietici, pentru care fapt, lucrările de construcţie au fost posibile şi în timpul iernii.

Succesele repurtate de constructorii sovietici sunt vădit de clare privind construcţia canalului Volga-Don în general şi, în particular, construcţia stăvilarelor de aluviuni.

La 21 Septembrie 1951, Donul, prin stăvilarul dela Ţimlianskaia, a fost scos din matca sa de veacuri printr'o deschizătură vremelnică, lăsată special în corpul betonat al stăvilarului. Liberându-se de curentul Donului, albia trebuia să fie barată cât se poate mai repede cu un stăvilar de pământ. Lucrările au continuat fără întrerupere, neţinându-se seama de frig şi totul s'a terminat printr'un succes deplin. Pe la mijlocul lunii Decembrie 1951, lucrările pentru stăvilarul de pământ dela Ţimlianskaia au fost terminate.

Lucrările de săpături şi nivelări se fac cu excavatoare gigantice cu şenile, având capacitatea de 6—10 m³ (fig. 1).

Buldozere (fig. 3) și excavatoare cu numeroase cupe execută nivelarea fundului și a feţelor.

Un succes grandios al tehnicii sovietice îl constitue excavatoarele electrice gigantice — dragele E. Ş. 14/65 cu o cupă de o capacitate de 14 m³ și cu o lungime de săgeată de 65 m (fig. 2) create de inginerii și muncitorii uzinei din Urali pentru construcţia de maşini grele, de sub conducerea lui B. I. Satovschi, laureat al premiului Stalin.

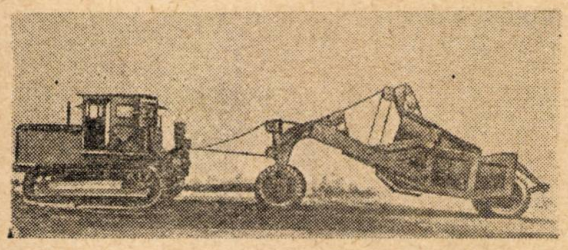


Fig. 1

Aceste excavatoare lucrează pentru săpături de o adâncime mai mare de 12 m, — unul pe porţiunea liniei de separaţie a apelor canalului Volga-Don şi cel de-al doilea la săparea canalului principal de irigaţie a Donului pe linia despărţitoare a apelor Don-Saliscom la intrarea canalului în tunel.

Escavatorul E. Ş. 14/65 încarcă până la 22 tone de pământ dela o adâncime de 25—30 m şi îl transportă cu ajutorul unui braţ lung de 65 m până la o distanţă de 120 m de locul încărcării. In timp de 24 ore, el poate scoate până la 16.000 m³ pământ. Intr'un an, o astfel de maşină este capabilă să îndeplinească o normă de 2,5—3 milioane metri cubi lucrări de pământ.

Deplasarea acestei maşini se realizează printr'un mecanism original — cu ajutorul a patru cilindri hidraulici şi a două skiuri — cu stâlpi metalici goi în interior, cu lungimea de 16 m şi cu lăţimea de 2,5 m fiecare. In timpul funcţionării escavatorului, skiurile sunt ridicate şi întreaga maşină se sprijină pe pământ pe o cutie metalică rotundă de sprijin cu un cadru, cu diametrul de 14 m şi cu înălţimea de 1 m.

Când maşina şi-a terminat lucrul într'un loc şi trebue să fie împinsă mai departe, atunci intră în acţiune cilindrii hidraulici. La început, cu ajutorul unei perechi de cilindri, se trag înainte skiurile de sprijin şi se coboară pe pământ. Apoi cilindrii principali sprijinindu-se pe skiuri, mută pe ele întreaga greutate a maşinei şi ridică o singură margine a cutiei rotunde de sprijin — cadrul. Apoi escavatorul, sub acţiunea unor cilindri auxiliari, sprijinindu-se pe skiuri, se mişcă înainte împreună cu rama de sprijin. Când escavatorul se opreşte pe un loc nou, cilindrii principali lasă escavatorul în jos pe rama de sprijin şi ridică skiurile în sus.

Executând succesiv astfel de « paşi », gigantica maşină se poate deplasa într'o oră, cu 200 m.

Intreaga conducere a acestui gigant, înalt cât o casă cu trei etaje şi care cuprinde 48 electromotoare, având o putere totală de aproximativ 7000 kW, se face din cabina unui operator-conducător, cu ajutorul unor mijloace de control şi a comutatorilor electrici. Munca pentru săparea

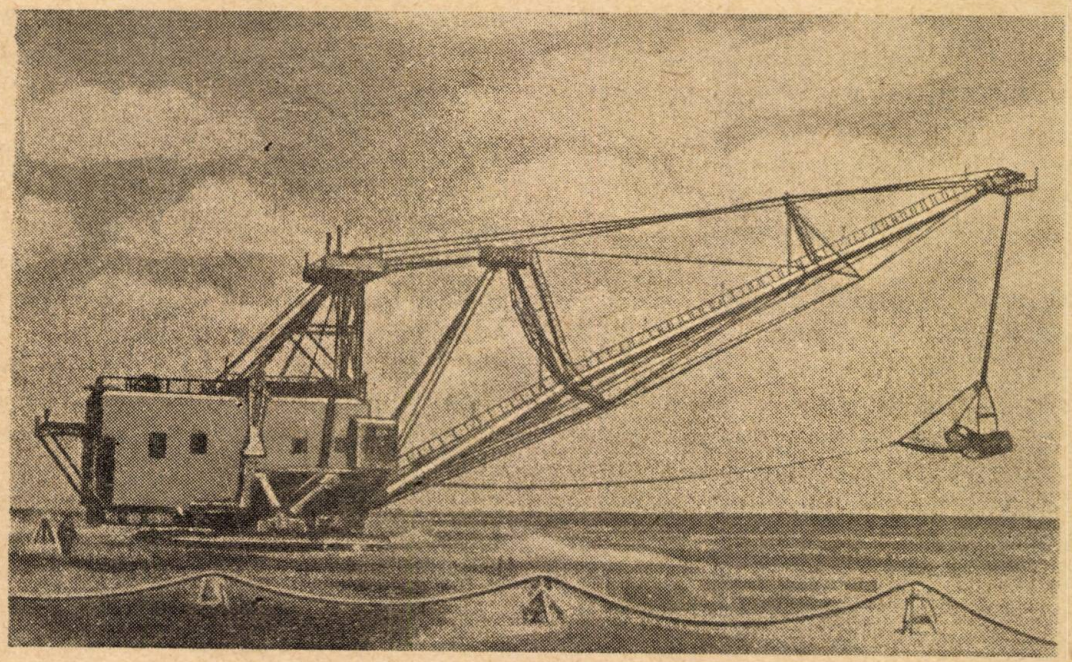


Fig. 2

terenului cu acest escavator remarcabil, se execută în modul următor. Braţul împreună cu întreaga maşină, se întoarce şi se opreşte pe locul de săpare. Slăbindu-se funia de ridicare, cupa se lasă la pământ. După aceasta se conectează un troliu electric care comandă un cablu legat de cupă. Troliul întinde cablul şi sileşte cupa să se târască pe pământ. Cupa pătrunde cu dinţii în teren şi se umple treptat cu pământ. După aceasta, cablul se slăbeşte, se înfăşoară pe troliu şi cupa umplută cu pământ este ridicată la înălţimea necesară. Se conectează un mecanism turnant şi maşina învârtindu-se pe cadrul turnant, transportă cupa la locul descărcării. Se slăbeşte cablul din nou, iar cupa se descarcă, maşina se întoarce în poziţia ei iniţială şi operaţiile se repetă ciclic.

Nu ne oprim la descrierile îndeajuns de cunoscute ale excavatoarelor gigantice şi a celor cu şenile, cu cupa 3,4 m³, cu ajutorul cărora se execută toate lucrările de bază, ci mai adăugăm doar câteva date asupra celorlalte maşini de săpat folosite la construcţia canalului Volga-Don.

La executarea micilor săpături şi la construcţiile de zăgazuri, o folosire largă a avut-o screperul, care dă o productivitate înaltă la un cost coborît. Astfel, un screper de şase metri cubi extrage până la 500 m³ pământ şi e deservit de un tractorist. Screperul înlocueşte munca a 60 muncitori-săpători şi a 60 căruţe cu cai.

Screperul este alcătuit dintr'o cupă metalică de fundul căreia se fixează trei cuţite: unul pentru tăierea terenului în direcţie orizontală şi două laterale — pentru tăierea terenului în plan vertical.

Deplasarea screperului se realizează cu un tractor C-80 (la o cupă cu capacitatea de 10—15 m³ trebue să se folosească tracţiuni mult mai puternice).

Munca screperului se produce în modul următor: conducătorul tractorului apropiindu-se de locul de săpare, cu ajutorul unui troliu special lasă cupa la pământ. Prin mişcarea screperului, cuţitele taie pământul, care intră în cupă. După umplerea cupei, conducătorul acţionează roţile troliului şi lasă în jos un capac special care fereşte pământul de împrăştiere; cupa se ridică (în situaţia de «transport»), screperul se transportă până la locul descărcărei, troliul deschide capacul şi, ridicând fundul cupei, împrăştie pământul. Apoi screperul se întoarce din nou la locul de lucru.

Astfel de screpere lucrează deobiceiu în coloane de câte 4—5 maşini. Tractoarele (de tracţiune) trag după ele maşinile după o curbă oarecare închisă (cerc sau curbă în formă de opt) dela locul săpării pământului, până la locul descărcării lui, executând continuu toate operaţiile de muncă enumerate mai sus.

O maşină de manevră simplă, însă foarte utilă, este buldozerul (fig. 3), care se foloseşte pe o scară largă la toate obiectivele de construcţie ale canalului Volga-Don pentru săparea egală a terenului după curăţirea acestuia de mărăcini, pentru umplerea rupturilor, a gropilor, pentru netezirea fundului canalelor secundare, etc.

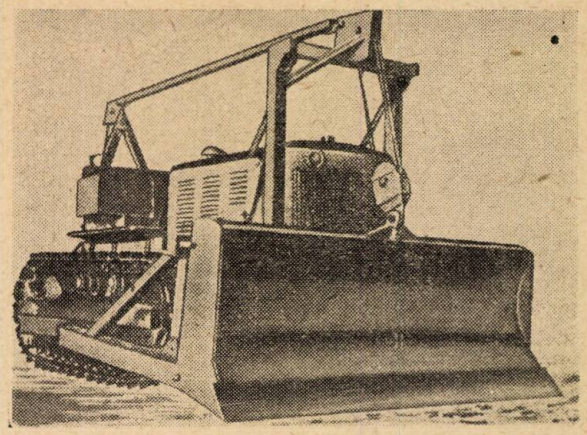


Fig. 3

Grupe de buldozere se pot întâlni şi pe fundul canalelor aproape gata pregătite, unde execută curăţirea definitivă a fundului şi a plantelor, pe baraj, pe fundurile barajelor şi la centralele hidroelectrice.

Incă mai bine şi complect sunt mecanizate lucrările de betonare, adică: pregătirea betonului, distribuirea lui la locul de muncă şi aşezarea în zidărie. Sub conducerea lui V. T. Feodorov, laureat al premiului Stalin, s'au construit de către inginerii sovietici uzine de beton de diferite puteri. La nodul hidraulic dela Ţimlianskaia lucrează cea mai mare dintre aceste uzine. Aceasta este o clădire cu patru etaje, cu o înălţime de mai bine de 30 m. In etajul superior — prin transporturi electrice cu benzi — sunt aduse părţile componente ale betonului: pietrişul şi nisipul. Cimentul se mişcă printr'un tub cu ajutorul aerului comprimat. Tot aici intră apa în bazine speciale. In timpul iernii, materialele de construcţie se încălzesc în prealabil până la 40°, iar apa este încălzită până la 60°. Dela etajul al patrulea, materialele se coboară la cel de al treilea etaj, unde sunt aşezaţi dozatorii — nişte vase de mărime potrivită — atârnate de o pârghie cu greutăţi. Cu aceasta, pârghia de greutăţi este reglată mai dinainte în vederea

determinării greutății unui material sau altul, a cimentului și a apei, în funcție de betonul necesar și a consistenței lui la un moment dat. De îndată ce intră într'un dozator sau altul — cantitatea necesară de material, orificiul de ieșire, care dă într'o încăpere, se închide în mod automat și se deschide zăvorul dozatorului, vărsând porția de material exact cântărită într'o altă încăpere inferioară prevăzută cu o pălnie, care transportă materialul într'unul din malaxoare pentru beton, care se află la etajul al doilea. Malaxoarele de beton au fiecare un volum de 2400 litri dispuse în formă de cruce, pentru ca să fie comodă descărcarea betonului într'o încăpere comună.

Conducerea tuturor agregatelor uzinei se face de către un operator dela un pupitru de control prin apăsarea unor butoane. O astfel de mecanizare a muncii și automatizare a conducerii scurtează în mod esențial necesitățile forței de lucru și pregătește mase mari de beton de calitatea dorită și cu o mare precizie.

Uzinele de beton dau în decurs de 24 ore aproximativ 10.000 m³ de beton.

Dela uzine și până la locul de împachetare, betonul este transportat prin mijloace diferite în căldări, montate pe platformele unor locomotive Diesel sau pe automașini. La ecluze, betonul este distribuit prin pompele de beton sau în căldări de 10 tone.

Pompa de beton se compune dintr'un cilindru cu piston, în care este absorbit betonul gata preparat și trimis mai departe prin presiunea creată de piston în corpul de pompă, pe o conductă cu o lungime până la 300 m. Pompele de beton pompează până la 20 m³ beton pe oră. Simplitatea și siguranța funcționării unui astfel de mecanism i-a creat o mare popularitate printre constructori. Pentru construcția giganticelor noduri hidraulice ale Volgăi, — a celor dela Kuibâșev și dela Stalingrad — s'au confecționat pompe de beton cu o productivitate de 40 m³ pe oră.

Condensarea betonului, ce se pune în zidăria construcției, a fost întotdeauna o operație foarte grea și obositoare. La construcția nodului hidraulic dela Țimlianskaia și a ecluzelor canalului, această operație se face prin niște mecanisme speciale, prin vibratori. Partea de bază a unui vibrator este un motor electric, de axa căruia este fixat un excentric greu. Motorul este așezat pe un postament masiv în formă de placă sau cilindru. Vibratorul se lasă în jos pe betonul așezat numai atunci, când electromotorul este pus în mișcare și, dând naștere vibrațiilor, condensează masa de beton, repede și bine.

Pentru construcția zidăriilor de beton armat — a ecluzelor, a barajelor deversoare de apă, care servesc la construcțiile clădirilor centralelor hidrolectrice — se naște necesitatea introducerii în beton a unei mari cantități de armatură. Inainte, montarea, împletirea și legarea acestei armaturi răpea mult timp lucrătorilor calificați în armaturi. Acum, acest proces este mecanizat la maximum. La locul de muncă se distribue armături metalice gata confecționate, ferme-carcase, sudate la uzinele speciale de armături.

Astfel s'au mecanizat aproape toate muncile și procesele de producție ale marilor șantiere. Aceasta reduce foarte mult cantitatea forței de muncă necesară, ridică de mai multe ori productivitatea muncii și ameliorează calitatea muncii.

Totodată se crează cadre experimentate de mecanicieni tineri sovietici, de constructori, de hidromecanizatori, de electricieni, de operatori, cari să poată comanda mecanisme complicate electrice și automate.

Șantierul s'a transformat într'o școală care călește aceste cadre calificate, lucrează o rețea de școli stahanoviste, de cursuri, de școli tehnice, de institute serale. Muncitorii tineri își însușesc cu succes noutățile tehnicii sovietice și își aduc contribuția, dovedind măiestrie prin ridicarea productivității muncii și înalta calitate a lucrărilor.

In mâinile lor, mașinile sovietice depășesc cu mult puterea pentru care au fost proiectate. Astfel, brigada escavatorului gigantic fiind condusă de tânărul inginer Anatol Uskov, a reușit aproape să dubleze productivitatea mașinei și a știut în toată această perioadă — să pregătească cadre de meșteri pentru un al doilea escavator, care lucrează pe canalul principal depe Don. Meșterii I. Hudiacov și I. Ermolenco, fiind în fruntea brigăzilor escavatoarelor gigantice îndeplineau în fiecare lună norma de 160—180%. Brigada de tineri comsomoliști a escavatorului «Uraleț», de sub conducerea lui N. Ivanov, a mărit productivitatea mașinei lui cu 60.000 m³ până la 80.000 m³ pe lună.

Screperiștii-comsomoliști V. Mohov, V. Stigliț, A. Kașin și alții au depășit normele de mai sus cu 200%. Buldozerista Lidia Petrova a triplat producția mașinei ei.

Unul din cei mai buni operatori ai uzinei comsomoliste de beton, tov. Leșenco, își îndeplinea în mod sistematic norma cu 130—140%, producând un beton de calitate excepțională. Echipagiile de tineri comsomoliști a marilor pompe de dragare: V. Mihailov și V. Hliust au depășit deasemenea de două ori și mai mult productivitatea normală a

mașinilor lor, introducând diferite perfecționări în metodele de lucru, în economia de energie electrică și așa mai departe.

La 15 Ianuarie 1952, construcția nodului hidraulic dela Țimlianskaia a intrat în ultima fază hotărîtoare: în acea zi s'au închis aproape toate orificiile lăsate temporar în corpul barajului și a început umplerea rezervorului dela Țimlianskaia cu apa din Don.

Oamenii sovietici de talent, înarmați cu cunoștințele tehnicii noi, animați de simțământul patriotismului sovietic și de entuziasmul creator, au construit Canalul Volga-Don, sub semnul scurtării termenelor indicate.

PENTRU CERCURILE DE ELEVI

CONSTRUIREA CU MIJLOACE PROPRII A UNUI MODEL DE APARAT ASTRONOMIC

Elevii din cercurile care se ocupă cu studiul astrelor, se lovesc de o mare greutate — le lipsesc aparate și modele.

Multe aparate pot fi confecționate de către însuși membri cercurilor, cu mijloace materiale foarte reduse. Aparatele construite — deși neprecise — pot constitui totuși un ajutor prețios în studierea astronomiei.

O greutate deosebită o au elevii la început când e vorba să asimileze elementele astronomiei sferice. Aci, numai prin folosirea schițelor executate la tablă, nu putem asigura întotdeauna o bună înțelegere a noțiunilor.

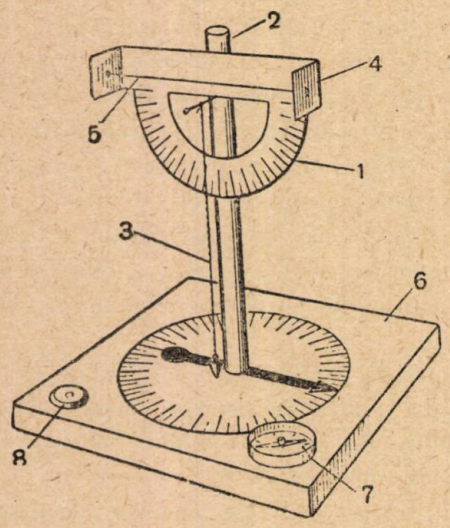


Fig. 1

Pentru determinarea coordonatelor orizontale se poate folosi un aparat foarte simplu, construit cu mijloace proprii, legând un goniometru orizontal cu un altimetru. Se obține în felul acesta un model primitiv a aparatului cunoscut sub numele de *instrument universal.*

Confecționarea aparatului

O parte a aparatului se confecționează dintr'o fâșie de tablă subțire cu lungimea de 40—45 cm. Capetele acestei fâșii se îndoaie în unghiu drept, iar în părțile îndoite se fac, cu un cui, două orificii foarte mici. De bucata de tablă, cu capetele îndoite, se fixează raportorul 1. De centrul raportorului se fixează firul cu plumb 3. Prin orificiul 4 se trece o sârmă subțire 5, menită să ajute la urmărirea poziției astrului. Altimetrul astfel construit se fizează de un pivot vertical, dându-i-se totodată posibilitatea de rotire. Pivotul, de care se prinde în partea de jos o săgeată — se fixează pe suportul 6, având o așezare care-i permite să se rotească rămânând perpendicular pe planul postamentului. Pe suport, care se confecționează dintr'o scândurică, se desenează un cerc gradat dela 0—360°, se fixează busola 7 și o nivelă 8.

Manipularea aparatului

Se verifică orizontalitatea postamentului cu ajutorul nivelei și se orientează linia care indică 0°

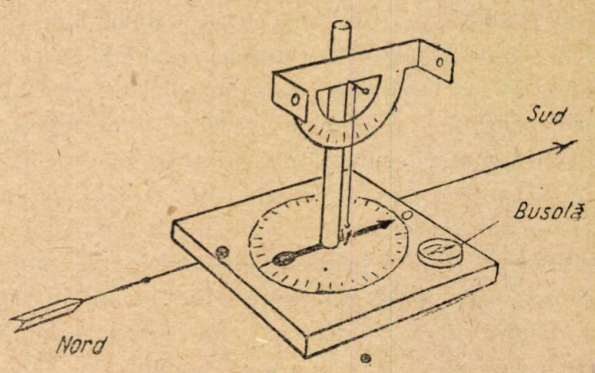


Fig. 2

pe cercul gradat dealungul meridianului locului. Acolo, unde nu există posibilitatea folosirii liniei meridiane, se va folosi direcţia acului magnetic aşezată dealungul liniei nord-sud al busolei.

Privind la un astru prin orificiul 4, firul cu plumb va indica pe raportorul altimetrului înălţimea astrului, iar săgeata va indica pe postament azimutul.

Aparatul astfel construit este neprecis, dar se poate folosi cu succes pentru a ajuta pe membrii cercului astronomic să înţeleagă noţiunile de bază ale astronomiei sferice.

(Din Fizica v Şcole Nr. 5—1952)

CHESTIUNI DE EXAMEN[1)]

Date în August 1952 la admiterea în Institutul de Petrol şi Gaze din Bucureşti, facultăţile Utilaj, Foraj şi Tehnologie

708*. *Grupa I*

I. Să se calculeze:

a) Suma:

$$x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \ldots + nx^n$$

b) Termenul general din şirul de numere:

$x_0,\ x_1,\ x_2 \ldots, x_n$ unde $x_0 = a,\ x_1 = b$ şi

$$x_k = \frac{x_{k-2} + x_{k-1}}{2} \quad \text{pentru } k \geqslant 2.$$

II. Să se arate că într'un triunghiu dreptunghiu există relaţia:

$$\operatorname{cotg} \frac{B}{2} = \frac{a+c}{b}$$

şi reciproc, un triunghiu în care există această relaţie, este dreptunghic.

III. In triunghiul ABC fie O punctul de întâlnire al mediatoarelor; H ortocentrul; $A'B'C'$ mijloacele laturilor BC, AC, AB, A'', B'', C'' mijloacele segmentelor AH, BH, CH. Să se demonstreze că $A'A'' = B'B'' = C'C''$ şi că segmentele $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$, OH sunt concurente într'un punct care e la mijlocul fiecăruia.

709*. *Grupa II*

I. Să se rezolve ecuaţia:

$$\log\left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 = \log\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{m}\right) + \log \frac{m+10}{\frac{1}{m} + \frac{1}{10}}$$

şi să se discute.

II. Laturile unui triunghiu sunt:

$$a = x^2 - x + 1 \quad ; \quad b = 2x - 1 \quad ; \quad c = x^2 - 2x.$$

Să se arate că triunghiul există pentru valorile lui x superioare lui 2 şi că unghiul A este de 120°.

Să se arate apoi că $r_a - r = 3R$ unde r_a este raza cercului exînscris unghiului A, r raza cercului înscris şi R raza cercului circumscris.

III. Intr'un trapez isoscel baza mare este egală cu diagonala şi baza mică cu laturile neparalele. Să se afle unghiurile trapezului şi apoi baza mică, baza mare fiind dată, egală cu a.

710*. *Grupa III*

I. Fiind dată ecuaţia:

$$mx^2 - 2(m+1)x + 8 = 0$$

a) Să se detemine m astfel ca să avem:

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1\ x_2} > x_1 + x_2$$

b) Să se construiască ecuaţia care admite ca soluţii pe

$$x_1 + \frac{1}{x_2}, \quad x_2 + \frac{1}{x_1}$$

II. Să se facă calculabilă prin logaritmi expresia:

$$\frac{a}{\sin^2 \frac{A}{2}} + \frac{b}{\sin^2 \frac{B}{2}} + \frac{c}{\sin^2 \frac{C}{2}}$$

unde a, b, c, A, B, C, sunt elementele unui trunghiu.

III. Un trunchi de con cu bazele paralele este circumscris unei sfere de rază R. Să i se afle volumul ştiind că diferenţa dintre razele bazelor triunchiului de con este kR.

711*. *Grupa IV.*

I. Să se rezolve sistemul:

$$\sqrt[y]{9^x} = 243\ \sqrt[x]{27^y}$$

$$\sqrt[y]{5^x} = 5\ \sqrt[y]{25^{1-y}}$$

II. Să se verifice identitatea:

$$\frac{\sin(2a+b)}{\sin a} + \frac{\sin(a+2b)}{\sin b} - 4\cos(a+b) =$$

$$= \operatorname{cosec} a\ \operatorname{cosec} b$$

[1)] La chestiunile 708*—714* se primesc soluţii, fiind socotite ca probleme propuse.

III. Pe fiecare latură a unui triunghiu se construește un triunghiu echilateral. Se unește al treilea vârf al fiecăruia din aceste triunghiuri cu vârful opus al primului triunghiu. Să se arate că:

a) Cele trei drepte sunt egale.

b) Cele trei drepte se taie în același punct.

712*. *Grupa V*

I. Să se determine numerele p și q astfel ca ecuațiile:

(1) $px^2 - (ap - 4)\,x + 2a\,(p - 1) = 0$

(2) $(q - 1)\,x^2 - (a - 2)\,(q - 1)\,x + a\,(2q - 4) = 0$

să aibă aceleași rădăcini. După ce se determină p și q să se discute ecuația.

II. Să se rezolve ecuația trigonometrică:

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} 4x = 0$$

III. Să se construiască un triunghiu dreptunghic când se cunoaște raza cercului înscris și înălțimea coborîtă din vârful unghiului drept.

713*. *Grupa VI*

I. Să se rezolve ecuația:

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{x+1} + \sqrt{2x-5} - \sqrt{2x+10} = 0.$$

II. Să se demonstreze identitățile:

a) $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ = \dfrac{3}{16}$

b) $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ = \dfrac{1}{8}$

III. Fiind dat un trapez $ABCD$ de baze AB și CD fie E și F mijloacele laturilor BC și DA; H intersecția bisectoarelor unghiurilor A și D; K intersecția bisectoarelor unghiurilor B și C.

Să se demonstreze:

a) Că HK este paralelă cu bazele

b) $$FH = \frac{AD}{2}, \quad EK = \frac{BC}{2}$$

c) Să se găsească condiția ca cele patru bisectoare să fie concurente

714*. *Grupa VII*

I. Să se afle rația și numărul termenilor unei progresii aritmetice în care termenul al 9-lea și al 11-lea sunt date de cea mai mare și cea mai mică rădăcină a ecuației:

$$\frac{1}{2}\log 2 + \log \sqrt{x^2+4x+5} = \frac{1}{2}\left[\log (x^2-4x+5) + 1\right]$$

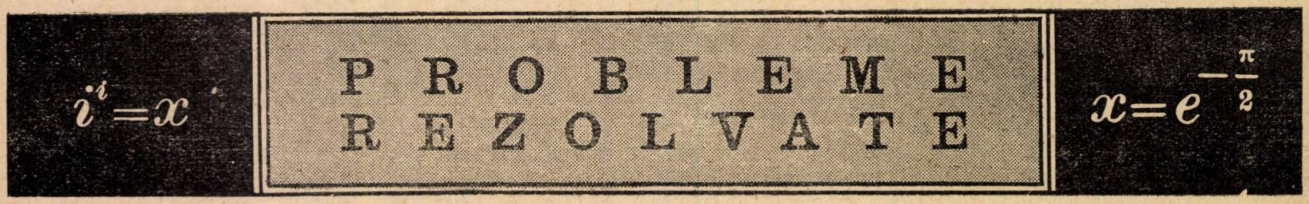
Se cere suma termenilor progresiei.

II. Să se facă calculabilă prin logaritmi expresia:

$$\frac{a\cos A + b\cos B - c\cos C}{a\cos A - b\cos B + c\cos C}$$

a, b, c, A, B, C, fiind elementele unui triunghiu.

III. Să se arate că dacă dintr'un punct situat pe cercul circumscris unui triunghiu ABC se coboară perpendiculare pe cele trei laturi, picioarele perpendicularelor sunt în linie dreaptă.



Problema 281

O lumânare la un metru distanță are magnitudinea — 14. La ce distanță se poate vedea această lumânare, cu cel mai mare telescop care vede stele până la mărimea + 22. Se va neglija absorbția atmosferică.

Călin Popovici

Soluție. Fie, în general, m și M, i și I, d și D respectiv magnitudinile, intensitățile luminoase și depărtările de observator ale lumânării, lângă observator și la distanța cerută. Avem:

$$i = 10^{-0{,}4\,m}; \quad I = 10^{-0{,}4\,M}$$

$$\frac{i}{I} = 10^{0{,}4\,(M-m)}$$

Insă

$$\frac{i}{I} = \left(\frac{D}{d}\right)^2, \text{ încât}$$

$$D = d \cdot 10^{0{,}2\,(M-m)}$$

In cazul problemei $d = 1$ m, $M = +22$,m $= -14$, deci distanța la care se poate vedea lumânarea este

$$D = 10^{7{,}2}\,m = 10^{4{,}2}\,\text{Km}$$

$$D = 15848{,}8\,\text{Km}.$$

Problema 513

Un motociclist aleargă cu 90 km/oră după un automobil și percepe clacsonarea acestuia ca un sunet de frecvență $\nu_1 = 481{,}1$ *Hz. După ce depășește auto-*

mobilul îi aude clacsonarea ca un sunet de frecvență $\nu_2 = 391{,}5$ *Hz. Cu ce iuțeală se mișcă automobilul și ce sunet emite clacsonul său?* ($V = 340$ *m/s*).

N. Stănescu

Soluție. Frecvența sunetului perceput de motociclist înainte de a depăși automobilul este

$$\nu_1 = \nu \frac{V + v}{V - u}$$

iar după depășirea automobilului

$$\nu_2 = \nu \frac{V - v}{V + u}$$

In cazul problemei după ce înlocuim valorile cunoscute și împărțim cele două relații obținem:

$$(V = 340 \text{ m/s}, \; v = \frac{90.000}{3600} = 25 \text{ m/s},$$

$$\nu_1 = 481{,}1 \text{ Hz}, \; \nu_2 = 391{,}5 \text{ Hz})$$

Deci:

$$\frac{481{,}1}{391{,}5} = \frac{365 \; (340 + u)}{315 \; (340 - u)}$$

de unde

$$u = 9{,}98 \text{ ms/s} \approx 10 \text{ m/s}$$

deci

$$\nu = 435 \text{ Hz}$$

frecvența corespunzătoare sunetului la_3.

Problema 517

Știind că trebue să tragem cu o forță de 80 *kg de capătul unei funii adusă pe după un scripete fix, montat la un plan înclinat, se cere greutatea* G *a corpului atârnat de celălalt capăt al funiei și apăsarea lui* P, *pe plan, dacă lungimea planului este de* 10 *m, iar înălțimea lui de* 8 *m.*

Virgil Atanasiu

Soluție. Forța de tracțiune este egală cu forța de alunecare a corpului pe planul înclinat. Ea este egală cu

$$Q = G \cdot \frac{h}{l} \quad , \quad \text{deci}$$

$$80 = \frac{8}{10} \cdot G \text{ sau } G = 100 \text{ Kg}$$

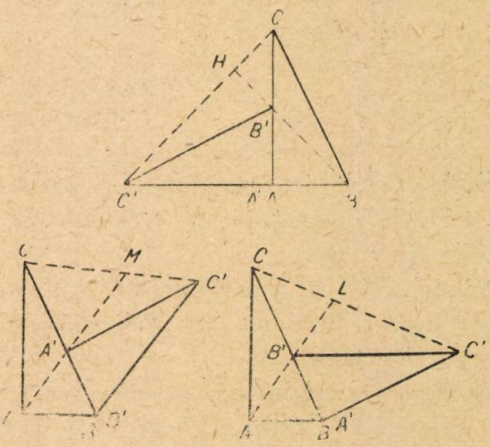
Din dreptunghiul forțelor avem

$$P^2 = G^2 - Q^2$$

$$P = 60 \text{ Kg forță.}$$

Problema 518

Două echere dreptunghice egale ABC *și* A'B'C' *se așează în pozițiile următoare:*



Să se demonstreze că:

a) HB' *este înălțime în triunghiul* $CC'B'$

b) MA' *este mediană în triunghiul* $CC'A'$

c) LB' *este bisectoare în triunghiul* $B'C'C'$

Gh. Bazacov

Soluție. *a)* Dreapta $C'B'$ este perpendiculară pe BC deoarece

$$\sphericalangle CBA + \sphericalangle B'C'A' = \sphericalangle CBA + \sphericalangle BCA = 90°$$

HB' trecând prin B' punctul de concurență a două înălțimi în triunghiul CBC', este de asemenea înălțime în același triunghi și deci și în triunghiul $CC'B'$;

b) Triunghiurile $A'BA$ și $CB'C'$ sunt isoscele și având unghiul dela vârf același ($\sphericalangle A'B'C' = \sphericalangle ABC$) unghiurile dela baze sunt egale între ele. Deci

$$\sphericalangle CA'M = \sphericalangle AA'B = \sphericalangle A'CM$$

Egalitatea unghiurilor MCA' și $CA'M$ este suficientă pentru a arăta că în triunghiul dreptunghic $CA'C'$, $A'M$ este mediană.

c) Unghiul $CB'A$ este exterior triunghiului isoscel ABB' și este deci egal cu

$$\sphericalangle CB'A = \sphericalangle A'AB' + \sphericalangle ABC$$

Mai avem

$$\sphericalangle C'B'A = \sphericalangle AB'B + \sphericalangle A'B'C'$$

Insă

$$\sphericalangle A'AB' = \sphericalangle AB'B \text{ și } \sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C'$$

Rezultă $\sphericalangle CB'A = \sphericalangle C'B'A$

Unghiurile $C'B'L$ și $LB'C$ având același suplement, $\sphericalangle CB'A = \sphericalangle C'B'A$ sunt egale, deci LB' este bisectoare în triunghiul $B'C'C$.

Problema 523

Să se construiască, numai cu rigla și compasul, expresia:

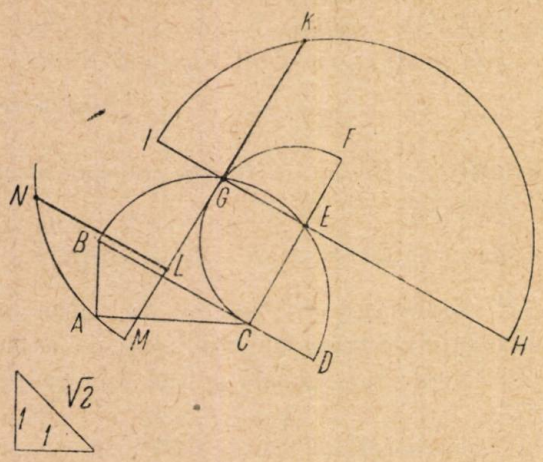
$$\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{\sqrt{\sqrt{5}}}}}$$

Paraschiv V. Titus
elev București

Soluție. Construim, mai întâi $\sqrt{5}$ ca ipotenuză a unui triunghi dreptunghic cu catetele egale cu 2 și 1. Fie $\sqrt{5} = BC$.

Prelungim BC cu o lungime $CD = 1$ (unitatea). Perpendiculara în C pe BD taie semicercul de diametru BD în E.

CE este $\sqrt{5}$; folosind proprietatea că în triunghiul dreptunghic înălțimea relativă la ipotenuză este medie geometrică între segmentele determinate de ea pe ipotenuză.



Prelungim CE cu $EF = 1$. Perpendiculara în E pe CF taie semicercul de diametru CF în G.

Pentru motivul de mai sus

$$EG = \sqrt[8]{5}.$$

Prelungim GE cu $EH = 3$ și EG cu $GI = 1$.

Perpendiculara în G pe IH taie semicercul de diametru IH în K

$$GK = \sqrt{3+\sqrt[8]{5}}.$$

Prelungim KG cu $GL = \sqrt{2}$ (pe care-l construim ca ipotenuză a triunghiului dreptunghic cu catetele egale cu unitatea) și GL cu $LM = 1$.

Perpendiculara în L pe MK taie semicercul de diametru MK în N.

LN este segmentul căutat.

Problema 525

Intr'un vas înfundat cu un dop, la temperatura t', *presiunea aerului este de* 72 *cm Hg. Incălzind vasul la temperatura* t'', *dopul sare, iar presiunea ajunge la* 96 *cm. Hg.*

Să se afle cele două temperaturi, suma lor fiind 140°.

N. Gaiu

Soluție. Folosim relația

$$P_{t''} = P_{t'}[(1 + \alpha (t'' - t')]$$

Inlocuind valorile cunoscute $P_{t''} = 96$ cm, $P_{t'} = 72$ cm, $\alpha = \frac{1}{273}$, obținem

$$t'' - t' = 68°,25$$

Avem deci de rezolvat sistemul

$$t'' + t' = 140°$$
$$t'' - t' = 68°,25$$

care dă

$$t' = 35°,875C \text{ și } t'' = 104°,125C$$

Problema 528

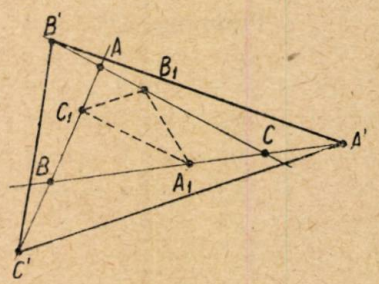
Pe laturile a, b și c *ale unui triunghi* ABC *se iau segmentele* $CA_1 = CA' = a_1$; $AB_1 = AB' = b_1$ *și* $BC_1 = BC' = c_1$, *unde* A_1, B_1, C_1 *sunt situate pe laturi, iar* A', B' *și* C' *pe prelungiri. Să se demonstreze că aria cuprinsă între triunghiurile* A'B'C' *și* $A_1B_1C_1$ *este dată de expresia*

$$2S\left(\frac{a_1}{a}+\frac{b_1}{b}+\frac{c_1}{c}\right)$$

unde S = aria ABC.

O. Sacter

Soluție. Dacă în două triunghiuri două unghiuri sunt egale sau suplimentare raportul ariilor celor două triunghiuri este egal cu raportul produselor laturilor ce formează aceste unghiuri.



Astfel

$$\frac{\text{aria } AB_1C_1}{S} = \frac{b_1(c-c_1)}{bc}; \quad \frac{\text{aria } CA_1B_1}{S} = \frac{a_1(b-b_1)}{ab}$$

$$\frac{\text{aria } BC_1A_1}{S} = \frac{c_1(a-a_1)}{ac}.$$ Deasemenea

$$\frac{\text{aria } AB'C'}{S} = \frac{b_1(c-c_1)}{bc}; \quad \frac{\text{aria } CA'B'}{S} = \frac{a_1(b+b_1)}{ac}$$

și

$$\frac{\text{aria } BC'A'}{S} = \frac{c_1(a+a_1)}{ac}$$

Din relațiile de mai sus găsim

$$\text{aria } A'B'C' - \text{aria } A_1B_1C_1 = 2S\left(\frac{a_1}{a}+\frac{b_1}{b}+\frac{c_1}{c}\right)$$

Problema 536

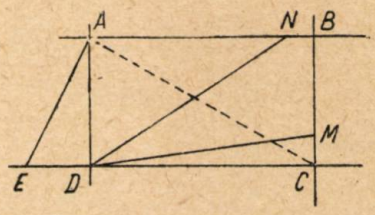
Se dă un dreptunghi ABCD. *Perpendiculara în* A *pe* AC *taie pe* CD *în* E. *Fie* M *şi* N *două puncte respectiv pe laturile* BC *şi* AB *astfel ca*

$$CM = BN = \frac{DE}{2}$$

Să se arate că triunghiul DMN *este isoscel.*

Petre Stanciu

Soluţie. Notăm $AB = CD = a$ şi $BC = AD = b$



In triunghiul dreptunghic EAC, avem

$$\overline{AD}^2 = ED \times DC,$$

Deci:

$$DE = \frac{b^2}{a}$$

Mai avem

$$\overline{DM}^2 = \overline{DC}^2 + \overline{MC}^2 = a^2 + \frac{b^4}{4a^2}$$

$$\overline{DN}^2 = AN^2 + \overline{AD}^2 = b^2 + \left(a - \frac{b^2}{2a}\right)^2 = a^2 + \frac{b^4}{4a^2}$$

Deci $DM = DN$.

Problema 537

Unghiul A *al unui triunghi* ABC *are* 120°. *Construim în exterior triunghiurile echilaterale* BCI, CAJ, ABK. *Să se arate că*

1°. *Cercurile circumscrise triunghiurilor* ABK, CAJ *sunt tangente exterior.*

2°. $\overline{AI} = \overline{AB} + \overline{AC}$.

N. N. Mihăileanu

Soluţie. (Vezi fig. 1 a articolului prof. N. N. Mihăileanu din numărul 3 al R.M.F., Martie 1952).

1°. Fie O, O' respectiv centrele cercurilor ABK, CAJ. Avem $OAB = 30° = \sphericalangle O'AC$, deci $\sphericalangle O'AO = 120° + 60° = 180°$. Deci cercurile ABK şi CAJ sunt tangente exterior.

2°. Patrulaterul $ABIC$ este inscriptibil. Cum distanţa unui punct depe cercul circumscris unui triunghiu echilateral la vârful cel mai depărtat al triunghiului este egală cu suma distanţelor punctului la celelalte două vărfuri avem

$$\overline{AI} = \overline{AB} + \overline{AC}.$$

Problema 539

Cu ajutorul unei prese hidraulice se ridică o greutate de 112,5 *t. Cu câţi centimetri trebue să coboare pistonul mic la fiecare apăsare, cunoscând că motorul întrebuinţat în acest scop are o putere de* 5 *C.P., randamentul este de* 0,75 *şi pistonul mic face* 100 *apăsări pe minut iar raportul suprafeţelor celor două pistoane ale presei este* 0,01.

Sălan Nicolae

Soluţie. Forţa care lucrează asupra pistonului mic este

$$0.01 \cdot 112{,}5\ t = 1{,}125\ t = 1125\ kg.$$

Fie x metri distanţa cu care pistonul mic coboară la fiecare apăsare. Lucrul efectuat prin deplasarea pistonului mare trebue să fie egal cu lucrul efectuat prin deplasarea pistonului mic:

$$0{,}75 \cdot 5 \cdot 75 \cdot 60 = 1125 \cdot 100 \cdot x$$

de unde

$$x = 0{,}15\ m = 15\ cm.$$

Problema 540

Ce relaţie trebue să existe între coeficienţii de dilatare a barelor ce formează un triunghi dat, astfel că dacă ridicăm temperatura cu t°, *triunghiul să devină echilateral.*

***

Soluţie. Fie a, b, c laturile triunghiului dat la 0° C, α, β, γ coeficienţii de dilatare lineară ai barelor. Conform enunţului trebue să avem

$$a(1 + \alpha t) = b(1 + \beta t) = c(1 + \gamma t)$$

care se poate scrie

$$\frac{a}{\frac{1}{1+\alpha t}} = \frac{b}{\frac{1}{1+\beta t}} = \frac{c}{\frac{1}{1+\gamma t}}$$

Aceasta ne arată că lungimile barelor sunt invers proporţionale cu binoamele de dilatare la $t°$.

Problema 541

Să se rezolve sistemul

$$\frac{x+y}{1-xy} + \frac{x-y}{1+xy} = \sqrt{3}$$

$$\frac{1}{1+x^2} - \frac{y^2}{1+y^2} = \frac{1}{2}$$

Ilie N. Constantinescu

Soluţie. Sistemul se poate scrie

$$\begin{aligned} 2x(1+y^2) &= \sqrt{3}(1-x^2y^2) \\ (1+x^2)(1+y^2) &= 2(1-x^2y^2) \end{aligned} \qquad (1)$$

Impărțind cele două ecuații obținem ecuația în x

$$3x^2 - 4\sqrt{3}x + 3 = 0\ ,\ \text{de unde}$$

$$x_1 = \sqrt{3}\ ;\ x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Inlocuind pe rând valorile lui x în (1) obținem pentru x_1, $y = \pm i\sqrt{0{,}2}$; pentru x_2; $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

Altă soluție. Notând $x = \text{tg}\alpha$ și $y = tg\,\beta$, obținem:

$$\text{tg}(\alpha + \beta) + \text{tg}(\alpha - \beta) = \sqrt{3}$$

$$\cos^2\alpha - \sin^2\beta = \frac{1}{2}$$

Prima ecuație se poate scrie

$$\frac{2\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha + \cos 2\beta} = \frac{2\sin 2\alpha}{2(\cos^2\alpha - \sin^2\beta)} = \sqrt{3}$$

$\sin 2\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\alpha_1 = 30°$; $\alpha_2 = 60°$, deci

$$x_1 = tg\,\alpha_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ și } x_2 = tg\,\alpha_2 = \sqrt{3}$$

Mai departe

$$\sin^2\beta_1 = -\frac{1}{2} + 1 - \sin^2\alpha_1 = \frac{1}{4}$$

$$\text{tg}\,\beta_1 = y_1 = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin^2\beta_2 = -0{,}25$$

$$y_2 = \text{tg}\,\beta_2 = \pm i\sqrt{0{,}2}$$

Problema 542

Un balon de 10 litri este plin cu oxigen la presiunea de 80 Kgf/cm² și la temperatura de 7°C. Ce cantitate de căldură absoarbe gazul dacă este încălzit până la 15,5°C.

C. d. P.

Soluție. Densitatea și căldura specifică a oxigenului la 0° și presiune normală (1,033 Kgf/cm²) sunt respectiv 0,00143 gr/cm³ și 0,22.

Din formula $P_t = P_0(1 + \alpha t)$ găsim

$$P_0 = 78 \text{ Kgf/cm}^2$$

Ținând seama că la temperatură constantă presiunile sunt proporționale cu densitățile, găsim că densitatea oxigenului la presiunea de 78 Kgf/cm² este

$$(0{,}00143 \times 78) : 1{,}033$$

Greutatea oxigenului din balon este deci

$$(10 \times 78 \times 0{,}00143) : 1{,}033 \text{ Kg}$$

Când gazul se încălzește până la 15,5°C absoarbe

$$(10 \times 78 \times 0{,}00143 \times 8{,}5 \times 0{,}22) : 1{,}033 = 2{,}02 \text{ Kcal.}$$

Problema 545

Pe baza ABC a unei piramide SABC se ia un punct M prin care se duc dreptele paralele muchiilor SA, SB, SC până la intersecția lor cu fețele SBC, SCA, SAB respectiv în punctele P, Q, R.

Notând:

$$\overline{SA} = a,\ \overline{SB} = b,\ \overline{SC} = c,\ \overline{MP} = x,$$

$$\overline{MQ} = y,\ \overline{MR} = z,$$

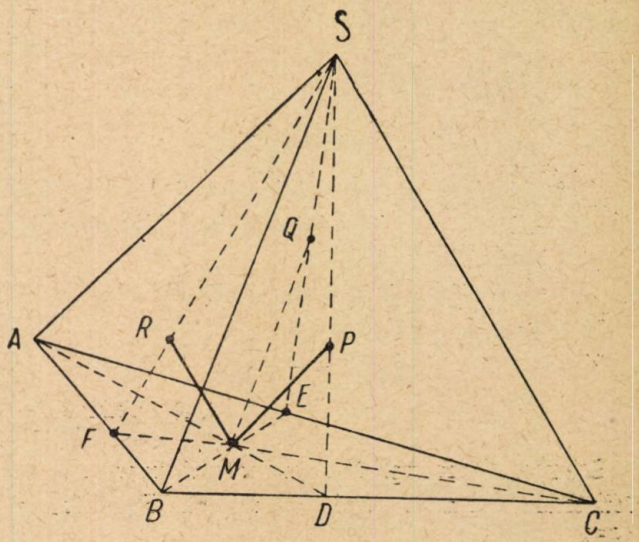
să se găsească suma

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}.$$

P. Modenov
(Moscova)

Soluție. Dreptele AM, BM, CM taie laturile opuse respectiv în D, E, F. Din asemănarea triunghiurilor ADS, BES, și CFS, obținem:

$$\frac{MP}{SA} = \frac{MD}{AD}\ ;\ \frac{MQ}{SB} = \frac{ME}{BE} \text{ și } \frac{MR}{SC} = \frac{MF}{CF}.$$

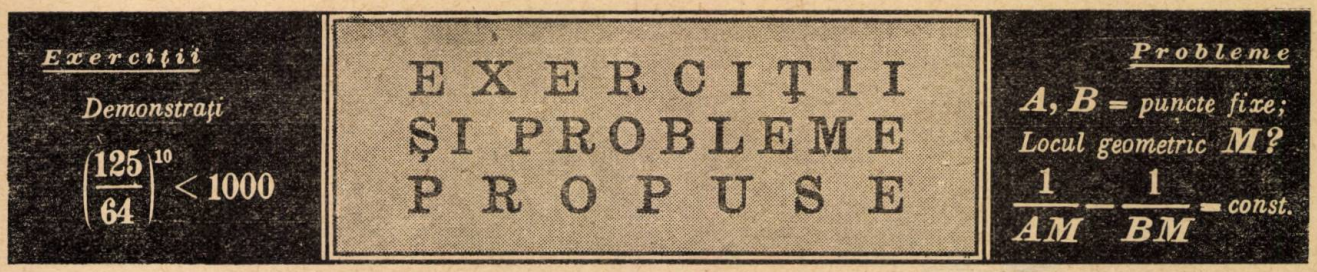


Adunând aceste trei relații și ținând seamă că

$$\frac{MD}{AD} + \frac{ME}{BE} + \frac{MF}{CF} = 1,$$

(Geometrie, manual unic, cl. IX, pag. 289, exercițiul 417) rezultă

$$\frac{MP}{SA} + \frac{MQ}{SB} + \frac{MR}{SC} = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$



715 [1]. Se dă o piramidă triunghiulară. Se cere să se demonstreze că:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4}$$

în care R este raza unei sfere înscrisă în piramidă, iar h_1, h_2, h_3, h_4 sunt distanţele din vârfurile piramidei la laturile opuse.

A. Murklinschi

716. Să se determine raportul volumelor a două corpuri, ce se formează prin rotaţia unui triunghiu isoscel, în jurul bazei şi a uneia din laturile laterale, ştiind că unghiul din vârful acestui triunghiu este egal cu $2x$.

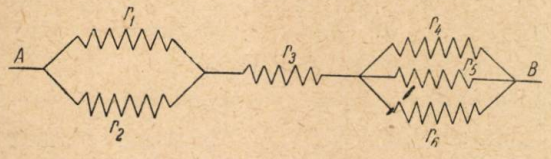
A. Mikişa şi V. Mihelson

717. Se dă un con circular drept de rază şi înălţime respectiv R şi I. Să se ducă un plan paralel cu baza astfel ca volumul triunghiului de con obţinut să fie medie proporţională între întreg conul şi conul mic obţinut prin secţionarea conului cu planul dus. Dacă r este raza bazei mici a trunchiului de con, să se stabilească relaţia

$$\frac{r^3}{R^3} + \frac{R^3}{r^3} = 3$$

Simon Şt. Petre

718. In schema de mai jos să se afle intensitatea curentului în fiecare derivaţie dacă $r_1 = 3$ ohmi,



$r_2 = 2$ ohmi, $r_3 = 7{,}55$ ohmi, $r_4 = 2$ ohmi, $r_5 = 5$ ohmi, $r_6 = 10$ ohmi; iar tensiunea la capetele A şi B este

$$U_{AB} = 100 \text{ volţi}$$

***

719. Care este inducţia magnetică a unei bobine de 500 spire, secţiunea de 50 m² şi raza de 5 cm, ce se învârte cu 6000 ture pe minut şi produce o forţă electromotorie cu o valoare efectivă de 110 volţi? Presupunând că bobina este confecţionată dintr'un material cu $\mu = 20$, să se afle intensitatea curentului ce o străbate.

Const. Oprea
Bucureşti

720. O pilă electrică cu o forţă electromotrice de 1,8 volţi se leagă în serie cu un acumulator cu o forţă electromotrice de 1,2 volţi şi are o rezistenţă interioară de 0,5 ohmi. Rezistenţa circuitului exterior este de 1,5 ohmi iar intensitatea curentului măsoară un amper. Să se afle la ce adâncime sunt scufundaţi electrozii pilei electrice în soluţia de SO_4H_2 de concentraţie 10%, ştiind că distanţa dintre electrozi este de 5 cm, iar lăţimea unui electrod de 2,5 cm, şi $\rho = 26000$.

Mihai Silişteanu
student

721. Cum putem încălzi mai mult 720 grame apă cu temperatura 16°C, amestecând-o cu 810 grame la 84° sau trecând o rezistenţă de 10 ohmi scufundată în apă timp de 5 minute cu un curent de 6 amperi?

Marian Gh. Ţarină
student, Cluj

722. Să se rezolve sistemul:

$$[(b\,(a-x)+c\,(a-y)]\;(2\,x+y) - b\,(x^2+xy+y^2)=0$$
$$[(b\,(a-x)+c\,(a-y)]\;(x+2y) - c\,(x^2+xy+y^2)=0$$

Gh. D. Simionescu

723. Dacă

$$a^2 + b^2 + c^2 = m^2$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = n^2$$

Să se arate că:

$$(bz-cy)^2 + (ay-bx)^2 + (cx-az)^2 \leqslant m^2n^2$$

C. Ionescu-Ţiu

724. Se dă ecuaţia:

$$x^2 - (m+4)\,x + 2m + 6 = 0$$

şi se cere să se determine parametrul m astfel ca suma cuburilor rădăcinilor să fie -9.

E. Morţun

[1]) Problemele propuse 708*—714* sunt enunţate la Chestiuni de examen, pagina 297.

725. O unitate de pionieri scrie lozinca mobilizatoare:

PUNE
BANI
LA CEC

Suma depusă la CEC este rezultatul adunării de mai sus, unde fiecare literă reprezintă câte o cifră semnificativă diferită.

Să se afle câți bani s'au depus la CEC.

V. Neacșu
Constanța

726. Prin vârfurile A, B, C ale unui triunghiu oarecare, se duc drepte concurente care taie laturile opuse în A_1, B_1, C_1. Paralela prin A_1 la AB întâlnește pe AC în B_2; paralela prin B_1 la BC întâlnește pe AB în C_2 și paralela prin C_1 la AC întâlnește pe BC în A_2. Să se arate că dreptele AA_2, BB_2, CC_2 sunt concurente.

D. C. Panu

727. Să se determine λ astfel că rădăcinile ecuației

$$x^4 - (3\lambda + 5)\, x^2 + (\lambda + 1)^2 = 0$$

să fie în progresie aritmetică.

Nicolae I. Berianu
student, București

728. In triunghiul ABC, mediana AD este egală cu latura $BC = a$. Să se arate că suprafața triunghiului este dată de relația

$$S = \frac{3\, a^2 \operatorname{tg} A}{8}$$

Mihail I. Popescu
elev, Craiova

729. Se dă unghiul xOy. Pe laturile Ox, Oy se iau respectiv punctele A și B astfel ca $OA + OB = c$, lungime constantă dată. Se cere locul centrului cercului circumscris triunghiului OAB.

Marius V. Iosifescu
elev, Pitești

730. Să se calculeze înălțimea h necesară capului unui bulon care trebue să reziste la o tensiune de 1200 kg, știind că rezistența admisibilă la tensiune este 1000 kg/cm² și rezistența admisibilă la forfecare este 600 kg/cm².

Ilie I. Loziciu

731. Un corp cu densitatea de 2,5 cade liber într'un bazin adânc de 10,202 m.

Să se afle densitatea lichidului din bazin știind că acel corp ajunge la fund în timp de 2 secunde. Se va neglija frecarea corpului cu lichidul.

H. Dăscălescu

732. Pentru care valori întregi și pozitive ale variabilei x, trinomul

$$x^2 - x + y$$

ia valori numerice divizibile cu 5.

Să se arate condiția necesară ca trinomul

$$ax^2 + bx + c \quad (a, b, c \text{ întregi})$$

să ia valori numerice divizibile cu numărul întreg pozitiv d, când x este întreg pozitiv.

N. C. Ciomu

733. Să se arate că într'un triunghiu oarecare, există relația

$$\sin C\,[3\cos A - \cos(B - C)] + \sin(A - B)\,[\cos A + \cos(B - C)] = [\sin A + \sin(C - B)]\,[\cos(A - B) - \cos C]$$

și celelalte relații analoage.

Anatolie Mândru
elev, București

734. Intr'un con echilateral să se înscrie un con circular drept cu vârful în centrul bazei conului dat, având volumul maxim. In conul al doilea se înscrie un al treilea con de volum maxim cu vârful în centrul bazei celui de al doilea con și apoi se înscrie analog al patrulea con circular drept în al treilea con și așa mai departe.

Să se calculeze suma volumelor conurilor.

Tiberiu Weszely
elev, Târgu-Mureș

EXERCIŢII PROPUSE PENTRU ÎNVĂŢĂMÂNTUL ELEMENTAR

E. 233. Un angrenaj de două roţi dinţate are distanţa între axe de 130 mm. Numărul de dinţi este respectiv de 50 şi 80 dinţi. Să se calculeze diametrele acestor roţi.

Petre Padar
elev, Bucureşti

E. 234. Un muncitor a avut de executat patru axe de diametru $D = (56{,}6 \pm 0{,}2)$ mm. La control s'a constatat următoarele diametre în mm: primul 56,9 al doilea ax 56,7, al treilea 56,5 şi al patrulea ax 56,4. Câte axe au fost acceptate? Dacă cele rebutate mai pot fi corectate şi cum?

***

E. 235. Pentru 10 ture ale capului universal al unui strung, cuţitul avansează în direcţie longitudinală cu 0,5 mm. Să se determine mărimea avansului în milimetri pentru o tură a capului universal.

Care este avansul în timp de două minute, dacă turaţia este de 480 ture pe minut?

***

E. 236. Se dă un triunghi echilateral ABC în care se duc înălţimile vârfurilor B şi C care se întâlnesc în H.

Din vârful A se duce perpendiculara pe AB care întâlneşte înălţimea din B în B_1 şi perpendiculara pe AC care întâlneşte înălţimea din C în C_1. Să se arate că figura AB_1HC_1 este un romb.

Petru N. Nicola
elev, Timişoara

E. 237. Să se determine turaţia unei piese pe minut dacă diametrul piesei este $D = 100$ mm, iar viteza de tăiere $v = 200$ m/minut. Idem, pentru $D = 25$ mm şi $v = 75$ metri pe minut.

***

E. 238. Să se determine raportul de transmisie al unui angrenaj de trei roţi dinţate având numărul de dinţi respectiv $z_1 = 25$; $z_2 = 40$ şi $z_3 = 75$. Să se indice sensurile de rotaţie a ultimelor două roţi dacă prima se roteşte în sensul acelor unui ceasornic.

***

E. 239. Dacă

$$a^2 + b^2 + c^2 = m^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = n^2$$

$$ax + by + cz = mnp$$

Să se arate că

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = m^2 + n^2 - 2\,mnp$$

C. I. Ţ.

E. 240. O familie depune lunar la C. E. C. suma de lei 30. Ştiind că această familie cheltuie $\frac{5}{12}$ pentru hrană, $\frac{1}{12}$ pentru locuinţă, $\frac{2}{9}$ pentru îmbrăcăminte; iar pentru alte nevoi cheltue 90 lei lunar, să se afle suma cheltuită lunar şi cât la sută depune la C. E. C. din venitul lunar al acelei familii.

Valentin Staicu
Străuleşti-Bucureşti

E. 241. Se dau două puncte fixe A şi B aşezate de aceiaş parte a unei drepte (D). Să se găsească pe această dreaptă două puncte M şi N ştiind că lungimea segmentului MN este a cm astfel ca linia frântă $AM + MN + NB$ să fie de lungime minimă.

***

$x = 1 + \frac{1}{x}$

PAGINA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

In luna Octomvrie 1952, s'au evidențiat următorii rezolvitori de probleme din Revista Matematică și Fizică: *Udrescu Șt. Valeriu* (clasa XI, Pitești), *Gheția I. Eugen* (clasa XI, L. b. 5 București), *Mitoșeru Th. Vasile* (clasa VII Secujeni, Botoșani), *Mitoșeru Th. Constantin* (clasa X, Iași), *Dogaru Mihai* (clasa X, Ploești), *Torjescu Florin* (clasa X, Ploești), Moraru Liliana (Codlea, Orașul Stalin), *Vasiliu George* (clasa IX, Galați), *Pușcă Sergiu* (clasa XI, Focșani), *Bichir Ionel* (clasa XI, Bârlad), *Tănase Dumitru* (Anul II Sc. măsurători terestre, București), *Licea Ioan* (clasa X, Galați), *Bocu Mircea* (clasa IX, Oradea), *Clonda Ovidiu* (clasa IX, Tg, Jiu), *Stamatiu I. Alexandru* (clasa IX, Râmnicul Sărat), *Namolovan Virgil* (clasa XI, Pitești), *Badea N. Alexandru* (clasa XI Buzău), *Mihai T. Alexandru* (clasa X. Pitești), *Codreanu Irinel* (Buzău), *Stoicescu Teodor* (clasa XI, L. b. 10 București), *Păun Gh. Gheorghe* (clasa XI, Pitești), *Trifu Romulus* (clasa XI, Făgăraș), *Mândru Anatolie* (clasa XI A liceul Nr. 10 București), *Bărbulescu T. Alexandru* (Anul III Scoala medie tehnică Pitești), *Steriopol Ion* (clasa VIII, Pitești), *Răcă Gheorghe* (clasa IX Tg.-Jiu), *Didiv Bogdan* (clasa X, Focșani), *Hammer Ladislau* (clasa XI, Timișoara), *Tița D. Constantin* (clasa XI, Tg.-Jiu), *Ciucă Alexandru* (Tecuci).

★

In cursul lunii Octomvrie 1952 s'au primit cel puțin cinci soluții bune la probleme propuse în Revista Matematică și Fizică în anii 1951 și 1952 dela următorii rezolvitori:

Alexandria. Clasa IX. Teodorescu Marian (E: 128, 131, 142, 156, 165, 171), Clasa XI B. Gâdea Constantin (503, 517, 530, 633, 618, 629).

Baia Mare. Clasa XI. A. Mureșan Mihai (503, 506, 536, 585, 607, 615, 618, 629, 630, 633, E: 164, 172, 178, 180, 181, 183, 195).

Bacău. Clasa IX A. Căpitanu Florin (621, E: 185, 207, 208, 209). Clasa X. Tofan Ion (404, 410, 416, 448, 466, 514, 541, 581, 597, 603, 608, 611, 615, 618, 621, 633, 638, 640, 655, 658, P), Zisman Iosif (517, 523, 541, 613, 640, 655, 658, E: 159, 175, 185, 187, 189).

Bârlad. Clasa VIII. Bichir Ilie (389, 448, 479, 520, 615, 633, 658, E: 108, 136, 159, 183, 184, 186, 190, 193, 202, 207, 208, P), Clasa XI. David Alexandru (514, 515, 520, 536, 537, 541, 578, 651), Bichir Constantin (550, 581, 597, 611, 632, 633, 655, 658, E: 174, 179, 197, 200, 207, 208, 212), Bichir Ionel (303, 417, 444, 448, 450, 461, 479, 482, 492, 529, 530, 533, 559, 568, 590, 593, 594, 595, 601, 602, 603, 607, 608, 611, 613, 615, 617, 618, 621, 624, 625, 627, 630, 633, 635, 640, 641, 642, 651, 655, 658, P).

Botoșani, Secujeni. Clasa VII. Mitoșeru Th. Vasile (50, 51, 52, 54, 55, 57, 58, 60, 61, 63, 64, 67—75, 77—93, 96, 97, 99—110, 113, 114, 115, 116, 119, 120, 121, 124—128, 130—163, 166—178, 181—189, 192, 193, 194, 195, 197, 198, 200, 201, 202, P).

București. Liceul 1 fete. Clasa IX A, Belgrader Mariana (591, 655, 658, E: 207, 208), Cruceanu Viorica (591, 611, 615, 652, 654, 655, 658, E: 207, 208, P). Centrul școlar 2, 10, 13 fete. Clasa IX. Petrică Zamfira (508, 533, 537, 554, 561, 563, 567, 576, 593, 611, 620, 655, 658, E: 159, 207, 208, 209), Scoala Tehnică Metalurgică Nr. 1. Anul IV. Padar Petre ((569, 574, 577, E: 73, 175, P). Liceul 1 băieți Clasa VIII. Alexandrescu Nicolae (393, 507, 588, 591, 597, E: 155, 157, 159, 160, 161, 165, 167, 171, 173, 175, 176, 178, 179, 181, 182, P). Liceul 5 băieți. Clasa XI. Gheția I. Eugen (242, 265, 268, 274, 282, 287, 300, 315, 318, 333, 335, 336, 337, 339, 340, 341, 342, 344, 352, 360, 362, 371, 372, 377, 379, 382, 383, 387, 406, 413, 415, 416, 419, 421, 427, 433, 436, 439, 440, 443, 444, 457, 459, 465, 471, 483, 484, 485, 506, 512, 513, 514, 517, 518, 519, 520, 522, 525, 527, 528, 530, 533, 536, 537, 540, 541, 542, 545, 546, 550, 552, 553, 554, 555, 560, 561, 562, 563, 565, 567, 578, 581, 583, 588, 590, 597, 598, 603, 604, 605, 608, 615, 621, 622, 623, 625, 629, 631, 633, 641, 642, 651, 653, 655, 659). Liceul 7 băieți. Clasa X A. Ianovici Mircea (260, 268, 273 375, 517, 522, 615, 618, 621. Liceul 8 băieți. Clasa X. B. Nicu Mihail (374, 375, 448 E: 137, 160, 185, 188, 190, 192). Liceul 10 băieți. Clasa VIII A. Munteanu Cătălin (E: 51, 109, 156, 175, 159, 166). Clasa XI-a: Dumitrescu Carol (337, 339, 415, 432, 436, 484, 488, 512, 591, 611, 621, 633, 638, E: 71, 86, 88, 94, 101, 103, 108, 109, 195), Ionescu Ion (339, 417, 432, 436, 443, 448, 480, 499, 501, 510, 514, 520, 528, 533, 554, 572, 574, 578, 582, 587, 590, 609), Mândru Anatolie (332, 398, 411, 416, 421, 427, 429, 443, 449, 453, 454, 456, 458, 459, 461, 465, 468, 472, 474, 477, 479, 484, 486, 487, 488, 489, 495, 496, 499, 540, 611, 615, 621, 638), Nicolae Mircea (432, 501, 514, 520, 550, 578), Stănescu Gheorghe (572, 574, 578, 587, 590, 598, 609, E: 71, 148, 161), Stoicescu Teodor (339, 345, 415, 429, 441, 443, 445, 448, 449, 457, 459, 466, 468, 474, 476, 477, 484, 488, 495, 496, 499, 507, 514, 517, 520, 523, 528, 536, 540, 541, 550, 591, 603, 608, 615, 621, 630, 633, 651, 655, P), Șincan Corneliu (332, 377, 416, 484, 488, 491, 536, 603, 611, 627, 630, E: 66, 71, 86, 94, 101, 103, 108, 109, 158, 175, 181, 182), Vârcol Alexis (349, 377, 374, 317, 386, 417, 432, 441, 446, 460, 480, 499, 501, 520, 528, 533, 536, 550, 554, 561, 575, 583), Școala 47 băieți. Berbec F. Ovidiu (633, 655, 658, E: 62, 65), Fără indicație de școală. Oprea Constantin (341, 342, 349, 351, 387, 625, 630, 633, E: 95, 193, 200, P). Scoala de măsurători terestre, Anul II. Tănase Dumitru (414, 451, 461, 467, 512, 513, 525, 536, 540, 567, 573, 583, 590, 600, 615, 613, 618, 621, 629, 632, 633, E: 137, 165, 166, 168, 170, 173, 174, 175, 176, 179, 180, 181, 182, 185, 190, 193, 195, 196, 197, 200, 203, 208, 209,) Institutul Pedagogic Anul I Ghinescu Nicolae (269, 541, 590, E: 57, 100, 142, 152, 153, 165, 171, 172, 174, 175, 176, 177, 178, 182, 185, 188).

Buzau. Clasa X. Badea N. Alexandru (416, 432, 433, 441, 448, 456, 459, 466, 468, 512, 514, 520, 525, 526, 536

537, 541, 550, 567, 571, 578, 582, 591, 592, 597, 602, 603, 604, 606, 608, 612, 615, 618, 620, 621, 624, 625, 632, 633, 635, 638, 640, 641, P), Codreanu Irinel (251, 255, 356, 376, 380, 382, 411, 413, 464, 475, 483, 487, 488, 545, 546, 554, 559, 561, 565, 582, 573, 588, 590, 599, 600, 605, 607, 608, 612, 615, 617, 618, 620, 622, P), Coman M. Nicolae (276, 322, 404, 411, 432, 520, 608, 615, 618, 621, 640), Clasa XI Burlacu I. Nicolae (536, 537, 541, 550, 561, 571, 578, 582, 591, 597, 598, 602, 603, 604, 608, 611, 612, 615, 618, 621), Găloiu Vespasian (432, 459, 602, 604, 608, 618, 621)

Câmpina. Scoala medie de Utilaj Petrolifer. Bomghea Oprea (613, 625, 632, 635, 640, 643, E: 200, 208), Pârciu Mircea (536, 537, 591, 593, 603, 608, 611, 625, 632, 633, 635, 655, 658, E: 188).

Câmpulung-Muscel. Clasa X. Marinescu I. Nicolae (543, 585, 611, 618, 621, 628, 658), Nichifor Gheorghe (507, 508, 514, 517, 518, 528, 536, 537, 540, 541), Simionescu V. Ion (512, 517, 518, 537, 585, 589, 621), Clasa XI. Acatincăi Eugen (555, 567, 602, 608, 611, 628, 633). Stoica Nicolae (259, 398, 518, 522, 537, 658, E: 207).

Caracal. Băică M. Paul (504, 506, 509, 514, 517, 522, 537, 541, P).

Cluj. Clasa XI. Grecu Dan (514, 517, 520, 522, 535, 548, 550, 559, 561, 598, 603, 604, 608, 611, 612, 615, 618).

Constanța. Bădică Marin (517, 522, 532, 537, E: 157, 172), Mitescu Constantin (527, 633, 655, E: 195, 197, 199, 200, 202, 206, 208), Pană Eugen (518, 533, 536, 537, 585, 591, 611, 655, 658, E: 157, 163), Popescu I. Mircea (621, 632, 633, 641, 642), Școala Hidrotehnică. Anul II. Lambă Stelian (615, 652, 657, 658, E: 178, 207).

Corabia. Clasa IX. Popescu Alexandru (621, 632, 658, E: 200, 207).

Craiova. Clasa IX. Cetățeanu Cecilia (634, 658, E: 193 197, 199, 203, 207, 211), Ștefănescu Victoria (506, 503, 512 513, 514, 517, 521, 522, 525, 530, 543, 541, 575), Clasa X. Cazanacli Nicolae (606, 618, 621, 625, 633, 640, 651, 655, 658), Clasa XI Bârzu Mircea (518, 605, 611, 613, E: 179), Florea C. Paula (615, 630, 633, 651, 658, E: 156, 179, 197, 202, 207, 208, 212), Sârbu Ovidiu (265, 307, 371, 379, 537, 578, 625, 630, 640, 658, 662, P), Șerban Ileana (581, E: 197, 207, 208, 212), Popescu I, Mihail (242, 315, 410, 456, 483, 519, 561, 570, 615, 617, 630, 632, 633, 640, 641, 651, 652, 654, 655, 658). Școala Pedagogică de fete Anul. III. Istrătescu I. Nely (525, 527, 536, 568, 590, 591, P), Școala metalurgică Anul IV. Rădulescu I. Ion (608, 614, 615, 618, 621, 622, 633, 643, 645, 684, E: 155, 186, 187, 188, 190, 193, 195, 200, 205, 206, 209).

Curtea de Argeș. Filipoiu Gh. Miu (503, 506, 517, 536, 537, 548, 550, 584, 585, 591, 596, 601, 611, 615, 630, 631, 633, 641, 651, 655, 658).

Dorohoi. Clasa XI. Pomârleanu Herod (404, 429, 443, 445, 458, 459, 466), Scutelnicu Constantin (415, 429, 443, 445, 505, 508, 512, 525, 588, 597, E: 180, 192, 197, 200).

Făgăraș. Clasa XI. Burlea Gavrilă (242, 333, 335, 336, 337, 347, 454, 496, 497, E: 51, 79, 100, 137, 138, 139), Trifu Romulus (303, 348, 349, 369, 371, 406, 432, 434, 443, 455, 482, 487, 505, 509, 510, 512, 513, 514, 517, 525, 540, 550, 568, 569, 574, 578, 609, 625, 627, 630, 633, P).

Focșani. Petrovici Radu (248, 278, 299, 323, 333, 346, 348, 351, 353, 354, 359, 363, 367, 368, 370, 371, 374, 389, 429, 437, 443, 448, 458, 461, 466, 484). Clasa X. Didiv Bogdan (500, 503, 506, 507, 508, 509, 510, 512, 514, 515, 517, 518, 522, 523, 525, 528, 530, 533, 536, 537, 539, 540, 541, 542, 643, 545, 547, 549, 550, 554), Clasa XI. Pușcă Sergiu (449, 455, 457, 459, 460, 463, 465, 467, 468, 477, 481, 484, 485, 487, 488, 503, 505, 506, 507, 509, 510, 512, 514, 515, 517, 518, 522, 523, 525, 528, 533, 535, 536, 537, 539, 540, 541, 542, 543, 550, 554, 558, 561, 581, 588, 589, 591).

Galați. Clasa IX A. Vasiliu George (268, 290, 292, 297, 307, 324, 335, 336, 367, 368, 371, 374, 377, 379, 383, 386, 389, 390, 392, 395, 404, 416, 426, 427, 429, 434, 435, 437, 439, 443, 447, 448, 457, 458, 461, 462, 463, 466, 468, 474, 477, 484, 503, 505, 506, 507, 509, 510, 528, 533, 535, 537, 539, 540, 541, 543), Clasa X. Licea Ioan (398, 433, 472, 496, 512, 513, 514, 515, 516, 517, 518, 519, 520, 521, 523, 524, 525, 526, 528, 529, 530, 531, 532, 533, 534, 536, 537, 539, 540, 541, 542, 543, 545, 548, 550, 552, 554, 555, 557, 558, 559, 605, 561, 562, 563, 564, P).

Giurgiu. Clasa VIII. Mișcol M. Mircea (E: 51, 79, 91, 105, 161, 182, 165, 193, 257), Clasa IX. Aldea Vasile (536, 537, 552, 561, E: 156, 157, 160, 161, 163, 165, 176, 178) Drăgan Șt. Marin (E: 173, 182, 193, 203, 204, 207, 209), Stanciu I. Mirel (E: 156, 175, 178, 202, 204, 209, 560, 615), Clasa X. Martinescu Nella (578, 591, 604, 621, 633, 635, 651, 654, 655, 658, E: 190, 208), Pastramă P. Marin (527, 633, E: 194, 195, 165, 204, 209), Petcu I. Dumitru (292, 540, 542, 608, 615, 621, 627, 635, 643, E: 51, 55, 69, 70, 73, 74, 162, 185, 193, 194, 195, 202, 203, 204, 208, 209), Vlad. C. Ilie (259, 540, E: 158, 161, 165), Școala medie tehnică agricolă. Anul II. Bigan V. Stan (481, 503, 522, E: 137, 138), Fotă M. Stan (349, 387, 574, 587, 590, 609, 615, 618, 621, 627).

Iași. Clasa VII. Ciobanu Ion (E: 165, 166, 170, 198, 204, 207), Bercovici Hari (E: 166, 170, 203, 204, 205, 207, 209), Giurgea Marcel (509, E: 70, 83, 89, 137, 155, 156, 159, 160, 165, 166, 167, 170, 175), Clasa IX. Ciobanu M. (655, 658, E: 195, 203, 204, 207, 208, 209,) Herșcovici Iosif (507, 591, 611, 618, 621, 658, E: 178, 179, 195, 197, 200, 208), Perhunter Milu (591, 611, 618, 621, 658, E: 156, 157, 178, 195, 197, 200, 209), Radu Rodica (E: 178, 195, 197, 206, 207, 212), Rădulescu Magda (593, 615, 618, 621, 655, E: 167, 174, 176, 177, 178, 190, 195, 197, 199, 207, 208), Clasa X. Ciobanu M. (655, 658, 195, 197, 203, 204, 207, 208, 209), Mitoșeru Th. Constantin (245, 246, 255, 264, 269, 270, 271, 278, 279, 285, 290, 292, 297, 300, 301, 303, 307, 329, 331, 333, 335, 341, 342, 348, 351, 367, 369, 375, 384, 386, 389, 392, 406, 429, 432, 434, 437, 439, 440, 441, 443, 445, 454, 456, 457, 461, 466, 468, 481, 486, 488, 496, 503, 505, 506, 509, 510, 512, 514, 516, 517, 518, 521, 523, 525, 528, 536, 537, 540, 550, 554, 562, 563, 569, 576, 577, 582, 583, 590, 592, 604, 608, 609, 611, 612, 614, 615, 618, 621, 622, 625, 627, 629, 630, 631, 632, 633), Onică Dan (591, 601, 611, 618, 621), Clasa XI. Weisman Elias (514, 532, 533, 537, 550, 571, P).

Mizil. Școala medie tehnică agricolă. Pârvulescu Adriana (353, 455, 567, 573, 574, 582, 583, E: 147, 148, 149).

Oradea. Clasa VIII. Bocu Monica (648, E: 130, 132, 133, 135, 137, 138, 139, 141, 142, 145, 147, 148, 149, 165, 167, 171, 173, 175, 176, 177, 178, 179, 180, 182, 187, 192), Buzuloiu Vasile (367, 369, 372, 375, 377, 379, 386, 387, 390, 392, 403, 407, 429, 505, 517, 518), Clasa IX. Bocu Mircea (290, 292, 303, 305, 307, 322, 325, 329, 333, 351, 352, 370, 371, 374, 391, 459, 466, 488, 585, 587, 589, 590, 593, 595, 600, 601, 604, 605, 606, 607, 608, 609, 611, 613, 614, 615, 617, 618, 622, 621), Clasa X. Covaci Andrei (401, 407, 419, 420, 459, 465, 498, 505, 511, 522, 525, 527, 536, 540, 554, 583, 630).

Oraşul Stalin. Codlea. Moraru Liliana (297, 323, 335, 371, 375, 379, 382, 386, 392, 536, 578, 658, E: 72, 73, 74, 75, 77, 80, 81, 82, 83, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 97, 98, 99, 100, 102, 105, 107, 109, 113, 114, 137, 138, 150, 152, 153, 156, 157, 158, 160, 161, 163, 164, 173, 174, 176, 193, 202, 204, 208, 209, 212), Clasa X. Purecel Remus (527, 568, 569, 574, 587, 590, 600, 609, 611, 615, 638, E: 165, 170, 178, 180, 188, P).

Oraviţa. Clasa XI B. Giurgiu I. Ioan (251, 264, 286, 297, 345, 346, 367, 503, 508, 512, 517, 518, 525, 531, E: 50, 68, 72, 77, 79, 83, 88, 91, 99, 119, 120, 121, 156, 157, 160, 163).

Piteşti. Liceul de băeţi. Clasa VII. Sandu I. George (E: 165, 175, 178, 182, 183, 203, 209), Clasa VIII. Steriopol Ion (372, 374, 468, 517, 520, 522, 525, 574, 587, 588, 590, 591, 592, 594, 597, 609, 611, 613, 615, 618, E: 124, 137, 159, 176, 178, 179, 182, 187, 192), Clasa IX. Sandu Iulian (615, E: 175, 182, 186, 202, 203, 209, P), Săraci Dumitru (517, 533, 539, 590, 615, 621, E: 155, 156, 160, 165, 175 178, 185, 186, 188, 195, 202), Clasa X. Dragomir Constantin (398, 466, 468, 493, 503, 517, 603, 633), Ionescu V. Savin (253, 346, 369, 371, 247, 439, 517, 531, 627, 630), Ungureanu Liviu (375, 379, 386, 404, 422, 501, 518, 522, 525, 536, 542), Clasa XI. Namolovan Virgil (271, 292, 297, 303, 307, 329, 335, 407, 410, 442, 446, 455, 459, 460, 468, 489, 504, 510, 515, 522, 528, 537, 550, 553, 568, 571, 574, 578, 585, 587, 590, 591, 595, 604, 607, 608, 611, 615, 621, 632, 624, 625, 627, 628), Păun Gh. Gheorghe (336, 339, 375, 376, 397, 413, 426, 429, 437, 440, 465, 466, 468, 475, 484, 487, 509, 515, 526, 536, 548, 550, 575, 590, 591, 603, 604, 618, 621, 641, P). Udrescu Şt. Valeriu (265, 284, 320, 333, 376, 383, 393, 394, 396, 405, 417, 424—468, 486, 526, 528, 529—605, 607—614, 616, 619—630, 632-636, 637, 638, 640—645, 647—655, 657, 658, 659, 661, 662) (184 probleme). Şcoala medie tehnico mecanică. Anul I. Badea Nicolae (E: 202, 205, 206, 207, 209). Badea V. Aurel (E: 198, 202, 203, 206, 207, 208, 209), Bulacu Gh. Constantin (E: 203, 204, 205, 206, 207, 208, 209). Burcea Florin (193, 198, 202, 203, 208, 209), Cătuşanu C. Ion (E: 202, 203, 204, 205, 207, 209), Creţu I. Victor (E: 198, 202, 203, 205, 206, 208), D. I. Alexandru (E: 204, 205, 206, 207, 208), Dumitru M. Marin (E: 202, 204, 205, 206, 207, 208, 209), Dumitrescu Ion (E: 202, 203, 205, 207, 208, 209). Dobre C. Marin (E: 198, 202, 205, 207, 208, 209), Dragomir R. Marin (E: 194, 195, 198, 202, 203, 205, 206, 207, 208), Dudău Gh. Gheorghe (E: 198, 202, 203, 205, 207, 208), Gaizinger Simion (E: 193, 194, 195, 198, 202, 203, 204, 205, 207, 209), Gheorghe I. Constantin (E: 203, 204, 205, 206, 207, 208), Marin C. Marin (E: 202, 203, 206, 207, 208, 209), Marin I. Nicolae (E: 198, 202, 203, 205, 206, 207, 209), Neamţu C. Virgil (E: 194 203, 204, 205, 206, 207, 208,), Nanu P. Petre (E: 198, 202, 203, 205, 206), Luca Gh. Nicolae (E: 193, 198, 202, 203, 204, 205, 206, 208, 209), Olteanu M. Pandele (202, 204, 205, 207, 208), Oprea D. Eugen (E: 198, 202, 203, 204, 205, 206, 207, 208, 209), Ioniţă C. Gheorghe (E: 198, 202, 203, 204, 205, 206, 207, 209), Mihăilă F. Dumitru (E: 202, 203, 207, 208, 209), Popescu M. Ion (E: 202, 203, 205, 206, 208), Preoteasa N. Aurel (E: 198, 202, 203, 207, 208, 209), Stănescu Gh. Ion (E: 202, 203, 206, 207, 208, 209), Stoica M. Florea (E: 193, 198, 203, 204, 206, 209), Stoica M. Marin (E: 202, 203, 205, 206, 207, 208, 209), Stancu I. Gheorghe (E: 198, 202, 203, 204, 205, 208), Toader Gh. Dumitru (E: 198, 202, 203, 205, 208, 209), Târlea M. Ion (E: 198, 202, 203, 204, 205, 206), Velea M. Gheorghe (E: 202, 203, 205, 206, 207, 208), Voicu M. Marin (E: 198, 202, 203, 204, 205, 206, 207, 208, 209), Anul II. Alexandru Şt. Ion (E: 202, 203, 204, 205, 207, 209). Chilău Alexandru (E: 190, 198, 200, 205, 206, 207, 208, 209), Cioroi G. Petre (E: 202, 203, 204, 205, 206, 209), Liţescu I. Ştefan (404, 416, E: 198, 202, 203, 204, 205, 206, 207, 209), Mihai V. Constantin (E: 190, 198, 202, 203, 204, 205, 207, 208, 209), Nicolescu M. Andrei (404, 416, E: 198, 202, 203, 204, 205, 206, 207, 209), Petrescu M. Virgil (E: 198, 202, 203, 205, 209), Sandu I. Radu (404, 416, 633, E: 192, 198, 202, 203, 205, 207, 208, 209), Udeanu C. Gheorghe (404, 633, E: 198, 202, 203, 205, 207, 208, 209), Zăvoianu Constantin (E: 167, 202, 203, 204, 205, 207, 208, 209), Anul III, Bărbulescu T. Alexandru (416, 486, 604, 615, 618, 625, 627, 630, 633, 648, 649, E: 137, 147, 148, 150, 161, 178, 182, 190, 193, 198, 199, 200, 203, 202, 204, 205, 206, 207, 208, 209, P) Dinescu I. Gheorghe (466, 486, 608, 615, 625, 627, 630, 633, 648, E: 137, 143, 148, 175, 182, 193, 203, 204, 205, 208, 209), Ionilă Gheorghe (578, 633, E: 132, 147, 148, 149, 193, 203, 204, 208).

Ploeşti . Clasa IX. Dogaru Iulian (292, 296, 315, 347, 351, 365, 374, 389, 429, 443, 455, 466, 484, 518, 523, 536, 537, 541, 583, 618, 633), Clasa X. Dogaru Mihai (251, 274, 301, 315, 357, 363, 377, 380, 400, 419, 420, 426, 435, 436, 448, 457, 460, 461, 464, 481, 488, 493, 495, 503, 506, 512, 514, 518, 519, 520, 523, 525, 528, 530, 536, 537, 539, 540, 541, 543, 550, 554, 560, 561, 568, 574, 578, 582, 583, 587, 588, 591, 597, 601, 603, 606, 608, 610, 611, 612, 613, 615, 617, 618, 620, 621), Mihai T. Iulian (349, 372, 380, 426, 427, 429, 439, 441, 448, 449, 457, 461, 482, 489, 493, 508, 523, 530, 568, 582, 583, 584, 590, 591, 597, 600, 603, 604, 607, 608, 609, 611, 615, 617, 618, 621), Puşcaşu A. Alexandru (362, 439, 479, 488, 509, 510, 513, 516, 520, 538, 539, 540, 542, 567, 568, 582, 597, 606), Tudor Ioan (509, 517, 518, 522, 536, 537, 655, 658), Torjescu S. Florin (268, 272, 305, 327, 336, 352, 355, 356, 357, 375, 414, 416, 419, 422, 431, 442, 479, 488, 489, 493, 505, 532, 538, 539, 542, 555, 567, 568, 674, 576, 581, 582, 583, 586, 588, 589, 591, 597, 600, 601, 603, 604, 606, 607, 608, 609, 611, 612, 613, 615, 617, 618, 620, 621, 624, 625, 627, 629, 630, 632, 633, 638, 641), Vulpescu Dumitru (520, 527, 585, 597, 604, 625, 633).

Radauţi. Clasa X. Buliga Teodor (466, 475, 484, 485, 499, 514, 517, 518, 533, 540, 552, 554).

Râmnicul-Sărat. Clasa IX. Stamatin I. Alexandru (505, 508, 517, 518, 520, 525, 533, 536, 537, 560, 561, 581, 589, 591, 593, 597, 600, 601, 611, 615, 620, E: 156, 157, 159, 160, 161, 163, 164, 165, 170, 171, 176, 178, 181, 185, 192, P).

Reghin. Ibaneşti. Clasa VII. Sasu I. Emil (E: 184, 187, 190, 201, 202, 203, 204, 205).

Roman, Clasa XI. Vulpe Ioan (285, 349, 389, 504, 523, 564, 621, 630, 640, 651, 659), Aruxandei Gh. Gheorghe (439, 568, 578, 630, 633, P).

Roşiorii de Vede. Miclăuş Vasile (567, 581, 584, 588, 589, 593, 606, 607, 608, 612, 613, 615, 617, 618, 621, 622, P).

Slatina. Clasa VII. Zamfir Vasile (E: 178, 182, 193, 197, 208, 209). Clasa IX. Badea D. Constantin (517, 611, 615, 618, 632, 647, E: 51, 157, 158, 160, 161, 175, 176, 178, 182, 192, 193, 207, 208,), Clasa X. Ilie I. Dumitru (518, 522, 536, 537, 583, 591, 597, 618, 621, 633, 655, 658, E: 157, 172, 178, 197, 200, 206, 207, 208, P), Ţeculescu George (264, 363, 364, 369, 514, 536, 550, 565, 568, 578, 591, 601, 608, 611, 618, 621, 629, 632, 633, E: 51, 70, 130, 160, 192, 197, 200, 207, 208), Clasa XI. Alexandru M. Ion (416, 633, 658, E: 174, 208), Marinescu Ilie (416, 536, 587, 611,

633, E: 156, 160, 208), Popescu Ion (512, 518, 536, 537, 570, 578, 591, 608, 611, 615, 621, 629, 632, 633, P), Ștefan Sp. Ilie (611, 621, 627, 633, 634, 655, 658, E: 206, 207, 208).

Suceava. Clasa XI. Kostiner Isidor (506, 608, 615, 625, 633, 636, 642, 651).

Târgoviște. Clasa VIII. Oprea Aureliu (403, 427, 445, 517, E: 158, 165, 173, 175, 176, 182), Stoian I. Gheorghe (E: 77, 83, 87, 88, 90, 91, 156). Clasa X. Ionescu Ion (536, 574, 585, 587, 600, E: 106, 113, 137, 175, 183). Petrescu I. Constantin (377, 401, 429, 512, 542, 587, 590, 591, 601, 603, 609, 621), Clasa XI. Bălescu Gr. Eftimie (591, 597, 604, 605, 608, 611, 621, 622, 625, 633), Brezeanu I. Ioanin (369, 375, 380, 386, 387, 388, 389, 390, 392, 404, 457, 481, 505, E: 92, 109, 114, 121, 122, P), Oprea A. Constantin (382, 437, 440, 445, 461, 513, 514, 550), Școala medie tehnică de petrol. Anul III. Drăgan T. Gheorghe (528, 574, 587, 597, 604, 611, 615).

Târgul-Jiu. Clasa VIII. Cațighera Virgil (606, 613, E: 147, 148, 149, 165, 166, 167, 170, 190, 193, 202), Clasa IX. Clonda Ovidiu (509, 615, 621, 633, 651, E: 57, 67, 76, 92, 93, 113, 119, 122, 132, 135, 136, 142, 143, 147, 149, 155, 170, 176, 177, 178, 185, 196, 199, 200, 202, 203, 204, 206, 207, 209, 210, P), Cosinschi Dragoș (658, E: 161, 185, 189, 193, 197, 200, 202, 203, 204, 209), Râcă Gheorghe (429, 441, 443, 448, 457, 477, 485, 517, 527, 533, 555, 569, 574, 582, 583, 587, 588, 600, 611, 613, 615, 620, 621, 629, P), Șurlin V. Grigore (537, 611, 658, E: 156, 157, 159, 160, 176, 192, 207), Clasa XI. Ciocârlie Gheorghe (505, 506, 536, 550, 576, 578, 604, 608, 621), Tița D. Constantin (436, 485, 489, 503, 506, 531, 533, 536, 537, 541, 545, 548, 550, 553, 554, 561, 562 563, 567, 573, 578, 582, 583, 588, 589, 618, 621). Anul III. Câțu C. Nicolae (630, 633, E: 192, 193, 195).

Tecuci. Ciucă Alexandru (374, 499, 512, 535, 536, 538, 559, 587, 599, 602, 604, 607, 611, 612, 613, 617, 618, 621, 633, 641, 649, 654, 658, 659, P).

Timișoara. Giuran Al. Valeriu (A. Razele catodice). Clasa X. Hammer L. (269, 270, 271, 283, 329, 337, 379, 422, 432, 466, 477, 486, 509, 522, 536, 537, 541, 561, 568, 574, 578, 681, 587, 593, 606, 608, 609, 611, 618), Clasa XI. Pascu Pavel (607, 608, 611, 615, 621, 625, 629, 632, 633, P), Popa Gheorghe (541, 576, 578, 580, 607, 608, 615, 621). Student. Cadar Ioan (613, 622, 633, 655, 658, 200, 207, 208, 209), Școala medie electrotehnică, Maltak Ioan (257, 236, 543, 569, 574, 587, 633, E: 215).

Turnu Măgurele. Clasa X. Voiculescu P. Stelică (512, 517, 527, 568, 583, 590, 591, 595, 615, 654, 658, P), Clasa XI. Găină F. Stelian (245, 269, 270, 271, 274, 336, 380, 398, 404, 416, 422, 458, 491, 512, 513, 514, 568, 578, 583, 608, 621, 651, 655, 658).

Școala tehnică horticolă. Enache Traian (591, 593, 655, E: 176, 190, 193, 203, 204, 208).

Turnu Severin. Clasa IX. Păunescu Ion (427, 512, 515, 517, 530, 536, 540, 574, 578, 604, 608, 615, 627, 630, 633, E: 156, 165), Clasa X. Filimon Ștefan (540, 615, 633, 651, E: 185, 202, 203, 204, 207), Pârvulescu Emil (525, 536, 537, 540, 611, 621, 633, 658, E: 157, 199, 200), Pârvulețu A. Constantin (603, 608, 615, 621, 655, 658), Tuloi Constantin (597, 611, 615, 632, 655, 658, E: 185, 186, 204). Clasa XI. Zaharescu Marius (427, 536, 537, 550, 554, 591),

Vaslui. Clasa XI. Alexandru Doru (514, 520, 541, 578, 608, 621), Baichis J. (514, 525, 550, 608, 615, 621, 625, 633).

Zalau. Clasa VII. Cioban Valter (E: 166, 171, 172, 186, 192, 198, 202).

★

Redactarea rezolvărilor de probleme. Pe aceiași foaie de formatul caietului obișnuit, se va rezolva câte o singură problemă. Soluția să fie însoțită de numărul și enunțul problemei. Se poate scrie în continuare și pe contrapagină; iar dacă soluția necesită figură, se va desena cu îngrijire și se va anexa. Nu se vor trimite soluțiile mai multor probleme pe aceiași foaie.

Rezolvitorul va scrie cu cerneală la fiecare soluție, numele, școala, clasa și localitatea. Soluțiile trimise să nu fie copiate unele după altele.

Se mai primesc soluții și la problemele propuse în anul 1952 și nerezolvate încă în paginile revistei, începând cu numărul 500 pentru mediu și numărul E: 150 pentru elementar.

Problemele ce se propun de către colaboratorii revistei să fie clar compuse și însoțite de soluții, să fie personale și nu luate din cărți sau reviste, iar trimiterea lor se poate face odată cu problemele rezolvate.

PREMIEREA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

In urma unei clasificări a rezolvitorilor de probleme, evidențiații mai distinși vor primi premii din partea Revistei Matematice și Fizice.

Pentru verificarea și alcătuirea tabelului de clasificarea rezolvitorilor, aceștia sunt rugați să-și întocmească și să trimită redacției, în plicul cu probleme rezolvate, câte o listă, în care să treacă problemele rezolvate, arătând pagina unde au fost anunțați în Revista Matematică și Fizică anul II, numerele 11 și 12 și anul III numerele 1—10, adică toată activitatea dela Noembrie 1951 la Octombrie 1952.

TABLA DE MATERII

A REVISTEI MATEMATICE ŞI FIZICE. ANUL III (1952)

I. ARTICOLE

Pag.

1. *Virgil Atanasiu:* Avionul — o cucerire a tehnicii 31
2. *Virgil Atanasiu:* Efectul fotoelectric şi aplicaţiile lui 214
3. *A. N. Ahutin.* Canalul Volga Don (traducere) .. 267
4. *A. N. Ahutin,* Canalul Volga Don (urmare) 292
5. *O. Florescu:* Lampa electronică. Structura şi funcţiile ei 190
6. *A. Hollinger:* Despre şirul numerelor prime.... 169
7. *C. Ionescu-Timuş:* Lumina rece..... 109
8. *Dan Gh. Ionescu:* Transformarea prin polare reciproce 209
9. *N. N. Mihăilescu:* Extinderea teoremelor de geometrie 51
10. *Angela Negulescu:* Fotoelasticitatea. O aplicaţie tehnică a polarizaţiei luminii 238
11. *Al. Nedelcu:* Electronul 85
12. *C. Popovici:* Distanţele cereşti 5
13. *C. Popovici:* Despre problemele Cosmogoniei .. 136
14. *C. Rabega:* Interferenţa luminii 57
15. *Eugen Rusu:* Noţiunea de grup în matemàtici 103
16. *Eugen Rusu:* Chestiuni de bază în teorema numerelor 186
17. *O. Sacter:* Rezolvarea unor probleme de maximum şi minimum 26
18. *O. Sacter:* Şiruri recurente 235
19. *A. Şaichin:* Nomografia 75
20. *Gh. D. Simionescu:* Unghiuri triedre 127
21. *N. Stănescu:* Ce este fenomenul Doppler-Fizeau 9
22. *S. Stoilov:* Noţiunea de infinit 287
23. *N. Teodorescu:* Facultăţile de Matematici şi Fizică 101
24. Decuparea raţională a materialelor (traducere) 262
25. Vladimir Ilici Lenin 3
26. Un nou pas înainte pe drumul asigurării unei vieţi fericite celor ce muncesc în patria noastră 25
27. Concurs pentru elevii şcolilor medii din ţara noastră 49
28. Răspunsul Tovarăşului Stalin la întrebările puse de un grup de redactori ai unor ziare americane 73
29. Din cuvântarea Tovarăşului Gh. Gheorghiu-Dej la Congresul Invăţătorilor 74
30. Cuvântul Tovarăşului Gheorghe Gheorghiu-Dej la alegerea sa ca Preşedinte al Consiliului de Miniştri al R.P.R. 125
31. Tovarăşului Gheorghe Gheorghiu-Dej, secretar general al Partidului Muncitoresc Român, Preşedinte al Consiliului de Miniştri al R.P.R..... 126
32. Proiect de Constituţie al R.P.R. 157
33. Comunicat. Alegerea Consiliului Central al Frontului Democraţiei Populare 166
34. Să desvoltăm cât mai mult iniţiativele care urmăresc construirea de aparate de fizică 167
35. Proiectul de Constituţie a R.P.R. 185
36. Luna Prieteniei Româno-Sovietice 233
37. Cuvântarea tovarăşului I. V. Stalin la Congresul al XIX-lea al Partidului Comunist al Uniunii Sovietice 261

Pag.

38. Cinci ani dela proclamarea Republicii Populare Române 285

II. DIVERSE

1. *Noutăţi din Ştiinţa şi Tehnica Sovietică*

1. Explozia rece 97
2. Legătura electrică fără baterie 98
3. Propagarea sunetului în apă la distanţe mari.. 152
4. Microroentgenografia electronică..... 153
5. Noua metodă de proiecţie a transmisiunilor de televiziune pe ecran mare 154
6. Metoda fluorescentă pentru descoperirea defectelor exterioare la piesele maşinilor şi instrumentelor 256
7. Noul procedeu de izolare contra căldurii..... 256
8. Observarea vizuală şi fotografierea iradierii undelor de radio dirijate 257
9. Noul escavator cu putere supramărită 258

2. *Cercurile de matematică şi fizică*

— Deschiderea unor cercuri de matematică şi fizică ale elevilor fruntaşi 282
— Construirea cu mijloace proprii a unui model de aparat astronomic..... 295
— In ajutorul cercurilor de matematică şi fizică..
— Să construim cu mijloace proprii modele şi aparate de fizică..... 167
— Construirea unui redresor electrolitic (N. Rădulescu) 222
— Construirea unui ampermetru electromagnetic cu ax orizontal şi ampermetru electromagnetic cu ax vertical (N. Rădulescu) 245
— Construcţia unui voltametru; construcţia unui acumulator electric; construcţia unui cuplu termoelectric; construcţia arcului electric; construcţia unei sonerii electrice (N. Rădulescu).... 272

3. *Poşta Redacţiei* 124

III. CHESTIUNI DE EXAMEN

1. Examenul de admitere la Facultatea de Matematici şi Fizică din Bucureşti 1951 64
2. Concursul de Matematică şi Fizică 1952, Etapa I 116
3. Concursul de Matematică şi Fizică 1952, Etapa II 141
4. Concursul de Matematică şi Fizică 1952, Etapa III 176
5. Examenul de admitere la Institutul de Construcţii din Bucureşti în August 1952 (enunţuri şi soluţii) 246
6. Examenul de admitere la Facultăţile Geologie şi Economie ale Institutului de Petrol şi Gaze din Bucureşti, 1952 274
7. Examenul de admitere la Facultăţile de Utilaj, Foraj şi Tehnologie ale Institutului de Petrol şi Gaze din Bucureşti, 1952 297

IV. PROBLEME PROPUSE ŞI REZOLVATE

1. *Probleme propuse:* Nr. (501—510) (pag. 22); (511—525) (pag. 44); (526—544) (p. 67); (545—564) (pag. 95); (565—584) (pag. 120); (585—604) (pag. 150); (605—622) (pag. 180); (623—642) (pag. 204); (643—662) (pag. 229;) (663—682) (pag. 253); (683—707) (pag. 279); (708—734) (pag. 297, 303).

2. *Exerciții propuse pentru învățământul elementar:* Nr. E (155—164) (pag.69); E (165—173) (pag. 122); E (174—183) (pag. 151); E (184—192) (pag. 182); E (193—202) (pag. 206); E (203—212) (pag. 230); E (213—222) pag. 255); E (223—232) (pag. 281); E (233—241) pag. 305).

3. *Probleme rezolvate:* [1]) 204 (15), 208 (223), 216 (93), 230 (177), 234 (93), 240 (15), 243 (16), 246 (94), 248 (16), 251 (223), 257 (65), 258 (16), 259 (65), 260 (17), 261 (18), 262 (18), 263 (41), 265 (265), 266 (19), 267 (177), 273 (20), 276 (65), 277 (20), 279 (21), 280 (94), 289 (21), 291 (21), 293 (41), 294 (41), 295 (42), 298 (117), 299 (117), 300 (41), 304 (41), 306 (66), 308 (66), 309 (67), 310 (118), 311 (118), 312 (144), 313 (145), 314 (119), 316 (41), 317 (41), 321, (145), 323 (146), 328 (146), 340 (147), 343 (147), 344 (199), 345 (147), 346 (148), 347 (119), 348 (148), 353 (149), 354, (149), 358, (149), 359 (119), 360 (178), 361 (224), 363 (225), 364 (179), 365 (225), 367 (199), 368 (199), 369 (199), 383 (276), 384 (247), 386 (248), 388 (225), 390 (226), 396 (200), 399 (200), 400 (226), 401 (200), 402 (200), 406 (248), 408 (180), 411 (227), 412 (228), 413 (248), 415 (248), 416 (249), 448 (249), 471 (249), 473 (249), 475 (201), 476 (201), 480 (201), 482 (202), 483 (250), 485 (250), 488, (251), 489 (251), 281 (298), 494 (252), 495 (252), 496 (276), 498 (252), 499 (253), 501 (203), 505 (233), 506 (276), 507 (253), 508 (203), 510 (276), 512 (277), 513 (298), 515 (277), 516 (277), 517 (299), 518 (299), 519 (278), 520 (278), 522 (278), 523 (330), 525 (300), 528 (300), 530 (301), 536 (301), 537 (301), 539 (301), 541 (301), 542 (302), 545 (302).

4. *Probleme a căror soluție nu s'a publicat încă și la care se mai pot trimite soluții până la apariția rezolvării lor în anul IV (ce urmează):* 500, 502—504, 509, 511, 514, 521, 524, 526, 527, 529, 531—534, 538, 540, 543, 544, 546, 548, 549, 551, 552, 554—561, 562, 564—572 *și următoarele.*

Idem, (E: 150 *și următoarele*).

5. *Pagina rezolvitorilor de probleme:* Pag. (23, 46, 70, 99, 124, 154, 183, 207, 231, 259, 283, 284).

6. *Redactarea problemelor:* (24, 48, 72, 184, 208, 260, 284).

7. *Premierea rezolvitorilor:* (260, 284).

8. *Tabelul propunătorilor de probleme:* (P. Alexandrescu (612), N. Agiu (596), Dinu V. Anastasiu (501, 599), Virgil Atanasiu (516, 517, 529), Balk și Rauhvager (664), Gh. Bazacov (506, 518, 554, 617, 650, 673), Gh. I. Bercea (563, 636, 658, 670), Nicolae I. Berianu (272), Nicu Boboc (508); Gavrilă Burlea (647), N. Cernov (624), N. C. Ciomu (691, 731), V. Claudian (531, 552), Ilie N. Constantinescu (541), Mircea D. Constantinescu (692), C. Coșniță (564, 578, 597, 652, 679), C. V. Costăchescu (616, 626, 646), Alex. Gh. Crăciun (688), Cucula W. Dacos (645, 667), H. Dăscălescu (731), Emeric Deutsch (659), Aurelian Diaconescu (610) B. Diuba (607), Petre Diaconescu (514), Zoltan Demeny, (619), Al. Dobrescu (675), Lazăr Dragoș (532), Gh. Dumitrescu (524, 553, 579), P. Erdniev (565, 606), Klaus Fisgus (520), S. Fissgus (602), Constantin C. Florea (584), Octav Florescu (521), N. Gaiu (503, 525, 533, 576, 600, 613, 630, 671, 699), Corneliu Georgescu (674), M. Ghermănescu (511, 570), N. Gheorghiu (583, 676), Ion Gligor (631, 661, 669), H. Hamzin (566), Dinu Iliescu (698), Florica Ionescu (601, 680), C. Ionescu-Țiu (505, 538, 550, 573, 603, 620, 632, 637, 649, 677, 694, 723), Marius V. Iosifescu (540, 560, 593, 618, 656, 729), Valentin C. Istodor (502), G. Kapâlov (567), M. Kraizman (623), F. Lander (526), M. Leibman (684), Emil Leibovici (504), Ion Licea (686), Ilie I. Loziciu (730), P. Lupovoc (586, 663), Sp. Manura (643), Anatolie Mândru (733), N. N. Mihăileanu (537, 561, 571, 591, 621, 633, 651), N. Mihăilă 509, 510), A. Mikișa și V. Michelson (716), P. Modenov (545), Emil Morțun (588, 724), I. Munteanu (558, 598), Matei I. Nazarie (580, 697), V. Neacșu (725), Angela Negulescu (666), Eugen Onofraș (555, 695), Const. Oprea (648, 668, 719). D. C. Panu (693, 726), Titus Paraschiv (523), N. D. Păun (582), Mihail I. Popescu (687, 728), Pavel Popescu (640), Dan Popescu (519), L. Reizinș (608, 625), Mihai Roșu (507), Eugen Rusu (700), O. Sacter (528, 546), N. Sălan (539, 639), I. Sager (654, 702), Emil Secoșan (657), Mihail Silișteanu (682, 720), Maria Schuldesz (681), Gh. D. Simionescu (559, 572, 589, 611, 690, 722), Petre St. Simion (515, 530, 717), Dorin Stanciu (534), Mihai Stănescu (557, 575), N. Stănescu (512, 513, 556), Petre Stanciu (536, 634, 655), S. Sinachievici (605), B. Strelețchin (585, 665), Muedin M. Sureia (562, 577, 662), Alex. Stoenescu (644, 672), A. Tralmac (527), Alex. Tihan (622), Florin Torjescu (689), Marian Gh. Țarină (721), Teodor Verveagă (696), Paul Voiculescu (604, 638), Weszely Tiberiu (734). Gh. Zapan (660), Ion Zarda (635, 653, 678).

9. *Tabelul propunătorilor de exerciții și probleme pentru învățământul elementar:* Gh. I. Bercea (E: 200, 221), N. C. Ciomu (E: 224), Ion Conchințoiu (E: 227), B. Covrig (E: 212), Mircea D. Constantinescu (E: 183), Aurelian Diaconescu (E: 193), Gh. Dănilă (E: 223), Valentin Dihoru (B: 170), I. Enache (E: 197), Const. C. Florea (E: 164, 208). S. Fissgus (E: 168), Emil Georgescu (E: 190), Petre Golianu (E: 189), C. Ionescu Timuș (E: 161), C. Ionescu-Țiu (E: 162, 171, 172, 177, 178, 191, 192, 198, 199, 205, 216, 219, 226, 239), Crăciunel Istinie (E: 230), N. N. Mihăileanu (E: 160, 176), A. Ney (E: 174, 175), Petru Nicola (E: 231), Aurel Nicolescu (E: 231), Miron Oprea (E: 157 222), Titus Paraschiv (E: 158), W. Paraschiv (E: 228), Petre Padar (E: 233), Alex. Pantea (E: 188, 194), Maria Popescu (B: 156), Eugen Rusu (E: 229), O. Sacter (E: 155), Gh. D. Simionescu (E: 163, 169), Dinu I. Schileru (E: 173, 179, 201, 232), Dumitru Stoicescu (E: 211) Dana Tăutu (E: 180), Tamara Vasilescu (E: 159).

EVIDENȚIAȚI CA REZOLVITORI DE PROBLEME

1. Abdulamit Mutlu (Constanța) (pag. 46).
2. Amzulescu V. Ioan (Târgoviște) (pag. 70).
3. Anton Vasile (cl. 10 L. b. 5 Buc.) (pag. 207, 231).
4. Bârliga H. Ioan (cl. 11 Ploești) (pag. 155).
5. Bărbulescu T. Alex. (An. III S.M.T., Pitești) (pag 155, 306).
6. Bichir Ilie (cl. VII Bârlad) (pag. 99, 259).
7. Bichir Ionel (cl. 11, Bârlad) (pag. 397).
8. Bocu Mircea (cl. 8 Oradea) (pag. 207, 306).
9. Bocu Monica (cl. 7 Oradea) (pag. 259).
10. Badea N. Alexandru (cl. 11 Buzău) (pag. 306).
11. Bondar Constantin (An. IV. Șc. hidrotehnică, Constanța) (pag. 99).
12. Bonciu S. Ioan (Orașul Stalin) (pag. 124).
13. Bordeanu Stelian (Ploești) (pag. 124).
14. Brozici Florin (cl. 11, Ploești) (pag. 155).
15. Brozici Mircea (cl. 7, Ploești) (pag. 231).
16. Buga I. Ioan (Roman) (pag. 124).
17. Bunea I. Ștefan (cl. 11, Ploești) (pag. 155).
18. Butunoiu Emil (Brăila) (pag. 99).

[1]) In paranteză este trecută pagina unde s'a publicat soluția problemei.

19. Cazanacli P. Nicolae (Craiova) (pag. 207, 231).
20. Cazacu Costică (Pașcani) (pag. 183).
21. Cheblea Constantin (Rădăuți) (pag. 283).
22. Cigan Leontin (Carei) (pag. 155).
23. Ciobanu Constantin (cl. 11, Roman) (pag. 283).
24. Ciolac Ioan (Timișoara) (pag. 46).
25. Clonda Ovidiu (cl. 9, Tg.-Jiu) (pag. 306).
26. Coman Marcel (Vaslui) (pag. 46).
27. Codreanu Irinel (Buzău) (pag. 99, 124, 259).
28. Condrea Nelu (cl. 9, Bârlad) (pag. 99, 259, 306).
29. Constantinescu D. Mircea (cl. 9, L. b. 1 Buc.) (pag. 259).
30. Crăciunescu A. Jean (Tg.-Jiu) (pag. 70).
31. Cristescu M. Dorin (Brăila) (pag. 124).
32. Costea V. Aristide (Rm.-Vâlcea) (pag. 70).
33. Culiță T. Cezar (cl. 10, Focșani) (pag. 99, 124, 207).
34. Ciucă Alexandru (Tecuci) (pag. 306).
35. Di liv Bogdan (cl. 10, Focșani) (pag. 306).
36. Decu Dorel (Brăila) (pag. 207).
37. Decu Ionel (Brăila) (pag. 99).
38. Dihoru Valentin (cl. 11, Buzău) (pag. 283).
39. Didilescu Sergiu (Vaslui) (pag. 46).
40. Dogaru T. Mihail (cl. 9, Ploești) (pag. 46, 124, 183, 306).
41. Dobre Gh. Dan (Buzău) (pag. 124).
42. Dobre Gheorghe (cl. 11, Craiova) (pag. 283).
43. Dobrescu A. (Târgoviște) (pag. 259).
44. Dudiță I. Florea (Orașul Stalin) (pag. 70, 259).
45. Dulamă I. P. (Tr.-Severin) (pag. 99).
46. Dumitrescu Sergiu (cl. 11, Ploești) (pag. 155).
47. Gafițeanu Mihai (cl. 10, Iași) (pag. 155).
48. Gheția Eugen (cl. 10, L. b. 5 Buc.) (pag. 70, 306)
49. Gioncu P. Victor (Arad) (pag. 46, 70).
50. Goia Ioan (Orașul Stalin) (pag. 70, 124).
51. Goia L. Miron (Arad) (pag. 23, 70, 155).
52. Gora Dorin (Slatina) (pag. 124).
53. Ghinea Benone (cl. 10, Pitești) (pag. 283).
54. Grigorescu Ligia (cl. 11, Pitești) (pag. 46, 70).
55. Hammer Ladislau (cl. 10, Timișoara) (pag. 283, 306)
56. Iosifescu V. Marius (cl. 10, Pitești) (pag. 46, 70, 99, 124, 183, 231, 283).
57. Ionescu Dragoș (Craiova) (pag. 46).
58. Ionescu Gh. Dobre (Craiova) (pag. 155).
59. Ionescu V. Savin (cl. 9, Pitești) (pag. 207).
60. Istrate Mircea (Focșani) (pag. 99, 207, 259).
61. Ioram Aldo Lazăr (Roman) (pag. 124).
62. Licea Ion (cl. 9, Galați) (pag. 231, 259, 306).
63. Lupu Vasile (Rădăuți) (pag. 99).
64. Maglaviceanu Nelu (Calafat) (pag. 99).
65. Matei M. Gheorghe (Curtea-de-Argeș) (pag. 124).
66. Mihai T. Alexandru (cl. 10, Pitești) (pag. 306).
67. Mândru Anatolie (Lic. 10 băieți, București) (pag. 306).
68. Miclăuș Vasile (Roșiori-de-Vede) (p. 124, 155, 231, 283).
69. Miclescu R. Caius (cl. 11 L. b. 7, Buc.) (pag. 155).
70. Mihăescu D. Alexandru (Tr.-Măgurele) (pag. 70).
71. Mihai Iulian (cl. 9, Ploești) (pag. 183).
72. Mihăiescu I. Alexandru (Tr.-Severin) (pag. 46, 124).
73. Mihăilescu Ștefan (cl. 10, L. b. 3, Buc.) (pag. 46, 283).
74. Mihalcea S. Ștefan (Ploești) (pag. 124).
75. Mitoșeru Th. Vasile (cl. 7, Secujeni, Botoșani) (pag. 306).
76. Mitoșeru Th. Const. (cl. 10, Iași) (pag. 306).
77. Moraru Liliana (Codlea, Orașul Stalin) (pag. 306).
78. Mirea Nicolae (Alexandria) (pag. 46).
79. Nahaiciuc T. Mihai (Lugoj) (pag. 124).
80. Namdovan Virgil (cl. 10, Pitești) (pag. 207, 306).
81. Nicolae Petre (Lugoj) (pag. 231).
82. Nicolau Corina (cl. 11, Brăila) (pag. 124).
83. Olteanu I. Mihail (Caracal) (pag. 46).
84. Oprea A. Aureliu (cl. 7, Târgoviște) (pag. 46, 207).
85. Pantea Alexandru (Oradea) (pag. 124).
86. Păun Gheorghe (cl. 10, Pitești) (pag. 99, 259, 306).
87. Papina Șt. Radu (Ploești) (pag. 155).
88. Poenaru Dorin (cl. 11, Oradea) (pag. 231).
89. Popescu Al. Dan (cl. 10, Reșița) (pag. 183, 231, 259, 283).
90. Popescu I. Mihail (cl. 11, Craiova) (pag. 259, 283).
91. Popescu Milița (Craiova) (pag. 155).
92. Popescu Dorin (Oradea Mare) (pag. 23).
93. Popovici Dinu (București) (pag. 23).
94. Petrovici Liviu (cl. 10, Oradea) (pag. 99, 183).
95. Prunache Gh. Gheorghe (Curtea-de-Argeș) (pag. 124).
96. Pușcă Sergiu (Focșani) (pag. 306).
97. Râcă Gheorghe (cl. 9, Tg.-Jiu) (pag. 306).
98. Rădulescu Marian (Turda) (pag. 124).
99. Raicu M. Alexandru (Tr.-Măgurele) (pag. 99, 124).
100. Rudeanu Sergiu (Ploești) (pag. 183).
101. Sârbu Ovidiu (cl. 11, Craiova) (pag. 283).
102. Savin Dan (An. II Șc. Teh. Cărbuni, Câmpulung-Muscel) (pag. 231, 259).
103. Stamatiu I. Alexandru (cl. 9, R.-Sărat) (pag. 306).
104. Steriopol Ion (cl. 8, Pitești) (pag. 306.)
105. Scutelnicu Constantin (cl. 10, Dorohoi) (pag. 231)
106. Scurtu E. Florin (Orașul Stalin) (pag. 46, 99).
107. Șerbănescu Dinu (București) (pag. 207).
108. Șerbu C. Mircea (cl. 11, Ploești) (pag. 155).
109. Silișteanu Mihail (cl. 10, Orașul Stalin) (pag. 46, 99, 183).
110. Șincan Corneliu (cl. 11 L. b. 10, Buc.) (pag. 283).
111. Soare Ion (Tg.-Jiu) (pag. 23).
112. Sofia Gheorghe (cl. 9, Târgoviște) (pag. 183).
113. Stanciu Dorin (Orașul Stalin) (pag. 23).
114. Stegăroiu I. Grigore (Tg.-Jiu) (pag. 124).
115. Stoicescu Teodor (cl. 11 b. L. b. 10, Buc.) (pag. 306).
116. Stoilescu Șt. Florică (cl. 10, R.-Sărat) (pag. 70).
117. Sureia Muedin (Șc. Hidrotehnică, Constanța) (pag. 46, 70, 207).
118. Swoboda Iadwiga (An. IV Medico Farm., Buc.) (pag. 259).
119. Tănase Dumitru (An. II Șc. cadastrală, Buc.) (pag. 306).
120. Trifu Romulus (cl. 11, Făgăraș) (pag. 306).
121. Tătaru D. Emil (cl. 8, Aiud) (pag. 231, 259).
122. Tihan Alexandru (Galați) (pag. 183).
123. Tița D. Constantin (cl. 11, Tg.-Jiu) (pag. 259, 306).
124. Todică Petre (Iași) (pag. 283).
125. Torjescu Florin (cl. 9, Ploești) (pag. 46, 99, 259, 306).
126. Truică Nicolae (cl. 11, Tr.-Severin) (pag. 231).
127. Țigănoiu Irină (Timișoara) (pag. 259).
128. Udrescu Valeriu (cl. 11, Pitești) (pag. 124, 183, 231 259, 306).
129. Ursache Eugen (Iași) (pag. 99).
130. Vasiliu George (cl. 9, Galați) (pag. 306).
131. Vestemeanu Dumitru (Sibiu) (pag. 46).
132. Weszely Tiberiu (cl. 9, Tg.-Mureș) (pag. 207, 259).

Országos Műszaki Könyvtár TULAJDONA

REVISTA MATEMATICĂ ŞI FIZICA

ORGAN AL SOCIETĂŢII DE ŞTIINŢE MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R.

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

APARE SUB ÎNGRIJIREA UNUI SECRETARIAT DE REDACŢIE

REDACŢIA: STR. DIONISIE LUPU, 40. Parter. — BUCUREŞTI
RAIONUL STALIN

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică şi fizică a şcolilor, precum şi orice material informativ care ar interesa redacţia noastră

se vor trimite pe adresa de mai sus

ABONAMENTE:

Tarif general ... ... *Lei 60*

Tarif rédus pentru elevi, studenţi şi profesori ... ... *Lei 10*

Abonamentele se fac numai prin:

Centrul de Difuzare a Presei

Pentru Bucureşti: Str. Const. Mille Nr. 14 — Telef. 5.28.90

Pentru Provincie: Centrul de Difuzare a Presei din Capitalele Regiunilor sau Raioanelor — Banca de Stat în Contul C.D.P. Nr. 038.068

CĂRŢI APĂRUTE ÎN

EDITURA TEHNICĂ

* * * *«Lexiconul tehnic român»*
Vol. III literele I.—M
1.115 pag. — 127,50 lei

* * * *«Tabele şi formule matematice»*
402 pag. — 8,50 lei

T. S. BEZICOVICI:
«Calcule aproximative»
(trad. din l. rusă)
440 pag. — 21,46 lei

A. N. TUBERBILLER:
«Probleme şi exerciţii de geometrie analitică»
(trad. din l. rusă)
312 pag. — 17,94 lei

M. I. CORSUNSCHI:
«Nucleul Atomic»
(trad. din l. rusă)
354 pag. — 17,94 lei

N. V. EFIMOV:
«Geometria superioară»
(trad. din l. rusă)
544 pag. — 30,60 lei

N. P. TARASOV:
«Manual de matematici superioare»
(trad. din l. rusă)
339 pag. — 11,90 lei

D. IOSUB:
«Matematica recreativă»
160 pag. — 5,87 lei

I. I. ALEXANDROV:
«Probleme de construcţii geometrice»
212 pag. — 9 lei

ÎNTREPRINDEREA POLIGRAFICĂ Nr. 4. — C. 2544.

Lei 1.—